Corrigé Final - SY01/A18. Durée 2 heures, 2 pages, 5 exercices.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. On pose, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p_{n,m} = \frac{1}{2^{n-1}3^m}$.
   (a) Montrer que $p_{n,m}$, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ définit une probabilité.
   Corrigé :
   $$p_n = \sum_{m\geq 1} p_{n,m} = \frac{1}{2^{n-1}3} \sum_{m\geq 1} \frac{1}{3^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^n} \text{ et } \sum_{n\geq 1} p_n = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2})} = 1.$$
   (b) Déterminer les lois marginales d'un couple (X,Y) de variables aléatoires (v.a.) admettant comme probabilité $p_{n,m}$, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$
   Corrigé : $p_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}}$ donc X suit la loi géométrique $G(\frac{1}{2})$.
   $p_m = \sum_{n\geq 1} p_{n,m} = \frac{1}{3^m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{3^m}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{m-1}$ donc Y suit la loi géométrique $G(2/3)$.
   (c) Donner pour la v.a. X (resp. la v.a. Y) la valeur de $E(X)$ et de $Var(X)$, (resp. de $E(Y)$ et de $Var(Y)$).
   Corrigé : $E(X) = Var(X) = 2$ et $E(Y) = 3/2, Var(Y) = 3/4$.
2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives binomiales $B(n,1/2)$ et $B(m,1/2)$. Calculer $P(X=Y)$. Indication : On pourra utiliser la formule $\sum_{j=0}^{n} C_n^j C_m^{r-j} = C_{m+n}^r$.

   Corrigé : On suppose par exemple $n \leq m$. $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k \bigcap Y=k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=k)$ car X et Y sont indépendantes. Or $P(X=k) = C_n^k \frac{1}{2^n}$ et $P(Y=k) = C_m^k \frac{1}{2^m}$, puis, en posant $k = n-i$ (ou $i = n-k$) :
   $$P(X=Y) = \frac{1}{2^{m+n}} \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} C_m^{m-i} = \frac{1}{2^{m+n}} \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{m-i} = \frac{1}{2^{m+n}} C_{m+n}^m.$$

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, X suivant une loi $B(p)$ et Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit Z la variable aléatoire telle que :
$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 0, \\ Y & \text{si} \quad X = 1. \end{cases}$$

1. Exprimer Z en fonction de X et Y.
   Corrigé : $Z = Y1_{\{X=1\}}$, par exemple ou bien $Z = YX$.
2. Déterminer la loi de Z.
   Corrigé : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et donc pour $k \in \mathbb{N}$,
   $$P(Z=k) = P(Z=k, X=0) + P(Z=k, X=1) = \begin{cases} (1-p) + p\exp(-\lambda) & \text{si} \quad k = 0, \\ p\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} & \text{si} \quad k \geq 1. \end{cases}$$
3. Calculer $E[Z]$ et $Var(Z)$.
   Corrigé : $E[Z] = E[Y]P(X=1) = \lambda p$ et $E(Z^2) = E[Y^2]P(X=1) = p(\lambda^2+\lambda)$, d'où $Var(Z) = \lambda^2 p(1-p) + \lambda p$.

4. Déterminer la fonction génératrice de Z, que l'on notera $g_Z(u)$.
Corrigé : $g_Z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(Z=k) = (1-p) + p\exp(-\lambda) + p\exp(-\lambda)(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u\lambda)^k}{k!} - 1)$ d'où
$$g_Z(u) = (1-p) + p\exp(-\lambda) + p\exp(-\lambda)(\exp(u\lambda) - 1) = (1-p) + p\exp(-\lambda(1-u)).$$
5. Retrouver $E[Z]$ et $Var(Z)$ à l'aide de la question précédente.
Corrigé :$g'_Z(1) = E[Z] = p\lambda$
et $Var(Z) = g_Z"(1) + g'_Z(1) - (g'_Z(1))^2 = \lambda^2 p(1-p) + \lambda p$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1, notée $\mathcal{E}(1)$.

