SY01
Travaux Dirigés

Université de Technologie de Compiègne

2020

Table des matières

TD 1

EVENEMENTS ALEATOIRES ET PROBABILITE

Exercice 1. Donner une forme simplifiée des ensembles (utiliser la distributivité) :

1. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3. $(A \cup B) \cap (A^c \cup B)$;
4. $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.

Exercice 2. Une expérience aléatoire consiste à lancer une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne pile. Donner l'espace fondamental de cette expérience.

Exercice 3. Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A, B et C et des opérations $\cap$, $\cup$ et du complémentaire :

1. Les trois événements sont réalisés ;
2. A et B sont réalisés, mais pas C.
3. Au moins un des événements A, B, C est réalisé ;
4. Exactement l'un des événements A, B, C est réalisé ;
5. Au plus un des événements A, B, C est réalisé.

Exercice 4. Combien y a t-il de pièces dans un jeu de dominos sachant que sur chaque pièce figurent deux symboles choisis parmi $\{blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Exercice 5. A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

1. Combien de choix possibles a-t-il ?
2. Combien de choix a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?
3. Combien de choix a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Exercice 6. De combien de façons peuvent s'asseoir 5 garçons et 5 filles autour d'une table de sorte qu'il n'y ait pas deux garçons côte à côte ?

Exercice 7. Montrer que le nombre de façons de distribuer r balles identiques dans n cases est égal à $C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}$.

Exercice 8. Dans une bibliothèque n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de A se retrouvent côte à côte dans les cas suivants :

1. $n = 20, k = 3, p = 3$;
2. $n = 20, k = 5, p = 2$.

Exercice 9. On note S_n^p, le nombre d'applications surjectives d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de p éléments ($p \leq n$).

1. Déterminer S_n^1 et S_n^2.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{p} C_p^k S_n^k = p^n$.
3. *Application :* Au pays de Lilliput, il y a trois types de comportement devant les oeufs. Une personne sur trois les mange durs alors que deux sur trois les mangent à la coque. Parmi les amateurs d'oeufs à la coque, il y a autant de grosboutistes qui les mangent par le gros bout, que de petitsboutistes qui les mangent par le petit bout. Considérons un échantillon de n personnes, prises indépendamment et avec remise. Calculer la taille minimum de l'échantillon pour qu'il contienne au moins une personne de chaque type avec une probabilité supérieure à 0.95.

Exercice 10. On considère l'expérience : *Jet de trois dés*. On définit les événements suivants :
A={ *au moins un as*},
B={ *2 faces au moins montrent le même résultat*},
C={ *la somme des faces est paire*} et
$D = B \cap C$

1. Quel est l'espace fondamental ?
2. Donner une expression d'un événement élémentaire et de sa probabilité.
3. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(D)$.

Exercice 11. Soient deux événements A et B définis sur le même espace de probabilité.

1. Si A est négligeable, montrer que A et B sont indépendants ;
2. même question si A est presque sûr.

Exercice 12. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement de cette urne. Si la première boule porte le numéro 1, elle est remise dans l'urne, dans le cas contraire la boule n'est pas remise dans l'urne. (a) Donner l'espace fondamental de cette expérience. (b) Quelle est la probabilité que la seconde boule porte le numéro 2 ?

TD 2

CALCUL ELEMENTAIRE DE PROBABILITES

Exercice 1. On lance 2 dés non pipés, un dé noir et un dé blanc. Soit A l'événement "le chiffre du dé noir est pair", B l'événement "le chiffre du dé blanc est impair", C l'événement "les 2 chiffres ont même parité". Montrer que A et C, A et B, B et C sont indépendants, mais que les trois événements A , B et C ne le sont pas.

Exercice 2. Le pourcentage d'étudiants qui réussissent les u.v. A, B et C, sont : A :50%, B :40%, C :30%, A et B :35%, B et C :20%, C et A :20% et 15% reussissent les trois u.v.. Quel est le pourcentage d'étudiants qui réussissent au moins l'une des trois u.v ?.

