TD MT12

ANTOINE ZUREK

Table des matières

1. Chapitre 1

Exercice 1.

(1) En utilisant des IPP calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{\pi} x\,\cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 x\,\arctan(x)\,dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$$

(2) En utilisant un changement de variable calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$$

Exercice 2. Soit f une fonction continue. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale de f sur l'intervalle $[0,a]$ (avec $a>0$). Pour ce faire on utilise dans un premier temps la méthode des rectangles à gauche puis la méthode des trapèzes. Dans les deux cas, on considère un entier naturel $N \geq 1$ et une suite équi-répartie de points $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = a$ avec $x_k = ka/N$ pour $k = 0, \ldots, N$. Alors la méthode des rectangles à gauche donne la formule suivante d'approximation

$$I = \int_0^a f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = I_{N,\text{rectangle}},$$

et la méthode des trapèzes

$$I \approx \frac{a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = I_{N,\text{trapeze}}.$$

Date: 12 mars 2025.

(1) Commençons par étudier la méthode des rectangles à gauche.

  (a) Représenter géométriquement la méthode des rectangles à gauche.

  (b) Si f est C^1 monter l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_{N,\text{rectangle}}| \leq \frac{a^2}{2N} \max_{x\in[0,a]} |f'(x)|.$$

  Pour rappel, comme f est supposée C^1 alors f' est continue sur l'intervalle $[0,a]$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires alors f' est une fonction bornée et atteint ses bornes (autrement dit le max de l'inégalité précédente est bien défini).

(2) Etudions à présent la méthode des trapèzes.

  (a) Représenter géométriquement la méthode des trapèzes.

  (b) Montrer que si f est C^2 alors la formule, dite de Maclaurin, suivante

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2}\,(f(x_{k+1}) + f(x_k)) + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1})\,f''(x)\,dx,$$

  est vérifiée pour tout $k \in \{0,\dots,N-1\}$ (indication : IPP).

  (c) en déduire que si f est C^2 alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_{N,\text{trapeze}}| \leq \frac{a^3}{12N^2} \max_{x\in[0,a]} |f''(x)|.$$

  Même rappel que pour la question (1)(b) sur le max de f''.

Exercice 3. Dans cet exercice on considère plusieurs normes et ps.

(1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

  (a) Montrer que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

  est une norme. Pour $n = 2$, représenter l'ensemble des points $x \in E$ vérifiant $\|x\|_1 = 1$.

  (b) Montrer que

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

  est une norme. Toujours dans le cas $n = 2$, représenter l'ensemble des points $x \in E$ vérifiant $\|x\|_\infty = 1$.

(2) On considère à présent $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $E \times E \to \mathbb{R}$ où

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)\,Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}, \quad \forall P, Q \in E.$$

(a) Montrer que l'application est un produit scalaire sur E.

(b) Donner la définition de la norme associée à ce produit scalaire.

Exercice 4. Dans cet exercice on (re)travaille la notion d'orthogonalité dans un espace euclidien.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) quelconque. On considère l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel (ou canonique) et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale. Montrer que
$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2.$$
Ce résultat vous fait-il penser à un théorème célèbre ?

(2) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) avec
$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, X, \quad P_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3X^2 - 1),$$
est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx, \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X].$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de démontrer (partiellement) le théorème dit de Fréchet-Von Neumann-Jordan. Voici son énoncé :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'une norme N. La norme N découle d'un produit scalaire si et seulement si N vérifie
$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2, \quad \forall x, y \in E. \tag{1}$$
L'identité (1) est appelée identité du parallélogramme.

(1) Démontrer dans un premier temps que si pour tout $x \in E$ on a $N(x)^2 = \langle x, x\rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors N vérifie (1).

(2) On veut à présent démontrer l'implication inverse, i.e., que si N vérifie (1) alors N découle d'un produit scalaire. Pour ce faire on considère l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ avec
$$\varphi(x, y) = \frac{N(x+y)^2 - N(x-y)^2}{4}, \quad \forall x, y \in E.$$
Dans la suite on **admet** que φ vérifie
$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E.$$

(a) Montrer que $\varphi(x, x) = N(x)^2$ (ainsi si φ est un produit scalaire sur E on a bien $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$). Il reste à montrer que φ est un produit scalaire.

(b) Montrer que φ est définie positive, i.e., $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$.

