Final - SY01/A18. Durée 2 heures, 2 pages, 5 exercices.

Seul document autorisé : Formulaire manuscrit. Calculatrices interdites.
Barème indicatif : 2.5 ; 4 ; 6 ; 5.5 ; 2+2.
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. On pose, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p_{n,m} = \frac{1}{2^{n-1}3^m}$.
   (a) Montrer que $p_{n,m}$, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ définit une probabilité.
   (b) Déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) de variables aléatoires (v.a.) admettant comme probabilité $p_{n,m}$, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$.
   (c) Donner pour la v.a. X (resp. la v.a. Y) la valeur de $E(X)$ et de $Var(X)$, (resp. de $E(Y)$ et de $Var(Y)$).
2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives binomiales $B(n, 1/2)$ et $B(m, 1/2)$. Calculer $P(X = Y)$. Indication : on pourra utiliser la formule $\sum_{j=0}^{n} C_n^j C_m^{r-j} = C_{m+n}^r$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, X suivant une loi $B(p)$ et Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit Z la variable aléatoire telle que :

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 0, \\ Y & \text{si} \quad X = 1. \end{cases}$$

1. Exprimer Z en fonction de X et Y.
2. Déterminer la loi de Z.
3. Calculer $E[Z]$ et $Var(Z)$.
4. Déterminer la fonction génératrice de Z, que l'on notera $g_Z(u)$.
5. Retrouver $E[Z]$ et $Var(Z)$ à l'aide de la question précédente.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1, notée $\mathcal{E}(1)$.

1. On définit la variable aléatoire $Z = -X$. Déterminer la densité de Z.
2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = Y + Z$. Déterminer la fonction génératrice des moments $\phi_T(t) = E[e^{tT}]$ de la variable aléatoire T. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de t de sorte que $\phi_T(t) < \infty$.
3. A l'aide de la fonction génératrice des moments $\phi_T(t)$, déterminer l'espérance et la variance de la v.a. T.
4. Retrouver d'une autre façon l'espérance $E[T]$ et la variance $Var(T)$.
5. On définit $M_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i+Z_i)}{n}$, où les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et de même loi que Y et les variables aléatoires Z_i sont indépendantes et de même loi que Z. Etudier la convergence presque sûre de M_n. Justifiez clairement votre réponse.
6. On considère une suite de variables aléatoires $\{T_i\}_{i\geq 1}$ indépendantes et de même loi, telle que T_i a la même loi que T. Soit $N_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n}$, étudier la convergence en loi de N_n. Justifiez clairement votre réponse.

Tournez la page !

Exercice 4.

1. Soit X une v.a. de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x), & \text{si} \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f_X est bien une densité.

   (b) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

   (c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \sin(X)$.

   (d) En déduire la densité Y. La loi de Y est-elle une loi usuelle ?

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même densité f_X (donnée dans 1). Trouver la densité de la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$. Indication : on notera f_i au lieu de f_{X_i} et on rappelle que

$$\cos(p)\cos(q) = \frac{\cos(p+q) + \cos(p-q)}{2}$$

.

Exercice 5. Dans cet exercice la question 3 est un bonus sur 2 points.
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes et de loi $N(0,1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, puis en déduire la densité de Z.
2. Déduire de la question précédente la loi de Z^2.
3. Déterminer la fonction de répartition de Y/X, puis en déduire sa densité.