

TD MT12

ANTOINE ZUREK

TABLE DES MATIÈRES

1. Chapitre 1	1
2. Chapitre 2	5
3. Chapitre 3	9
4. Chapitre 4	11
5. Chapitre 5	13
6. Chapitre 6	16

1. CHAPITRE 1

Exercice 1.

(1) En utilisant des IPP calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^\pi x \cos(x) dx, \quad \int_0^1 x \arctan(x) dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx.$$

(2) En utilisant un changement de variable calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$$

Exercice 2. Soit f une fonction continue. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, a]$ (avec $a > 0$). Pour ce faire on utilise dans un premier temps la méthode des rectangles à gauche puis la méthode des trapèzes. Dans les deux cas, on considère un entier naturel $N \geq 1$ et une suite équi-répartie de points $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = a$ avec $x_k = ka/N$ pour $k = 0, \dots, N$. Alors la méthode des rectangles à gauche donne la formule suivante d'approximation

$$I = \int_0^a f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = I_{N,\text{rectangle}},$$

et la méthode des trapèzes

$$I \approx \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = I_{N,\text{trapeze}}.$$

- (1) Commençons par étudier la méthode des rectangles à gauche.
- (a) Représenter géométriquement la méthode des rectangles à gauche.
- (b) Si f est C^1 monter l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_{N,\text{rectangle}}| \leq \frac{a^2}{2N} \sup_{x \in [0,a]} |f'(x)|.$$

- (2) Etudions à présent la méthode des trapèzes.
- (a) Représenter géométriquement la méthode des trapèzes.
- (b) Montrer que si f est C^2 alors la formule, dite de Maclaurin, suivante

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} (f(x_{k+1}) + f(x_k)) + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1}) f''(x) dx,$$

est vérifiée pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$ (indication : IPP).

- (c) en déduire que si f est C^2 alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_{N,\text{trapeze}}| \leq \frac{a^3}{12N^2} \sup_{x \in [0,a]} |f''(x)|.$$

Exercice 3. Dans cet exercice on considère plusieurs normes et ps.

- (1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).
- (a) Montrer que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

est une norme. Pour $n = 2$, représenter l'ensemble des points $x \in E$ vérifiant $\|x\|_1 = 1$.

- (b) Montrer que

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

est une norme. Toujours dans le cas $n = 2$, représenter l'ensemble des points $x \in E$ vérifiant $\|x\|_\infty = 1$.

- (2) On considère à présent $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}, \quad \forall P, Q \in E.$$

- (a) Montrer que l'application est un produit scalaire sur E .
- (b) Donner la définition de la norme associée à ce produit scalaire.

Exercice 4. Dans cet exercice on (re)travaille la notion d'orthogonalité dans un espace euclidien.

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) quelconque. On considère l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel (ou canonique) et (x_1, \dots, x_n) une famille orthogonale. Montrer que

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Ce résultat vous fait-il penser à un théorème célèbre ?

- (2) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \quad P_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1),$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx, \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X].$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de démontrer (partiellement) le théorème dit de Fréchet-Von Neumann-Jordan. Voici son énoncé :

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel muni d'une norme N . La norme N découle d'un produit scalaire si et seulement si N vérifie

$$(1) \quad N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2, \quad \forall x, y \in E.$$

L'identité (1) est appelée identité du parallélogramme.

- (1) Démontrer dans un premier temps que si pour tout $x \in E$ on a $N(x)^2 = \langle x, x \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors N vérifie (1).
- (2) On veut à présent démontrer l'implication inverse, i.e., que si N vérifie (1) alors N découle d'un produit scalaire. Pour ce faire on considère l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$\varphi(x, y) = \frac{N(x+y)^2 - N(x-y)^2}{4}, \quad \forall x, y \in E.$$

Dans la suite on **admet** que φ vérifie

$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E.$$

- (a) Montrer que $\varphi(x, x) = N(x)^2$ (ainsi si φ est un produit scalaire sur E on a bien $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$). Il reste à montrer que φ est un produit scalaire.
- (b) Montrer que φ est définie positive, i.e., $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$.
- (c) Montrer que φ est symétrique, i.e., $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$.
- (d) Pour montrer la bilinéarité de φ , on **admet** que N vérifie pour tout x, y et $z \in E$ l'identité suivante

$$N(x+y+z)^2 = N(x+y)^2 + N(x+z)^2 + N(y+z)^2 - N(x)^2 - N(y)^2 - N(z)^2.$$

En déduire que $\varphi(x+y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ pour tout $x, y, z \in E$ et que φ est bilinéaire.