Exercice 3. Un monsieur distrait écrit n lettres différentes à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'un destinataire au moins reçoive la lettre qui lui était destinée ?

Exercice 4. Un conducteur sobre a une chance sur 1000 d'avoir un accident de voiture au cours d'une période donnée ; un conducteur ivre a une chance sur 50 d'avoir un accident au cours de la même période. On admet qu'un conducteur sur 100 conduit en état d'ivresse. Etant donné un accident, quelle est la probabilité pour qu'il soit provoqué par un conducteur ivre ?

Exercice 5. L'urne A contient b_1 boules blanches et n_1 noires. L'urne B contient b_2 boules blanches et n_2 boules noires. Une boule est tirée de A et est placée dans B et alors une boule est transférée de B vers A. Finalement une boule est tirée de A. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?

Exercice 6. On cherche un parapluie qui, avec la probabilité $p/7$, se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7e étage ?

Exercice 7. La mercière de Saint-Martin-sur-Yvette joue avec ses boutons. Dans une boîte à ouvrage, elle a mélangé v boutons verts avec r boutons rouges. Elle en prend un au hasard, puis le remet dans la boîte avec c boutons de la même couleur. Elle recommence n fois ce processus. Montrer que la probabilité de saisir un bouton vert la n-ème fois est indépendante de n.

Exercice 8. Un test médical donne un diagnostic correct avec probabilité 0.95. Sachant que le test est positif pour une personne, quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade, en supposant que 1 personne sur 2000 en moyenne est malade.

Exercice 9. A une exposition d'art, il y a 12 tableaux dont 10 qui sont originaux. Un visiteur sélectionne un tableau de façon aléatoire, mais avant de l'acheter, il demande l'opinion d'un expert sur l'authenticité du tableau. L'expert a raison 9 fois sur 10 en moyenne.

1. Si l'expert décide que le tableau est authentique, quelle est la probabilité que ce soit réellement le cas ?
2. Si l'expert décide que c'est une copie, alors le visiteur choisit un autre tableau. Quelle est la probabilité que son second choix soit un original ?

Exercice 10. On a décelé dans un élevage de moutons une probabilité 0.3 pour qu'un animal soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est 0.9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est 0.8. Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Exercice 11. Dans un groupe de n soldats chacun est susceptible d'être contaminé d'un virus, indépendamment des autres, avec une probabilité p, $(0 < p < 1)$. Afin de détecter ce virus un test sanguin est disponible. Pour des raisons économiques on mélange le sang de l'ensemble des soldats. Si aucun soldat n'est contaminé, le test est négatif. Dans le cas contraire un test individuel est effectué par la suite.

1. Soit T le nombre des tests à effectuer. Donner l'ensemble des valeurs et la loi de la v.a. T.
2. Soit X le nombre des soldats contaminés. Donner la loi de X.
3. On suppose par la suite que le test est positif. C'est-à-dire qu'au moins un soldat est contaminé. Quelle est la probabilité qu'au moins un autre soldat soit contaminé ?
4. Un de ces soldats s'appelle Gaston, et Gaston sait qu'il est contaminé. Quelle est, de son point de vue, la probabilité qu'un autre soldat au moins soit contaminé ?
5. Le test étant positif, il est décidé que les tests individuels seront effectués. Les $i-1$ premiers tests sont négatifs. Le $i-$ème est positif, c'est celui de Gaston. Quelle est la probabilité qu'au moins un des soldats restants soit contaminé.
6. Si $n = 500$ et $p = 10^{-3}$, alors donner le résultat de la question 3. en effectuant une approximation de Poisson.

TD 3

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Exercice 1. Le nombre X de kg de tomates récoltés dans un jardin en une semaine, est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante :

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.5	0.3	0.1

1. Représenter la f.r. de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de de X.
3. Pendant les six semaines de la saison de récolte, la loi de probabilité reste la même ; calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y : *récolte totale en six semaines.*

Exercice 2. On considère une suite de n épreuves aléatoires indépendantes au cours desquelles un événement A peut se produire. La probabilité de réalisation de A à chacune des épreuves est la même et est égale à p. On désigne par X, le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours des n épreuves.

