MT12 - P2023 - Examen final

Durée 2h00 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Donner la définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ et rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Appliquer ce théorème pour justifier que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-e^{-\frac{x^2}{n}}\right)\,dx=0.$$
2. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$, donner la définition de la transformée de Fourier de f. Soit $c\in\mathbb{R}$, démontrer la formule de translation
$$\mathcal{F}\{f(x-c)\}=e^{-2i\pi\xi c}\,\widehat{f}(\xi),\quad \forall\xi\in\mathbb{R}.$$
Soient $a>0$ et $c>0$, justifier que la fonction $f_1 : x\in\mathbb{R}\mapsto e^{-a(x-c)}H(x-c)\in L^1(\mathbb{R})$ (H désigne la fonction de Heaviside). Calculer la transformée de Fourier de f_1.
3. Soient $\alpha\in\mathbb{C}$ et f une fonction causale d'abscisse de sommabilité σ_0. Donner la définition de $F(p)$ sa transformée de Laplace. Démontrer également la formule suivante :
$$\mathcal{L}\{f(x)\,e^{-\alpha x}\}=F(p+\alpha),\quad \text{si } \operatorname{Re}(p+\alpha)>\sigma_0.$$
Soit f_2 la fonction définie par $f_2(x)=xH(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On note F_2 la transformée de Laplace de f_2. Soit $\alpha>0$, déterminer l'expression **explicite** de $\mathcal{L}\{f_2(x)\,e^{-\alpha x}\}$.

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Transformée de Laplace)

1. Pour $t>0$, on considère l'équation différentielle du premier ordre suivante
$$x_1'(t)-2x_1(t)=e^t,\quad x_1(0)=2.$$
   (a) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t\mapsto e^tH(t)$ (où H désigne la fonction de Heaviside).
   (b) Soit X_1 la transformée de Laplace de x_1. Exprimer $X_1(p)$ comme une fraction rationnelle.
   (c) Utiliser une décomposition en éléments simples pour exprimer $X_1(p)$ comme la somme de deux fractions rationnelles dont les dénominateurs sont des polynômes de degré un.
   (d) En utilisant la relation $1/(p+a)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}e^{-at}$, déterminer l'expression de x_1 et vérifier que cette fonction satisfait l'équation différentielle ainsi que la condition initiale.
2. Pour $t>0$, on considère l'équation différentielle de second ordre suivante
$$x_2''(t)-2x_2'(t)-3x_2(t)=1,\quad x_2(0)=1,\,x_2'(0)=-2.$$
   (a) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t\mapsto H(t)$.
   (b) Soit X_2 la transformée de Laplace de x_2. Justifier que $X_2(p)$ vérifie la relation
$$X_2(p)=\frac{p^2-4p+1}{p(p^2-2p-3)}.$$

(c) Utiliser une décomposition en éléments simples pour exprimer $X_2(p)$ différemment.

(d) En déduire l'expression de x_2 et vérifier que cette fonction satisfait l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales.

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Transformée de Fourier)

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction à **valeurs réelles et paire**.

   (a) Démontrer que la transformée de Fourier de f et sa transformée de Fourier conjuguée coïncident, i.e., démontrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{f}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(\xi)$ où

$$\overline{\widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{2i\pi\xi x}\, dx.$$

   (b) En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{f}(\xi) = \operatorname{Re} \widehat{f}(\xi)$ et donc que

$$\widehat{f}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\, \cos(2\pi\xi x)\, dx. \tag{1}$$

2. Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$.

   (a) Démontrer que $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ et est paire.

   (b) Déduire de la première question l'expression de $\widehat{f_1}$.

3. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = (1 - |x|)\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

   (a) Démontrer que $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ et est paire.

   (b) Déduire de la première question que

$$\widehat{f_2}(\xi) = \frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

4. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on cherche à exprimer plus simplement la valeur de l'intégrale à paramètre

$$I(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, \cos(2\xi t)\, dt.$$

   (a) Démontrer que $I(\xi)$ peut se mettre sous la forme (1) et en déduire que

$$I(\xi) = \frac{\pi}{2}\, \mathcal{F}\{g(x)\}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

   où

$$g(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (b) Quelle relation existe entre g et f_2 ?

   (c) Démontrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ (**indication :** on pourra distinguer l'intégrabilité de g sur $[-1, 1]$ et sur $\mathbb{R}\backslash[-1, 1]$).

   (d) En déduire, en justifiant l'application d'un résultat du cours, que

$$I(\xi) = \frac{\pi}{2}\, (1 - |\xi|)\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(\xi)$$