- (e) En déduire que φ est un produit scalaire sur E .
- (3) Est-ce que la norme $\|\cdot\|_1$ (ou $\|\cdot\|_\infty$) découle d'un produit scalaire ?

2. CHAPITRE 2

Exercice 1.

- (1) Soit f une fonction a -périodique et continue par morceaux. On note f_N (pour $N \geq 1$) la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f , i.e.,

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) \exp\left(2i\pi n \frac{t}{a}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f_N peut également s'écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sous la forme

$$f_N(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n(f) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) + b_n(f) \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) \right),$$

avec

$$a_0(f) = 2c_0(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) dt,$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) dt,$$

$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) dt.$$

Pour $n \geq 1$, montrer également les formules :

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2},$$

$$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

- (2) Soit f une fonction a -périodique et continue par morceaux. Montrer que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+a} f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (3) Soit f une fonction a -périodique et continue par morceaux. Montrer que
- si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$,
 - si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

- (1) Calculer les sommes partielles d'ordre $N \geq 1$, notées f_N , des séries de Fourier des fonctions suivantes :

(a) f est 2-périodique avec $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$,

(b) f est 1-périodique avec $f(t) = t$ si $t \in [0, 1[$,

(c) f est 2π -périodique avec $f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ si $t \in [-\pi, \pi]$,

(d) $f(t) = |\sin(t)|$ (période de f ?),

- (e) $f(t) = \sin^3(t)$ (période de f ?).
- (2) Appliquer l'égalité de Parseval aux différentes fonctions f de la question précédente. En utilisant les fonctions des questions (1)(b) et (1)(c), en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3.

- (1) Soit f une fonction a -périodique et continue par morceaux. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et soit g la fonction a -périodique avec $g(t) = f(t - \alpha)$. Quelle relation existe entre $c_n(g)$ et $c_n(f)$?
- (2) Soit f une fonction a -périodique de classe C^1 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{a} c_n(f).$$

En déduire l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

On suppose à présent f de classe C^2 . Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la série $\sum |c_n(f)|$ si f est C^2 ?

Exercice 4. On considère les fonctions de l'exercice 2 question (1). Les séries de Fourier de ces fonctions convergent-elles simplement vers f sur \mathbb{R} ? Si oui pourquoi? Si ce n'est pas le cas préciser vers quelle valeur tend $(f_N(x))_{N \geq 1}$. Enfin quelles séries de Fourier convergent normalement vers la fonction initiale sur \mathbb{R} ?

Exercice 5 (Exercice de synthèse 1). Soit f la fonction 2-périodique avec

$$f(x) = x(1 - x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

que l'on prolonge par imparité sur $[-1, 0]$.

- (1) Représenter le graphe de f .
- (2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
- (3) Est-ce que la suite des sommes partielles des séries de Fourier de f , notée $(f_N)_{N \geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers f sur \mathbb{R} .
- (4) Justifier la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(5) Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

Exercice 6 (Exercice de synthèse 2). Soit f la fonction 2π -périodique et impaire avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \pi. \end{cases}$$

- (1) Représenter le graphe de f .
- (2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
- (3) Est-ce que la suite des sommes partielles des séries de Fourier de f , notée $(f_N)_{N \geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers f sur \mathbb{R} .
- (4) Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} ?

Exercice 7. Développer en séries de Fourier la fonction f de période 2, définie sur $[-1, 1[$ par

$$f(t) = \cos(\pi zt) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

En déduire les égalités :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 8. Soient x un paramètre réel strictement positif donné et f une fonction périodique définie par

$$f(t) = e^{xe^{it}}.$$

(1) Période de f ? En admettant que $c_0(f) = 1$, montrer que

$$c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \frac{x^n}{n!} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

(2) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{2x \cos(t)} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Exercice 9 (Développement en série de cosinus et sinus). Soit f la définie sur $]0, 1[$ par

$$f(x) = x \quad \forall x \in]0, 1[.$$

- (1) Prolongez la fonction f sur $] - 1, 1[$ par imparité, puis prolongez f sur \mathbb{R} par 2 périodicité. On note f_1 la prolongation de f sur \mathbb{R} . Représentez le graphe de f_1 . Développer en séries de Fourier f_1
- (2) Comparez les résultats obtenus avec les résultats obtenus pour les fonctions (a) et (b) de l'exercice 2. Que constatez-vous ?