1. Montrer que X est une somme de n v.a. de Bernouilli indépendantes.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Soit k, l'une de ces valeurs, calculer P(X=k), en fonction de n, p, k.

Exercice 3. Une entreprise cherche à organiser sa production. Elle produit des machines spécialisées de même type, toutes différentes. Elle a une probabilité 0.6 de vendre immédiatemment chacune des machines qu'elle produit. Si elle en produit 3, quelle est la probabilité :

1. Pour qu'elle vende les trois.
2. Pour qu'elle en vende au moins deux ?
3. Indiquer la loi de probabilité de la variable aléatoire X : nombre de machines vendues.
4. Quelle est l'espérance mathématique de X ? Préciser sa signification.

Exercice 4. On écrit au hasard une suite de n chiffres (on suppose indépendance des chiffres successifs et équiprobabilité des dix chiffres possibles).

1. Calculer la probabilité pour que parmi ces n chiffres figure k fois le chiffre 5.

2. A.N. $n = 20, k = 3$.
3. Donner aussi cette valeur par approximation de Poisson.

Exercice 5. On considère deux avions, un biréacteur B et un quadriréacteur Q. On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité p de tomber en panne lors d'un vol donné et qu'ils sont indépendants les uns des autres. Soient X la v.a. nombre de réacteurs de B tombant en panne et Y la v.a. nombre de réacteurs de Q tombant en panne.

1. Etablir les lois de probabilité de X et de Y.
2. On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionne normalement. Soient P_B et P_Q les probabilités d'un vol réussi respectivement par un biréacteur ou par un quadriréacteur. Calculer P_B et P_Q en fonction de p. Indiquer selon les valeurs de p celui des avions qui offre la meilleure sécurité.

Exercice 6. Un lot contient 3% de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait au hasard et avec remise. Soit X la variable aléatoire "nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon".

1. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2(X)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(1 \leq X)$.

Exercice 7. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$. Donner la f.r. de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 8. Soient deux v.a. X et Y telles que $E[X^2] < \infty$ et $E[Y^2] < \infty$. Soit $Z = aX + b$, déterminer les réels a et b tels que $E[(Y - Z)^2]$ soit minimum.

Exercice 9. Soit X de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 10. Soit X de loi $P(\lambda)$ et Y de loi $P(\mu)$, indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 11. Une banque a connu quelques difficultés de trésorerie ; son conseil d'administration décide d'organiser la gestion de manière à ce qu'il y ait 999 chances sur 1000 de toujours pouvoir faire face aux demandes de retrait des déposants. (On suppose qu'il n'y a aucun mouvement de panique parmi les déposants ; les habitants de ce pays mènent une vie paisible et ne se préoccupent pas les uns des autres). La Banque a 1000 clients, le dépôt de chaque client est de 1000 E. La probabilité pour qu'un client retire son argent un jour donné est 0.001. Dans ces conditions, combien la banque doit-elle conserver de liquidités journalières pour obéir au principe de gestion qui a été posé ?

Exercice 12. Une variable aléatoire X peut prendre deux valeurs a et b (réels) avec probabilités respectives p et $1 - p$ ou p est un réel appartenant à $]0, 1[$. Le but de l'exercice est de trouver la valeur de p qui maximise la variance de X.

1) Montrer que pour c réel on a $Var(X + c) = Var(X)$. En déduire qu'on peut supposer que X prend des valeurs opposées.

2) Montrer que pour k réel on a $V(kX) = k^2 Var(X)$. En déduire qu'on peut supposer que X prend les valeurs 1 et -1.

3) Trouver la valeur de p cherchée.

4) Peut-on intuitivement avoir l'idée du résultat ?

Exercice 13. *Autour de la loi de Pascal ou binomiale négative.*
La loi de Pascal de paramètre (m, p), soit $p = (p_j; j \geq 0)$, est donnée par

$$p_j = \mathbb{P}(X = m + j) = \binom{m+j-1}{j} p^m q^j, \quad j \geq 0,$$

où $q = 1 - p$.