1. On définit la variable aléatoire $Z = -X$. Déterminer la densité de Z.
Corrigé :
$$F_Z(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ ?, & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$
Ainsi, pour $x \leq 0$, nous avons
$$F_Z(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x).$$
donc la densité est
$$f_Z(x) = f_X(-x) = e^x 1_{\{x \leq 0\}}.$$
2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = Y + Z$. Déterminer la fonction génératrice des moments $\phi_T(t) = E[e^{tT}]$ de la variable aléatoire T. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de t de sorte que $\phi_T(t) < \infty$.
Corrigé :
$$\phi_T(t) = E[e^{tT}] = E[e^{t(Y+Z)}] = E[e^{t(Y-X)}] = E[e^{tY}]E[e^{-tX}] = \frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-t^2}, \quad -1 < t < 1.$$
3. A l'aide de la fonction génératrice des moments $\phi_T(t)$, déterminer l'espérance $E[T]$ et la variance $Var(T)$.
Corrigé :
$$\phi'_T(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \text{ d'où } \phi'_T(0) = 0,$$
et
$$\phi''_T(t) = \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3}, \text{ d'ou } \phi''_T(0) = 2, \text{ d'où } Var(T) = 2.$$
4. Retrouver d'une autre façon l'espérance $E[T]$ et la variance $Var(T)$.
Corrigé :
$$E[T] = E[Y+Z] = E[Y] - E[X] = 0,$$
et
$$Var[T] = Var[Y+Z] = Var[Y] + Var[X] = 2.$$
5. On définit $M_n = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i)}{n}$, où les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et de même loi que Y et les variables aléatoires Z_i sont indépendantes et de même loi que Z. Etudier la convergence presque sûre de M_n. Justifiez clairement votre réponse.
Corrigé : On remarque que $M_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$. Les hypothèses de la Loi Forte des Grands Nombres sont vérifiées, ainsi $M_n \overset{ps}{\to} E[Y] - E[X] = 0$.

6. On considère une suite de variables aléatoires $\{T_i\}_{i\geq 1}$ indépendantes et de même loi, telle que T_i a la même loi que T. Soit $N_n = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$, étudier la convergence en loi de N_n. Justifiez clairement votre réponse.
Corrigé : Les hypothèses du Théorème de la limite centrale sont satisfaites, ainsi $\frac{\sqrt{n}N_n}{\sqrt{2}} \overset{loi}{\to} U$, où U suit la loi $N(0,1)$.

Exercice 4.

1. Soit X une v.a. de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x), & \text{si} \qquad |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

(a) Vérifier que f_X est bien une densité.
Corrigé : La fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{2}dx = \left[\frac{\sin(x)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1.$$

(b) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
Corrigé :

$$E[X] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x\cos(x)}{2}dx = 0,$$

car la densité est symétrique par rapport à (OY) (ou paire).

$$Var(X) = E[X^2] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\cos(x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x^2\sin(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x\sin(x)}{2}dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \left\{[-x\cos(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx\right\} = \frac{\pi^2}{4} - [\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

(c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \sin(X)$.
Corrigé : Comme $X(\Omega) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $Y(\Omega) = [-1, 1]$, ainsi

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq -1, \\ ?, & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1, & \text{si} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

Désormais on prends $-1 < x < 1$,

$$F_Y(x) = P(\sin(X) \leq x) = P(X \leq \arcsin(x)) = \int_{-\pi/2}^{\arcsin(x)} \frac{\cos(x)}{2}dx$$

$$= \left[\frac{\sin(x)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\arcsin(x)} = \frac{x+1}{2}.$$