3. CHAPITRE 3

Exercice 1 (TFD).

- (1) Soit le vecteur x avec $x = (1, 2, 4, 3)^\top$. Calculer la TFD du vecteur x .
- (2) Soit le vecteur y avec $y = (10, (-3 - i), 0, (-3 + i))^\top$. Calculer et commenter la TFD du vecteur y .
- (3) Soit le vecteur $x \in \mathbb{C}^{10}$ dont les 5 premiers coefficients valent 1 et les 5 autres 0. Calculer la TFD de x .

Exercice 2 (TFD et TFDI). On considère le vecteur x de taille $N \geq 1$ avec

$$x_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- (1) Calculer la TFD, le vecteur noté X , de x .
- (2) Calculer la TFDI de X .

Exercice 3 (Égalité de Plancherel discrète)

- (1) Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire hermitien sur \mathbb{C}^N :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \bar{y}_n \quad \text{pour } x = (x_0, \dots, x_{N-1})^\top, y = (y_0, \dots, y_{N-1})^\top \in \mathbb{C}^N.$$

- (2) Soient X et $Y \in \mathbb{C}^N$ les vecteurs obtenus à partir de deux vecteurs x et $y \in \mathbb{C}^N$ par DFT. Justifier la relation suivante

$$\frac{1}{N} \langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Exercice 4 (vecteurs périodiques, convolution et TFD). Pour rappel, un vecteur $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est N périodique ($N \geq 1$) si

$$x_{k+\ell N} = x_k \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Par ailleurs, pour deux vecteurs x et y étant N périodiques on définit la convolution périodique d'ordre N de x et y par

$$(x *_N y)_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{k-\ell} y_\ell, \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Enfin pour un vecteur $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ supposé N périodique on appelle Transformée de Fourier du signal périodique à temps discret de x le vecteur noté X avec

$$(2) \quad X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-nk}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si la définition précédente n'est pas exactement la TFD on continuera tout de même (par abus de langage) à appeler X la TFD de x . Cet abus est justifié par le résultat démontré dans la première question de l'exercice.

- (1) Soit $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un vecteur N périodique. Justifier que le vecteur $X \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ obtenu via (2) est N périodique.
- (2) Soient x et $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ deux vecteurs N périodiques. Justifier que $x *_N y$ est N périodique.
- (3) Soient x et y deux vecteurs 2 périodiques avec $(x_0, x_1) = (1, 2)$ et $(y_0, y_1) = (1, -1)$.
 - (a) Déterminer le vecteur 3 périodique $x *_2 y$ par un calcul direct.
 - (b) Calculer les TFD, notées X et Y , des vecteurs x et y .
 - (c) En déduire l'expression du vecteur $x *_2 y$ en utilisant X et Y .

4. CHAPITRE 4

Exercice 1. Dire si les propriétés suivantes sont vraies partout sur \mathbb{R} ou presque partout sur \mathbb{R} .

- (1) Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont égales ... sur \mathbb{R} .
- (2) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ ne sont pas égales ... sur \mathbb{R} .
- (3) La fonction $x \mapsto 1/(1+x)^2$ est continue ... sur \mathbb{R} .
- (4) La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue ... sur \mathbb{R} .
- (5) La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable ... sur \mathbb{R} .
- (6) Soit f la fonction 2π -périodique et paire avec

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$

est continue ... sur \mathbb{R} et dérivable ... sur \mathbb{R} .

- (7) Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $f = \mathbf{1}_A$. Le nombre $f(x)$ est inférieur à 1 ... dans \mathbb{R} . Le nombre $f(x)$ est strictement inférieure à 1 ... dans \mathbb{R} .

Exercice 2.