1. Montrer que $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$, avec $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$.
2. Montrer que (p_j) donné par la formule ci-dessous définit bien une loi de probabilité.
3. Calculer la fonction génératrice $g(s)$ de cette loi (p_j).
4. Calculer l'espérance et la variance de cette loi à l'aide de la fonction génératrice.

Exercice 14. Soient une expérience aléatoire de lancer d'un dé non pipé et la v.a.d. X définie sur cette expérience par $X(\omega) = 2\omega - 1$, où ω est le résultat d'un lancer du dé. Donner :
(a) l'espace de probabilité de l'expérience et l'ensemble des valeurs E de la v.a. X ; (ici on suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des tous les sous-ensembles de Ω).
(b) la représentation canonique de la v.a. X et sa loi et sa loi.
(c) Si $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, avec $A = \{1, 2\}$, X est-t-elle toujours une v.a. ? Expliquer.

Exercice 15. Soit une v.a.d. $X : \Omega \to E = \mathbb{N}$ de loi de probabilités :

$$\mathbb{P}(X = k) = C2^k/k!, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Calculer la constante C. Calculer la probabilité de l'événement : $\{2 \leq X \leq 4\}$.

Exercice 16. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Exercice 17. Soient deux v.a.d. indépendantes X et Y des variances 2 et 1 respectivement. Calculer les variances des v.a. $Z_1 = X + 2Y$ et $Z_2 = X - 2Y$.

Exercice 18. Soit une suite de v.a. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une v.a. indépendante de (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons g_N et g_X les fonctions génératrices de N et X_1 respectivement. Soit la somme à nombre de termes aléatoire :

$$R = X_1 + ... + X_N,$$

si $N \geq 1$ et $R = 0$ si $N = 0$. Cette somme signifie que si $N = n$ alors $R = X_1 + ... + X_n$. On rappelle que $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{j \geq 0} s^j \mathbb{P}(X = j)$ pour $|s| \leq 1$ et $\sum_{k=0}^n x^k = (1-x)^{-1}(1 - x^{n+1})$ pour $x \neq 1$.

1. Utiliser les propriétés des fonctions indicatrices pour démontrer que
$$\mathbb{E}[s^R] = \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^n X_i} \mathbf{1}_{\{N=n\}}\right].$$
2. Montrer que la fonction génératrice de la v.a. R s'écrit $g_R = g_N \circ g_X$, i.e., $g_R(s) = g_N(g_X(s))$.
3. Si N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors R suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
4. Jean épargne dans sa cagnotte à des intervalles irréguliers (lorsque il y pense) des sommes aléatoires d'euros (en nombre entier) de loi de uniforme sur $\{1, 2, ..., d\}$. Sur un intervalle de temps fixe le nombre des jours où Jean a pensé épargner est une v.a. de loi également uniforme sur $\{0, 1, 2, ..., m\}$, $(d, m \in \mathbb{N}^*)$.
   Utiliser l'analyse précédente pour formaliser ce problème et calculer :
   (a) les fonctions génératrices de X et N.
   (b) la fonction génératrice de la v.a. R représentant la somme totale épargnée.
   (c) la somme moyenne épargnée par Jean sur cette période à l'aide de la fonction génératrice.

TD 4

VARIABLES ALEATOIRES REELLES ET A DENSITE

Exercice 1. Montrer que les fonctions F_1, F_2 et F_3 définie comme suit, sont des f.r. de v.a.r.

1. $F_1(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $F_2(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$;
3. $F_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit X une v.a.d. à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset \mathbb{R}$, de loi $p = (p_i, i \geq 1)$. Montrer que la v.a. Y définie par

$$Y = \sum_{i \geq 1} x_i \mathbf{1}_{\{p_0 + p_1 + ... + p_{i-1} < U \leq p_0 + p_1 + ... + p_i\}},$$

où $p_0 = 0$ et $U \sim U(0, 1)$, suit la même loi p que X.