(c) Montrer que φ est symétrique, i.e., $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$.

(d) Pour montrer la bilinéarité de φ, on **admet** que N vérifie pour tout x, y et $z \in E$ l'identité suivante

$$N(x+y+z)^2 = N(x+y)^2 + N(x+z)^2 + N(y+z)^2 - N(x)^2 - N(y)^2 - N(z)^2.$$

En déduire que $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$ pour tout x, y, $z \in E$ et que φ est bilinéaire.

(e) En déduire que φ est un produit scalaire sur E.

(3) Est-ce que la norme $\|\cdot\|_1$ (ou $\|\cdot\|_\infty$) découle d'un produit scalaire ?

2. Chapitre 2

Exercice 1.

(1) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. On note f_N (pour $N \geq 1$) la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f, i.e.,

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \exp\left(2i\pi n \frac{t}{a}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Monter que f_N peut également s'écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sous la forme

$$f_N(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f)\ \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) + b_n(f)\ \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right)\right),$$

avec

$$\begin{aligned} a_0(f) &= 2c_0(f) = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\,dt, \\ a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\ \cos\left(2\pi n\frac{t}{a}\right)\ dt, \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\ \sin\left(2\pi n\frac{t}{a}\right)\ dt. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, montrer également les formules :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \\ c_{-n}(f) &= \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}. \end{aligned}$$

(2) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. Montrer que

$$\int_\alpha^{a+\alpha} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(3) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. Montrer que
— si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$,
— si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

(1) Calculer les sommes partielles d'ordre $N \geq 1$, notées f_N, des séries de Fourier des fonctions suivantes :
   (a) f est 2-périodique avec $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$,
   (b) f est 1-périodique avec $f(t) = t$ si $t \in [0, 1[$,
   (c) f est 2π-périodique avec $f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ si $t \in [-\pi, \pi]$,
   (d) $f(t) = |\sin(t)|$ (période de f ?),

(e) $f(t) = \sin^3(t)$ (période de f ?).

(2) Appliquer l'égalité de Parseval aux différentes fonctions f de la question précédente. En utilisant les fonctions des questions (1)(b) et (1)(c), en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3.

(1) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et soit g la fonction a-périodique avec $g(t) = f(t - \alpha)$. Quelle relation existe entre $c_n(g)$ et $c_n(f)$?

(2) Soit f une fonction a-périodique de classe C^1. Monter que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{a} c_n(f).$$

En déduire l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

On suppose à présent f de classe C^2. Monter l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la série $\sum |c_n(f)|$ si f est C^2 ?

Exercice 4. On considère les fonctions de l'exercice 2 question (1). Les séries de Fourier de ces fonctions convergent elles simplement vers f sur $\mathbb{R}$? Si oui pourquoi ? Si ce n'est pas le cas préciser vers quelle valeur tend $(f_N(x))_{N\geq 1}$. Enfin quelles séries de Fourier convergent normalement vers la fonction initiale sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 (Exercice de synthèse 1). Soit f la fonction 2-périodique avec

$$f(x) = x(1-x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

que l'on prolonge par imparité sur $[-1, 0]$.

(1) Représenter le graphe de f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(3) Est-ce que la suite des sommes partielles des séries de Fourier de f, notée $(f_N)_{N\geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers f sur $\mathbb{R}$.

(4) Justifier la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(5) Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Exercice de synthèse 2). Soit f la fonction 2π-périodique et impaire avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \pi. \end{cases}$$

(1) Représenter le graphe de f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(3) Est-ce que la suite des sommes partielles des séries de Fourier de f, notée $(f_N)_{N\geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers f sur $\mathbb{R}$.

(4) Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. Développer en séries de Fourier la fonction f de période 2, définie sur $[-1, 1[$ par

$$f(t) = \cos(\pi z t) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

En déduire les égalités :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 8. Soient x un paramètre réel strictement positif donné et f une fonction périodique définie par

$$f(t) = e^{xe^{it}}.$$

(1) Période de f ? En admettant que $c_0(f) = 1$, montrer que

$$c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \dfrac{x^n}{n!} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

(2) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\cos(t)}\, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Exercice 9 (Développement en série de cosinus et sinus). Soit f la définie sur $]0, 1[$ par

$$f(x) = x \quad \forall x \in]0, 1[.$$

(1) Prolongez la fonction f sur $]-1,1[$ par imparité, puis prolongez f sur $\mathbb{R}$ par 2 périodicité. On note f_1 la prolongation de f sur $\mathbb{R}$. Représentez le graphe de f_1. Développer en séries de Fourier f_1

(2) Comparez les résultats obtenus avec les résultats obtenus pour les fonctions (a) et (b) de l'exercice 2. Que constatez-vous ?