- (1) Soit f une fonction constante sur \mathbb{R} , est-ce que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $L^1(0, +\infty)$ ou $L^1(0, 1)$?
- (2) Soit $\alpha > 1$, montrer que la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ appartient à l'espace $L^1(a, +\infty)$ pour $a > 0$. Est-ce que cette fonction appartient à $L^1(0, a)$ ($a > 0$) ?
- (3) Soit $0 < \alpha < 1$, montrer que la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ appartient à l'espace $L^1(0, b)$ pour $b > 0$. Est-ce que cette fonction appartient à $L^1(b, +\infty)$ ($b > 0$) ?
- (4) Montrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'appartient ni à $L^1(0, 1)$ ni à $L^1(1, +\infty)$.
- (5) Est-ce que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ appartient à $L^1(-1, 1)$.
- (6) Démontrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ n'appartient pas à $L^1(0, +\infty)$.
- (7) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ fermé et borné de \mathbb{R} . Montrer que $f \in L^1(a, b)$.
- (8) Soit f une fonction a -périodique non nulle et continue. Montrer que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Dans cet exercice on veut étudier la convergence ou la non convergence des séries de Riemann.

- (1) Montrer que si $\alpha > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- (2) Montrer que si $0 < \alpha \leq 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas.

Exercice 4. Dans cet exercice le but est de manipuler le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

- (1) Calculer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$.
- (2) Calculer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{(1+x^2)} dx$.
- (3) Soit $f_n(x) = \frac{1}{1+|x|^{2+1/n}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

(a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt$.

(b) Soit $g_n(t) = n f_n(nt)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a g_n(t) dt$, pour $a > 0$.

(4) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{1+x^{2n}} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/3} f_n(x) dx.$$

(5) Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

(a) Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$ et que $f_n(x) \leq e^x$ ($n \geq 1$).

(b) En déduire la limite de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-3x} dx$.

5. CHAPITRE 5

Exercice 1.(Transformée de Fourier) Justifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R})$ puis calculer leurs transformée de Fourier.

(1) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ avec a un réel strictement positif.

(2) Soit f_2 la fonction triangle définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Soit f_3 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_3(x) = H(x) e^{-ax}, \quad a > 0,$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

(4) Soit f_4 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_4(x) = H(-x) e^{ax}, \quad a > 0.$$

(5) Soit f_5 la fonction définie par

$$f_5(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x), \quad k \geq 1, a > 0.$$

(6) Soit f_6 la fonction définie par

$$f_6(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

(7) Soit f_7 la fonction définie par

$$f_7(x) = \text{sign}(x) e^{-a|x|}, \quad a > 0,$$

où sign est la fonction signe donnée par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(8) Soit f_8 la fonction sinusoidale amortie et causale définie par

$$f_8(x) = \sin(2\pi x) e^{-ax} H(x), \quad a > 0.$$

(9) Soit f_9 la fonction gaussienne définie par

$$f_9(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0.$$

Ici pour calculer \widehat{f}_9 il faut dans un premier temps établir une équation différentielle d'ordre un vérifiée par f_9 . Par ailleurs pour obtenir l'expression de \widehat{f}_9 on admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

Exercice 2.(Utilisation de l'inverse de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$) En utilisant la formule d'inversion de Fourier (en la justifiant) et l'exercice 1 calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

- (1) Soit g_1 la fonction définie par

$$g_1(x) = \frac{1}{(a + 2i\pi x)^{k+1}}, \quad a > 0, k \geq 1.$$

- (2) Soit g_2 la fonction définie par

$$g_2(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- (3) Soit g_3 la fonction définie par

$$g_3(x) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}.$$

Exercice 3.(Convolution et transformée de Fourier) Le but de cet exercice est de manipuler le produit de convolution.

- (1) Soit h_1 la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_1(t) = (\sin * \mathbf{1}_{[-a,a]})(t)$ avec $a > 0$. Justifier que h_1 est bien définie sur \mathbb{R} et calculer explicitement h_1 .
- (2) Soit $h_2 = f * g$ où f et g sont nulles respectivement hors de l'intervalle $[a, b]$ et hors de $[c, d]$. Justifier que h_2 est nulle hors de $[a + c, b + d]$. En déduire que si f et g sont causales (nulles sur \mathbb{R}_-) alors h_2 est causale.
- (3) Soit h_3 la fonction définie sur \mathbb{R} comme le produit de convolution de deux fonctions exponentielles décroissantes causales, i.e.,

$$h_3(t) = \int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-ax} H(t-x)e^{-b(t-x)} dx,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_3 est bien définie et calculer explicitement h_3 (on utilisera la question précédente).