Proposer un algorithme de simulation d'une v.a.d.

Exercice 3. On se donne une fonction f telle que $f(x) = k(2 - x)$, si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$, sinon.

1. Pour quelle valeur de k, cette fonction est-elle une densité de probabilité ? Tracer son graphe.
2. Calculer la fonction de répartition correspondante et tracer son graphe.

Exercice 4. Soit X une v.a. dont la densité est donnée par : $f(x) = ae^{-x}$, si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$, sinon.

1. Déterminer a et tracer le graphe de f.
2. Calculer la fonction de répartition correspondante.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5. Un charpentier mesure et coupe un tronc pour en faire une poutre. Montrer que si les erreurs de mesure sont uniformément distribuées sur un intervalle centré à l'origine de $2k$ cm de longueur, l'espérance est nulle. Pourquoi ce résultat est-il de moins en moins rassurant à mesure que k augmente ?

Exercice 6. Un appareil électronique est soumis à des impulsions séparées par des intervalles de temps variables indépendants les uns des autres. On considère que la durée T (exprimée en secondes) séparant deux impulsions successives est une v.a. définie par $T = 2 + 5X$ où X suit la loi $E(1)$.

1. Exprimer la fonction de répartition F_T en fonction de F_X ; en déduire la densité de T.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   (a) La durée séparant deux impulsions est inférieure à deux secondes.
   (b) La durée séparant deux impulsions est comprise entre deux et cinq secondes.
3. Calculer la durée moyenne (théorique) séparant deux impulsions et sa variance (théorique).

Exercice 7. Soit X une v.a. de fonction de répartition F continue strictement croissante, et $Y = F(X)$.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Montrer que la v.a. $Z = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.
3. Utiliser ce résultat pour donner un algorithme de réalisation d'une v.a. $V \sim E(\lambda)$.

Exercice 8. Soit X une v.a. normale $N(0,2)$ et soit $Y = exp(-\alpha X^2),\ (\alpha > 0)$. Donner la loi de Y et son espérance. Calculer la valeur de la f.r. de Y pour $\alpha = 1$, au point $y = 1$ (à l'aide de la table de la loi normale).

Exercice 9. Soient une v.a. X de loi normale $N(0,1)$, et une v.a. Y prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, +1\}$ avec $P(Y = 1) = p,\ p \in]0,1[$. On suppose que X et Y sont indépendantes. On considère la v.a. $Z = XY$. Montrer que X et Z ont même loi.

Exercice 10. Une tension électrique aléatoire X (mesurée en volts) de densité de probabilité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x), (\lambda > 0)$ passe par un limitateur qui "coupe" toutes les valeurs de la tension inférieures à u_1 et supérieures à $u_2, (0 < u_1 < u_2 < \infty)$, dans le premier cas en l'élevant à u_1 et dans le deuxième cas en la réduisant à u_2. Notons Y la v.a. désignant la tension qui passe par le limiteur.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = u_1)$ et $\mathbb{P}(Y = u_2)$. Quel est le type de la v.a. Y ? Ecrire Y en fonction de la v.a. X.
2. Donner la fonction de répartition de Y ; tracer son graphe.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.
4. Donner les unités de la fonction de répartition, de la densité de probabilité, de l'espérance et de la variance de Y.

Exercice 11. Soient $X_1, ..., X_n$, n v.a. i.i.d.. On définit $M = \max X_i$ et $N = \min X_i$. Quelle est la fonction de répartition de M ? Celle de N ?

Exercice 12. L'écart X de la longueur nominale d'une barre suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Les barres dont l'écart est compris entre a et b ($a < b$) sont dites conformes à la norme française (NF) et sont retenues, les autres sont rejetées pour être recyclées.

1. Donner la fonction de répartition de l'écart d'une barre conforme à la NF.
2. A.N. Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, avec $a = -1$, et $b = 1$, donner la probabilité que l'écart d'une barre conforme à la NF soit supérieur à $0,71$. (Utiliser la table de la loi normale).