3. Chapitre 3

Exercice 1 (TFD).

(1) Soit le vecteur x avec $x = (1, 2, 4, 3)^\top$. Calculer la TFD du vecteur x.
(2) Soit le vecteur y avec $y = (10, (-3 - i), 0, (-3 + i))^\top$. Calculer et commenter la TFD du vecteur y.
(3) Soit le vecteur $x \in \mathbb{C}^{10}$ dont les 5 premiers coefficients valent 1 et les 5 autres 0. Calculer la TFD de x.

Exercice 2 (TFD et TFDI). On considère le vecteur x de taille $N \geq 1$ avec

$$x_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

(1) Calculer la TFD, le vecteur noté X, de x.
(2) Calculer la TFDI de X.

Exercice 3 (Égalité de Plancherel discrète)

(1) Montrer que l'application suivante définie un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^N$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n} \quad \text{pour} \quad x = (x_0, \cdots, x_{N-1})^\top, y = (y_0, \cdots, y_{N-1})^\top \in \mathbb{C}^N.$$

(2) Soient X et $Y \in \mathbb{C}^N$ les vecteurs obtenus à partir de deux vecteurs x et $y \in \mathbb{C}^N$ par DFT. Justifier la relation suivante

$$\frac{1}{N} \langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Exercice 4 (vecteurs périodiques, convolution et TFD). Pour rappel, un vecteur $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est N périodique ($N \geq 1$) si

$$x_{k+\ell N} = x_k \quad \forall \ell \in \mathbb{Z},\, k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Par ailleurs, pour deux vecteurs x et y étant N périodiques on définit la convolution périodique d'ordre N de x et y par

$$(x *_N y)_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{k-\ell}\, y_\ell, \quad \forall k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Enfin pour un vecteur $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ supposé N périodique on appelle Transformée de Fourier du signal périodique à temps discret de x le vecteur noté X avec

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \omega_N^{-nk}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Si la définition précédente n'est pas exactement la TFD on continuera tout de même (par abus de langage) à appeler X la TFD de x. Cet abus est justifié par le résultat démontré dans la première question de l'exercice.

(1) Soit $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un vecteur N périodique. Justifier que le vecteur $X \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ obtenu via (2) est N périodique.

(2) Soient x et $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ deux vecteurs N périodiques. Justifier que $x *_N y$ est N périodique.

(3) Soient x et y deux vecteurs 2 périodiques avec $(x_0, x_1) = (1, 2)$ et $(y_0, y_1) = (1, -1)$.
   (a) Déterminer le vecteur 2 périodique $x *_2 y$ par un calcul direct.
   (b) Calculer les TFD, notées X et Y, des vecteurs x et y.
   (c) En déduire l'expression du vecteur $x *_2 y$ en utilisant X et Y.

4. Chapitre 4

Exercice 1. Dire si les propriétés suivantes sont vraies partout sur $\mathbb{R}$ ou presque partout sur $\mathbb{R}$.

(1) Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont égales ... sur $\mathbb{R}$.
(2) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ ne sont pas égales ... sur $\mathbb{R}$.
(3) La fonction $x \mapsto 1/(1+x)^2$ est continue ... sur $\mathbb{R}$.
(4) La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue ... sur $\mathbb{R}$.
(5) La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable ... sur $\mathbb{R}$.
(6) Soit f la fonction 2π-périodique et paire avec
$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$
est continue ... sur $\mathbb{R}$ et dérivable ... sur $\mathbb{R}$.
(7) Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $f = \mathbf{1}_A$. La quantité $f(x)$ est plus petite ou égale à 1 ... dans $\mathbb{R}$. La quantité $f(x)$ est strictement plus petite que 1 ... dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