- (4) Soit h_4 la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$h_4(t) = \frac{1}{2\pi ab} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2b^2}} dx,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_4 est bien définie et calculer explicitement h_4 (utiliser le lien entre convolution et transformée de Fourier ainsi que l'exercice 1).

Exercice 4.(Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$)

- (1) Montrer que la convolution de deux fonctions ayant la même parité est paire.
- (2) Démontrer que la transformée de Fourier et la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction paire coïncident.

- (3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} comme le produit de convolution de deux fonctions sinus cardinal, i.e.,

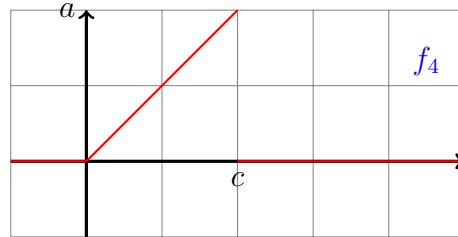
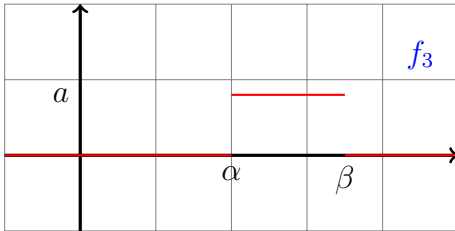
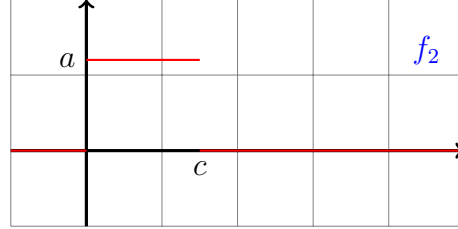
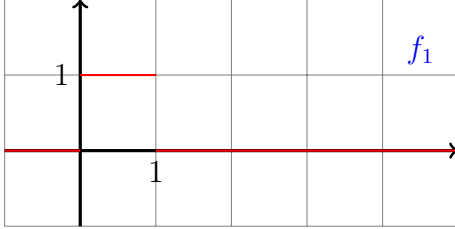
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi at)}{\pi t} \frac{\sin(\pi b(x-t))}{\pi(x-t)} dt,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que f est bien définie et calculer f explicitement en utilisant l'exercice 1 et la Proposition 25 du cours.

6. CHAPITRE 6

Exercice 1.(Transformée de Laplace)

- (1) En exprimant les différentes fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 en fonction de la fonction de Heaviside, calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :



Exercice 2.(Transformée de Laplace et EDO) Déterminer les solutions des EDO ci-dessous par la méthode de Laplace. Pour ce faire on utilisera les formules d'inversion suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+a} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at}, \\ \frac{1}{(p+a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} te^{-at}, \\ \frac{p}{p^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos(at), \\ \frac{1}{p^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a} \sin(at), \\ \frac{1}{(p+b)^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a} e^{-bt} \sin(at), \\ \frac{p+b}{(p+b)^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-bt} \cos(at). \end{aligned}$$

- (1) On considère l'équation du premier ordre :

$$x'(t) + x(t) = e^t, \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$.

(2) On considère l'équation du deuxième ordre :

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t}, \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(3) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin(t)H(t)$ puis déterminer la solution de l'équation

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \sin(t), \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(4) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto H(t)$ puis déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = 1, \quad \forall t > 0,$$

avec $x(0) = x'(0) = 0$.

(5) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \cos(t)$ puis déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \cos(t), \quad \forall t > 0,$$

avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(6) On considère le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = e^t, \\ y'(t) - x(t) + y(t) = e^t, \end{cases}$$

pour $t > 0$ et avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

(7) On considère l'équation différentielle d'ordre 3 linéaire suivante :

$$x^{(3)}(t) + x(t) = 0, \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$ et $x''(0) = 8$.