Exercice 13. Soient X et Y deux v.a.(> 0) indépendantes et de même loi définie par la densité :

$$f(x) = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[X^n\right]$ (par récurrence) et la variance de X.
3. Pour $\alpha > -1$, calculer $\mathbb{E}[e^{-\alpha X}]$.

4. Déterminer la fonction de répartition de X.
5. On pose $T = \min\{X, Y\}$. Calculer la fonction de répartition de T.

Exercice 14. Supposons que la durée de vie d'une ampoule électrique d'un certain type suit une loi normale de moyenne $m = 180$ h et d'écart-type 20 h.

1. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit supérieure à 200.5 h ? (Utiliser les tables statistiques de la loi normale).
2. Dans un ensemble de quatre de ces ampoules, quelle est la probabilité que les quatre ampoules aient une durée de vie supérieure à 200 h ?

Exercice 15. Pour fonctionner, un système utilise une cellule interchangeable. On dispose de la pièce originale et d'une cellule de rechange, chacune d'une durée de vie aléatoire X. Si la densité de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

quelle est la fiabilité du système au bout de 5 mois ? Calculer le taux de défaillance de ce système.

Exercice 16. Supposons que la charge de rupture d'un fil soit une variable aléatoire X de loi symétrique, de moyenne $m = 851$ et d'écart type $\sigma = 71$ g. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que peut-on dire de la probabilité de l'événement $\{X \leq m + 2\sigma\}$? Que signifie cette probabilité ?

Exercice 17. Montrer que si $g(x) \geq 0$ pour tout x et $g(x) \geq c$, avec $c > 0$, pour $x \in (\alpha, \beta)$, alors

$$\mathbb{P}(X \in (\alpha, \beta)) \leq c^{-1}\mathbb{E}\left[g(X)\right]$$

.

Exercice 18. Montrer que si X et Y sont i.i.d. alors pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[|X - Y| > t\right] \leq 2\mathbb{P}\left[|X| > \frac{t}{2}\right].$$

Exercice 19. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{1}{3}e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que F est bien une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. Donner le graphe de cette fonction (à main levée) en précisant bien les points de sauts.
2. Calculer les probabilités :
   (a) $\mathbb{P}(X = -1)$;
   (b) $\mathbb{P}(X = +1)$;
   (c) $\mathbb{P}(-1 < X < 0)$;
   (d) $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 0)$;
   (e) $\mathbb{P}(X < -1)$;
   (f) $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

3. Décomposer la fonction de répartition F en partie continue, F_c, et partie discrète, F_d.
4. Calculer l'espérance mathématique de la v.a. X.

Exercice 20. Soit un angle aléatoire Θ de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Soit la v.a. $X := \tan \Theta$.

1. Donner l'expression de la densité de probabilité de la v.a. Θ et calculer sa fonction de répartition.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X \le x) = 2\mathbb{P}(-\frac{\pi}{2} < \Theta \le \arctan x)$. (Faire un dessin).
3. Calculer la densité de probabilité de la v.a. X.
4. La v.a. X possède-t-elle une espérance ? Expliquer.

Exercice 21. Soit une v.a. X de fonction de répartition F donnée par la relation

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-\lambda x\} & \text{si } x \ge a, \\ 0 & \text{si } x < a, \end{cases}$$

où $a > 0$, $\lambda > 0$.

1. Calculer : $\mathbb{P}(X = a)$ et $\mathbb{P}(X = a + 1)$.
2. Trouver deux fonctions de répartition, une discrète, F_d, et une continue, F_c, telles que $F(x) = dF_d(x) + cF_c(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les nombres $d > 0$ et $c > 0$ seront précisés.
3. Donner les graphes des fonctions : F, F_d et F_c.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 22. Un appareil électrique fonctionne en continu à l'aide de 3 piles électriques de durées de fonctionnement X_1, X_2 et X_3. Les v.a. X_1, X_2 et X_3 sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'appareil s'arrête de fonctionner lorsque 2 piles au moins soient usées. Soit T la durée de fonctionnement de l'appareil.

