TD 2 - Séance 2 du Chapitre 1 - A23

ETD-1-5 On jette trois dés. Soient A l'événement *"obtenir au moins un as(as="1")"*, B l'événement *"2 faces montrent le même résultat au moins"*, C l'événement *"la somme des faces est paire"* et D l'événement $B \cap C$.

a- Quel est l'espace fondamental ?
Corrigé: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ son cardinal noté $|\Omega| = 6^3$.

b- Donner l'expression d'un événement élémentaire et de sa probabilité.
Corrigé: Lorsqu'on prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, c.a.d. la tribu exhaustive composée de toutes les parties (sous ensembles) de Ω alors un événement élémentaire est un triplet $\omega = (i, j, k)$ où i, j, k prennent des valeurs (fixées pour chaque w) dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $P(w) = \frac{1}{6^3}$.

c- Calculer les probabilités des événements A, B, C et D.
Corrigé:

- Il est plus simple de faire $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, car $\bar{A} = \{\text{Aucun as}\}$, et $|\bar{A}| = 5^3$. Ainsi, $P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.
  On peut aussi noter A_i l'évènement "obtenir un 1 sur l'i-ème dé", ou plus précisément $A_i = \{\omega = (d_1, d_2, d_3) \in \Omega : d_1 = 1\}$. Alors $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_1 A_2)$. Dans cette dernière expression, les évènements de la réunion sont disjoints deux à deux, donc nous avons
  $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) + \mathbb{P}(A_3 \backslash A_1 A_2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{91}{216}.$$
  On obtient le même résultat en remarquant que $|A_1| = 6^2$, $|A_2 \backslash A_1| = 5 \times 6$ et $|A_3 \backslash A_2 A_1| = 5 \times 5$.
- Il est plus simple de faire $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, car $\bar{B} = \{\text{Les résultats sont tous différents}\}$, et $|\bar{B}| = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Ainsi, $P(B) = 1 - \frac{120}{216}$.
  On obtient le résultat également en remarquant que $|B| = \binom{3}{2} \times 6 \times 5 + 6$, le premier facteur correspondant au choix de la position des 2 faces qui se répètent parmi les 3, ensuite nous avons 6 possibilités pour le résultat qui se répète et 5 pour le dé restant. Enfin, les 6 dernières possibilités correspondent aux tirages avec les 3 faces identiques.
- Pour $\omega \in \Omega$, la somme $i+j+k$ prends autant de fois une valeur paire que impaire. En effet, $i+j+k$ est paire si parmi i, j et k soit les trois valeurs sont paires, soit deux sont impaires et la troisième paire. Dans les cas symétriques la somme $i+j+k$ est impaire. Il y a autant des nombres pairs qu'impairs dans l'ensemble $\{1, \ldots, 6\}$, ainsi $P(C) = \frac{1}{2}$.

  Un raisonnement équivalent est le suivant : $C = C_1 \cup C_2$ où $C_1 = \{\omega \in \Omega : i, j, k \text{ pairs}\}$ et $C_1 = \{\omega \in \Omega : \text{ parmi } i, j, k \text{ deux pairs et un impair}\}$. Ensuite, $|C_1| = 3^3$ et $|C_2| = 3 \times 3^3$ où le premier facteur de 3 dans ce dernier terme provient du choix de la position du nombre pair dans les éléments de C_2. Ainsi, $P(C) = \frac{3^3 + 3 \times 3^3}{6^3} = \frac{1}{2}$
- $P(D) = \frac{1}{2} P(B) = \frac{2}{9}$, car il y a autant de cas où deux valeurs sont égales et la troisème paire que des cas où deux valeurs sont égales et la troisème impaire. Sans doute que le meilleur raisonnement est $P(D) = P(B \cap C) = P(C|B)P(B)$ où $P(C|B)$ est la probabilié conditionnelle de C sachant B.

ETD-1-6 Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 sujets. Trois d'entre eux, tirés au sort, sont proposés à chaque candidat. Un candidat n'ayant étudié que le quart des sujets du programme subit l'épreuve. Quelle est la probabilité que ce candidat ait étudié :

(a) les trois sujets proposés ?