(1) Soit f une fonction constante sur $\mathbb{R}$, est-ce que $f \in L^1(\mathbb{R})$, $L^1(0, +\infty)$ ou $L^1(0, 1)$?
(2) Soit $\alpha > 1$, montrer que la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ appartient à l'espace $L^1(a, +\infty)$ pour $a > 0$. Est-ce que cette fonction appartient à $L^1(0, a)$ $(a > 0)$?
(3) Soit $0 < \alpha < 1$, montrer que la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ appartient à l'espace $L^1(0, b)$ pour $b > 0$. Est-ce que cette fonction appartient à $L^1(b, +\infty)$ $(b > 0)$?
(4) Montrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'appartient ni à $L^1(0, 1)$ ni à $L^1(1, +\infty)$.
(5) Est-ce que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ appartient à $L^1(-1, 1)$.
(6) Démonter que la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ n'appartient pas à $L^1(0, +\infty)$.
(7) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ fermé et borné de $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in L^1(a, b)$.
(8) Soit f une fonction a-périodique non nulle et continue. Monter que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Dans cet exercice on veut étudier la convergence ou la non convergence des séries de Riemann.

(1) Montrer que si $\alpha > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
(2) Montrer que si $0 < \alpha \leq 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas.

Exercice 4. Dans cet exercice le but est de manipuler le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(1) Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\, dx$.
(2) Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{(1+x^2)}\, dx$.
(3) Soit $f_n(x) = \frac{1}{1+|x|^{2+1/n}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

(a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, dt$.

(b) Soit $g_n(t) = n f_n(nt)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{-a}^{a} g_n(t)\, dt$, pour $a > 0$.

(4) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{1+x^{2n}} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/3} f_n(x)\, dx.$$

(5) Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

(a) Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$ et que $f_n(x) \leq e^x$ $(n \geq 1)$.

(b) En déduire la limite de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-3x}\, dx$.

5. Chapitre 5

Exercice 1.(Transformée de Fourier) Justifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R})$ puis calculer leurs transformée de Fourier.

(1) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ avec a un réel strictement positif.

(2) Soit f_2 la fonction triangle définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Soit f_3 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_3(x) = H(x)\, e^{-ax}, \quad a > 0,$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

(4) Soit f_4 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_4(x) = H(-x)\, e^{ax}, \quad a > 0.$$

(5) Soit f_5 la fonction définie par

$$f_5(x) = \frac{x^k}{k!}\, e^{-ax}\, H(x), \quad k \geq 1,\, a > 0.$$

(6) Soit f_6 la fonction définie par

$$f_6(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

(7) Soit f_7 la fonction définie par

$$f_7(x) = \operatorname{sign}(x) e^{-a|x|}, \quad a > 0,$$

où sign est la fonction signe donnée par

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(8) Soit f_8 la fonction sinusoïdale amortie et causale définie par

$$f_8(x) = \sin(2\pi x)\, e^{-ax} H(x), \quad a > 0.$$

(9) Soit f_9 la fonction gaussienne définie par

$$f_9(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0.$$

Ici pour calculer $\widehat{f_9}$ il faut dans un premier temps établir une équation différentielle d'ordre un vérifiée par f_9. Par ailleurs pour obtenir l'expression de $\widehat{f_9}$ on admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

Exercice 2.(Utilisation de l'inverse de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$) En utilisant la formule d'inversion de Fourier (en la justifiant) et l'exercice 1 calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

(1) Soit g_1 la fonction définie par

$$g_1(x) = \frac{1}{(a+2i\pi x)^{k+1}}, \quad a > 0,\ k \geq 1.$$

(2) Soit g_2 la fonction définie par

$$g_2(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(3) Soit g_3 la fonction définie par

$$g_3(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}.$$

Exercice 3.(Convolution et transformée de Fourier) Le but de cet exercice est de manipuler le produit de convolution.

(1) Soit h_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_1(t) = (\sin * \mathbf{1}_{[-a,a]})(t)$ avec $a > 0$. Justifier que h_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ est calculer explicitement h_1.

(2) Soit $h_2 = f * g$ où f et g sont nulles respectivement hors de l'intervalle $[a,b]$ et hors de $[c,d]$. Justifier que h_2 est nulle hors de $[a+c, b+d]$. En déduire que si f et g sont causales (nulles sur $\mathbb{R}_-$) alors h_2 est causale.

(3) Soit h_3 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme le produit de convolution de deux fonctions exponentielles décroissantes causales, i.e.,

$$h_3(t) = \int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-ax}\, H(t-x)e^{-b(t-x)}\, dx,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_3 est bien définie et calculer explicitement h_3 (on utilisera la question précédente).