1. Déterminer la fonction de répartition, G, de T, en vérifiant d'abord que $T = \max\{\min\{X_1, X_2\}, \min\{X_2, X_3\}, \min\{X_3, X_1\}\}$.
2. Démontrer que G (ou, de manière équivalente, T) est absolument continue sur $\mathbb{R}$ et donner sa densité.
3. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 23. Soit une v.a. U de loi uniforme sur $[0, a]$ ($a > 0$).

1. Montrer que la fonction génératrice des moments de U est

$$M_U(t) = \frac{e^{at} - 1}{at}.$$

Étudier l'existence de M_U en 0. La loi de U est-elle définie par ses moments ? Expliquer.

2. Si les moments d'une v.a.r. X sont donnés par

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{2^k}{k+1}, \qquad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N},$$

alors calculez sa fonction génératrice des moments et en déduire sa loi.

TD 5

VECTEURS ALEATOIRES

Exercice 1. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. dont la distribution de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	-1	0	1
0	a	2a	a
1	3a/2	3a	b

1. A quelle condition ceci définit-il bien une distribution de probabilité conjointe ? (Dans la suite, on supposera cette condition satisfaite).
2. On pose : $Z = X + 2Y$ et $T = \max\{X,Y\}$. Déterminer, en fonction de a seulement, les lois de X, Z et T.
3. Calculer les espérances des X, Y et Z.
4. Calculer $E(X^2)$ et $Var(X)$.
5. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. On lance un dé équilibré 10 fois. Calculer :
(i) la probabilité d'obtenir 1, 2,..., 5, deux fois chacun et aucun 6 ;
(ii) la probabilité d'obtenir 1, 2, 3, deux fois chacun.

Exercice 3. M. Dupont a rendez vous avec M. Durand entre 17h et 18h, chacun d'eux a décidé de ne pas attendre l'autre plus de 10 mn. On suppose qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribuées entre 17h et 18h.

1. Déterminer la probabilité d'une rencontre.
2. M. Dupont fixe son heure d'arrivée à l'instant x. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer M. Durand ?
3. Arrivant à l'heure x, M. Dupont ne trouve personne. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer M. Durand ?

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a., i.i.d. de loi uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.indépendantes de même loi de densité $f(t) = te^{-t},\ t \geq 0$. On définit les v.a. $U = X + Y$ et $V = X/(X+Y)$.

1. Calculer la densité du couple (U,V).
2. Quelle est la densité de U ? de V ?. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a. indépendantes et de même densité $f(x) = \frac{1}{x^2}1_{]1,+\infty[}(x)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

1. Calculer la loi du couple (U, V). Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Calculer les lois marginales de U et V.

Exercice 7. (Final P95). Soit la variable aléatoire (X, Y) qui suit une loi uniforme sur $D = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Calculer les densités de probabilités marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On pose $X = Rcos\Theta$ et $Y = Rsin\Theta$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$ et $R > 0$. Calculer les lois marginales de R et Θ. R et Θ sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = \frac{X}{X^2+Y^2}$. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z.

Exercice 8. On considère le vecteur gaussien centré (X, Y), dont la matrice de covariance est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\mid \rho \mid < 1$. Calculer $\mathbb{E}\left[\max(X, Y)\right]$.

Exercice 9. Soient les v.a X, Y et Z indépendantes, de même loi $N(0, 1)$. On définit les v.a. suivantes : $T = X + Y$, $U = X - Y + 2Z$ et $V = -X + Y + Z$. Quelle est la loi du vecteur (T, U, V) ?. Déterminer les lois marginales.

Exercice 10. Une machine fabrique des résistances électriques dont la valeur en ohms est une v.a. R de loi normale $N(100; 9)$. Une seconde machine fabrique des résistances dont la valeur en ohms est une v.a. R' de loi normale $N(200; 16)$.