Corrigé: $\Omega = \{$échantillons non ordonnés sans répétition de 3 éléments parmi 100$\}$, l'ordre n'intéresse pas et les sujets sont différents, soit $\Omega = \{\{i, j, k\} : i, j, k \in \{1, \ldots, 100\}, i \neq j \neq k\}$. Ainsi, la probabilié cherchée vaut

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{C_{25}^3}{C_{100}^3} = \frac{25 \times 24 \times 23}{100 \times 99 \times 98}.$$

Notez que le même résultat peut être obtenu en modélisant Ω par des échantillons ordonnés sans répétition.

(b) deux de ces sujets ?
Corrigé: La probabilié cherchée vaut

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{C_{25}^2 \times C_{75}^1}{C_{100}^3}.$$

(c) aucun des trois ?
Corrigé: La probabilié cherchée vaut $\frac{C_{75}^3}{C_{100}^3}$.

(d) au moins l'un des trois ?
Corrigé: Au vu de la question précédente, il suffit de calculer $P(\text{au moins un des trois }) = 1 - P(\text{aucun}) = 1 - 0.418$.

ETD-1-9 Montrer que le nombre de façons de distribuer r balles identiques dans n cases est égal à C_{n+r-1}^r.

Corrigé:

Cet exercice est en fait un modéle mathématique qui permet de retrouver la formule de combinaisons avec répetition (échantillons non ordonnées avec répétition de r éléments parmi n). On considére n cases (donc $n - 1$ cloisons intermédiaires) $|| \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid ||$.
On peut engendrer diverse façons de disposer les r balles, par exemple

- toutes les balles dans la première case $||oooooo| \mid \mid \mid \mid \mid \mid \mid ||$,
- ou bien $r - 1$ balles dans la première case et une dans la deuxième $||ooooo|o| \mid \mid \mid \mid \mid \mid ||$,
- ou bien $||ooooo| \; |o| \mid \mid \mid \mid \mid ||$, etc...

Le passage entre les configuration ci-dessus, sont vues comme un échange (permutation) de place entre une balle et une cloison. Ainsi par permutation des $n - 1$ cloisons intermédiaires et des r balles, on peut engendrer une fois et une seule fois chacun des C_{n+r-1}^r rangements possibles. Cela revient à choisir les positions de r balles parmi les $n - 1 + r$ positions possibles (car chaque balle et chaque cloison occupent une position). Notez que cela équivaut à choisir les positions des $n - 1$ cloisons, étant donné que $C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1}$.

ETD-1-17 Dans une bibliothèque n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de A se retrouvent côte-à-côte dans les cas suivants:

a- $n = 20$, $k = 3$, $p = 3$;
Corrigé: $\Omega = \{$l'ensemble de permutations d'un ensemble de 20 éléments$\}$, $|\Omega| = 20!$, ainsi chaque permutation a une probabilité $\frac{1}{20!}$.
Posons l'évènement d'intérêt $E_1 = \{$les trois livres de A sont côte à côte$\}$, on peut imaginer une bibliothèque de 20 cases || | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ||.
Ainsi les 3 livres de A peuvent par exemple être placés $||A\ |A\ |A$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | ||, on peut aisement voir que si on déplace les livres de A vers la droite alors le premier livre de A peut au plus prendre la place 18. Ainsi

$$P(E_1) = \frac{18 \times 3! \times 17!}{20!}$$

le 18 vient du nombre de places pouvant être prises par le premier livre de A, le 3! des permutations dans l'ordre des 3 livres de A entre eux (n'importe lequel des 3 livres de A peut être le premier, deuxième et troisième), et le 17! correspondent aux placements des livres des autres auteurs (tous différents).

b- $n = 20$, $k = 5$, $p = 2$.
Corrigé: Posons $E_2 = \{$au moins deux livres de A sont côte à côte$\}$. Dans ce cas il est plus simple de calculer $P(E_2) = 1 - P($aucun livre de A n'est côte à côte$)$. On peut voir que si l'on dispose les 15 autre livres, alors on peut disposer les livres de A entre deux autres livres ainsi que dans la première place et dans la dérniere place, ce qui donne

$$P(\bar{E}_2) = \frac{15! \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{20!}.$$