(d) En déduire la densité Y. La loi de Y est-elle une loi usuelle ?
Corrigé : $f_Y(x) = \frac{1}{2}1_{[-1,1]}(x)$, il s'agit de la densité de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même densité f_X (donnée dans 1). Trouver la densité de la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$. Indication : on notera f_i au lieu de f_{X_i} et on rappelle que

$$\cos(p)\cos(q) = \frac{\cos(p+q) + \cos(p-q)}{2}.$$

Corrigé : Pour $x \in [-\pi, \pi]$ on calcule (ailleurs la densité vaut 0),

$$f_S(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) f_2(x-t)dt = \frac{1}{4}\int \cos(t)1_{[-\pi/2,\pi/2]}(t)\cos(x-t)1_{[-\pi/2,\pi/2]}(x-t)dt.$$

On doit distinguer deux cas (en dehors du cas où la densité vaut 0).
Si $x \in [-\pi, 0]$, alors

$$\begin{aligned} f_S(x) = \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{x+\pi/2} (\cos(x) + \cos(2t-x))dt &= \frac{1}{8}\left\{(x+\pi)\cos(x) + \left[\frac{\sin(2t-x)}{2}\right]_{-\pi/2}^{x+\pi/2}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{(x+\pi)\cos(x) + \frac{1}{2}\left(\sin(\pi+x) - \sin(-\pi-x)\right)\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{(x+\pi)\cos(x) - \sin(x)\right\}. \end{aligned}$$

Si $x \in [0, \pi]$, on fait le changement de variable $x \to -x$ dans l'expression qui précède et on obtiens dans ce cas

$$f_S(x) = \frac{1}{8}\left\{(\pi - x)\cos(x) + \sin(x)\right\}.$$

Ainsi, on obtient finalement

$$f_S(x) = \frac{1}{8}\left\{(\pi + |x|)\cos(x) - \sin(|x|)\right\} 1_{[-\pi,\pi]}(x).$$

Exercice 5. Dans cet exercice la question 3 est un bonus sur 2 points.
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes et de loi $N(0,1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, puis en déduire la densité de Z.
Corrigé : Comme X et Y sont indépendantes le couple (X, Y) est gaussien de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = f_X(x) f_Y(y).$$

On a $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et donc $F_Z(t) = 0$ si $t \leq 0$ et pour $t > 0$

$$F_Z(t) = \int\int_{D_t} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy, \text{ où } D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2+y^2} < t\}.$$

En passant en coordonnées polaires, on a

$$F_Z(t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r^2/2}}{2\pi} r d\theta dr = \left[-e^{r^2/2}\right]_0^t,$$

ainsi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t^2/2}, & \text{si} \quad t > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la densité est

$$f_Z(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2}, & \text{si} \quad t > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Déduire de la question précédente la loi de Z^2.
Corrigé : On a $Z^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et donc $F_{Z^2}(t) = 0$ si $t \leq 0$ et pour $t > 0$

$$F_{Z^2}(t) = P(Z^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq Z \leq \sqrt{t}) = F_Z(\sqrt{t}) = 1 - e^{-t/2}.$$

Ainsi Z^2 suit la loi $\mathcal{E}(1/2)$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Y/X, puis en déduire sa densité.
Corrigé : On a $(Y/X)(\Omega) = \mathbb{R}$ et

$$F_{(Y/X)}(t) = \int\int_{D_t} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy, \text{ où } D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}; \frac{y}{x} < t\}.$$

en coordonnées polaires on a

$$F_{(Y/X)}(t) = \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr \times \int_{I_t} \frac{d\theta}{2\pi}$$

avec $I_t = \left[-\frac{\pi}{2}, \arctan t\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi + \arctan t\right]$, ainsi

$$F_{(Y/X)}(t) = \left(\frac{\pi}{2} + \arctan t\right) + \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \arctan t\right) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan t}{\pi}.$$

La densité est

$$f_{(Y/X)}(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

Ainsi, la variable aléatoire Y/X suit la loi de Cauchy de paramètre 1.