(4) Soit h_4 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_4(t) = \frac{1}{2\pi\, ab} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2b^2}}\, dx,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_4 est bien définie et calculer explicitement h_4 (utiliser le lien entre convolution et transformée de Fourier ainsi que l'exercice 1).

Exercice 4.(Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$)

(1) Montrer que la convolution de deux fonctions ayant la même parité est paire.

(2) Démontrer que la transformée de Fourier et la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction paire coïncident.

(3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme le produit de convolution de deux fonctions sinus cardinal, i.e.,

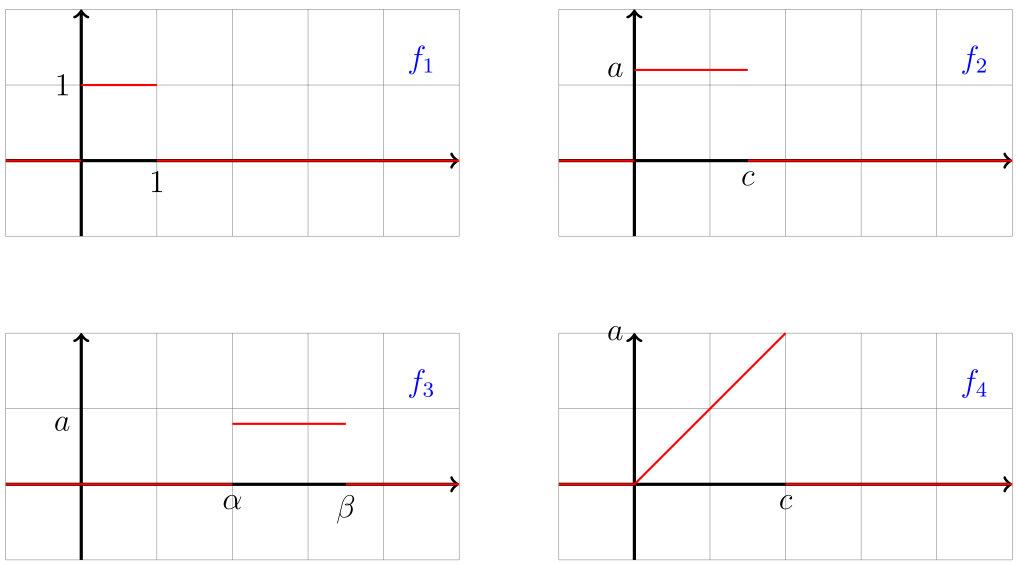
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi a t)}{\pi t} \frac{\sin(\pi b(x-t))}{\pi(x-t)} \, dt,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que f est bien définie et calculer f explicitement en utilisant l'exercice 1 et la Proposition 25 du cours.

6. Chapitre 6

Exercice 1.(Transformée de Laplace)

(1) En exprimant les différentes fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 en fonction de la fonction de Heaviside, calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :



Exercice 2.(Transformée de Laplace et EDO) Déterminer les solutions des EDO ci-dessous par la méthode de Laplace. Pour ce faire on utilisera les formules d'inversion suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p+a} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at},\\
\frac{1}{(p+a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} te^{-at},\\
\frac{p}{p^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos(at),\\
\frac{1}{p^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a}\sin(at),\\
\frac{1}{(p+b)^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a}e^{-bt}\sin(at),\\
\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-bt}\cos(at).
\end{aligned}$$

(1) On considère l'équation du premier ordre :

$$x'(t)+x(t)=e^t, \quad t>0,$$

avec $x(0)=1$.

(2) On considère l'équation du deuxième ordre :

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t}, \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(3) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin(t)H(t)$ puis déterminer la solution de l'équation

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \sin(t), \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(4) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto H(t)$ puis déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = 1, \quad \forall t > 0,$$

avec $x(0) = x'(0) = 0$.

(5) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \cos(t)$ puis déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \cos(t), \quad \forall t > 0,$$

avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(6) On considère le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) &= e^t, \\ y'(t) - x(t) + y(t) &= e^t, \end{cases}$$

pour $t > 0$ et avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

(7) On considère l'équation différentielle d'ordre 3 linéaire suivante :

$$x^{(3)}(t) + x(t) = 0, \quad t > 0,$$

avec $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$ et $x''(0) = 8$.

Université de Technologie de Compiègne, LMAC, 60200 Compiègne, France
Email address: antoine.zurek@utc.fr