1. Quelle est la loi suivie par la résistance obtenue en montant en série deux résistances prélevées au hasard dans les productions respectives de la première et de la seconde machine ?
2. Quelle est la probabilité qu'une telle résistance soit comprise entre 290 et 305 ohms ?

TD 6

INDEPENDANCE ET CONDITIONNEMENT

Exercice 1. Soient X et ϵ deux v.a., indépendantes. X suit la loi $N(0,1)$ et ϵ la loi discrète telle que $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$,et $\mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $Y = \epsilon X$, montrer que :

1. $Y \sim N(0,1)$.
2. $Cov(X,Y) = 0$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = 0)$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, de lois respectives $b(n_1, p)$ et $b(n_2, p)$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X en $\{X + Y = n\}$.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X \mid X + Y]$.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a. ; soit $f(x,y)$ la densité du couple définie par : $f(x,y) = e^{(-x/y)-y}/y$, pour $x > 0$ et $y > 0$.

1. Calculer la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x \mid y)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

Exercice 4. La densité conditionnelle de X en $\{Y = y\}$ est donnée par $f_{X|Y}(x|y) = xy^2 e^{-yx}$, $x \geq 0$ et $y \geq 1$. La loi de Y est $f_Y(y) = \frac{1}{y^2}$, pour $y \geq 1$.
Calculer la loi conditionnelle de Y en $\{X = x\}$ et $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Exercice 5. Un dé est jeté 12 fois.

1. Calculer la probabilité que chaque face apparaisse deux fois.
2. Soient X le nombre d'apparitions de 6 et Y celui de 1. Déterminer la distribution jointe de X, Y.
3. Calculer $Cov(X,Y)$.

Exercice 6. (Final P95). Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement $(\lambda > 0, \mu > 0)$.

1. Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

2. Calculer $\mathbb{E}(X \mid X+Y)$ et $Var(X \mid X+Y)$
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid X+Y)$.

Exercice 7. (FINAL P95) Considérons une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$, i.e. de densité : $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$.

1. Montrer que la densité de $X_1 + X_2$ est $f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$
2. Montrer par récurrence que la densité de probabilité de $X_1 + \cdots + X_n$ est $f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$.
3. Soit Y une variable aléatoire, indépendante des X_i , de loi géométrique sur $\mathbb{N}^\star$, i.e., $p_n = \mathbb{P}(Y = n) = p(1-p)^{n-1}, n = 1, 2, \ldots$ et $0 < p < 1$. Calculer la densité de la variable aléatoire : $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$
4. Donner l'espérance et la variance de Z.

TD 7

CONVERGENCES STOCHASTIQUES - LOIS DES GRANDS NOMBRES

Exercice 1. Soit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ de loi

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2n}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2n}.$$

Montrer que :

1. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$,
2. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^r} 0$, $r > 0$.

Exercice 2. (*Loi de Fréchet*). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de densité commune

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x^{-\alpha-1}, & \text{si} \quad x > 1, \alpha > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $Y_n = n^{-1/\alpha} \max_{1\leq k\leq n}\{X_k\}$, $n \geq 1$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et préciser cette limite.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telle que $X_n \sim \gamma(n, n)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1$.

Exercice 4. (*Loi de Laplace*). On dit qu'une v.a. X suit la loi de Laplace de paramètre a, $X \sim L(a)$, si X a la densité

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-|x|/a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notons que $\mathbb{E}(X) = 0$, et $Var(X) = 2a^2$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d., $X_n \sim L(1)$. Montrer que

$$\sqrt{n}\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2),$$

où on précisera σ.

Exercice 5. (*Loi de Student*). Soit la suite aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ de loi $N(0,1)$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ de loi $\chi^2(n)$ indépendantes. Soit $T_n = \frac{X_n}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}}$, $n \geq 1$.

Montrer que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$.

Exercice 6. Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser J chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration (donc à $\frac{1}{2}10^{-J}$ près). On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $\left[\frac{-1}{2}10^{-J}, \frac{1}{2}10^{-J}\right]$ et que le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Calculer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale (en valeur absolue) à $\frac{1}{2}10^{-J+3}$.