MT09-A2022 – Examen final – Questions de cours

Durée : **30 mn**. *Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé*

NOM PRÉNOM :	Place n° :

ATTENTION, il y a 2 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2,5 points)*

On considère $x, y \in \mathbb{R}^4$ donnés par : $x = [-2, 0, 1, 2]$ et $y = [4, 0, 0, 4]$. On note $P(X)$ le polynôme d'interpolation aux points (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 4$.

1. Soit le polynôme $Q(X) = X^4 - \frac{2}{3}X^3 - 3X^2 + \frac{8}{3}X$, qui vérifie $Q(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
   A-t-on $P = Q$? Justifier.
2. Justifier que $P(X) = (aX + b)X(X - 1)$. Calculer a et b.
3. Retrouver le résultat à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange.
4. Reconstruire $P(X)$ à l'aide des polynômes d'interpolation de Newton.

Exercice 2 *(barème approximatif : 3,5 points)*

On veut résoudre le problème $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ par une méthode de point fixe.

1. Donner les solutions $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ (on choisit $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$). Aucun calcul n'est nécessaire.
2. Expliquer pourquoi la fonction $g_1(x) = x^2 - 2$ ne peut pas être utilisée.
3. On prend $g_2(x) = \sqrt{2 + x}$.
   (a) Si la méthode du point fixe converge, vers quelle valeur convergera-t-elle?
   (b) En choisissant un intervalle adapté de $\mathbb{R}$, montrer que la méthode du point fixe converge.
4. (a) Expliciter la méthode de Newton pour ce problème.
   (b) On appelle g_3 la fonction de point fixe dans ce cas. Que valent $g_3'(\hat{x}_1)$ et $g_3'(\hat{x}_2)$? Quel est l'ordre de la méthode de Newton?

MT09-A2022- Examen final
Durée : **1h30**.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *6 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 10 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

La question `Scilab` 4a) ne dépend que de la question (3b).

Soient A la matrice et b le vecteur définis par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de résoudre les équations normales $A^TAx = A^Tb$. On a recours à la factorisation $A = QR$.

1. Spécifier les propriétés des matrices Q et R.

2. Les matrices de la factorisation sont données par

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/(2\sqrt{3}) & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/(2\sqrt{3}) & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/(2\sqrt{3}) & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer A^TA. En donner la factorisation de Cholesky (réponse courte attendue).
   (b) Transformer les équations normales en un système triangulaire, à préciser, à l'aide de la factorisation QR.
   (c) Donner la valeur minimale de la fonction des moindres carrées $E(y) = \|Ay - b\|_2^2$.
   (d) Donner la solution $\hat{x}$ des équations normales. Calculer $E(\hat{x})$. Comparer avec (2c).

3. **Factorisation par la méthode de Givens**
   Une matrice $G \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation si

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } c^2 + s^2 = 1.$$

   (a) Montrer que G est une matrice orthogonale.
   En déduire que G conserve la norme 2 : $\|Gx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^2$.
   (b) On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ avec $\xi_2 \neq 0$. On pose $\hat{\xi} = (\|\xi\|_2)^{-1}\xi$; $\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice G telle que

$$G\hat{\xi} = e_1.$$

   En déduire que $G\xi = \|\xi\|_2 e_1$. Calculer G pour $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (c) On pose

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix}.$$

   Est-elle une matrice orthogonale? Symétrique?
   (On appelle ce type de matrice une matrice de rotation de Givens.)

(d) Calculer le produit $G_1 A$ et vérifier qu'il possède la forme suivante

$$G_1 A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \times & \times \\ 0 & \alpha & \times \\ 0 & \beta & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

(e) Reprendre la fin de la question (3b) avec $\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. En déduire l'existence d'une matrice de rotation de Givens

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad c^2 + s^2 = 1,$$

telle que (calculer tous les coefficients)

$$G_2(G_1 A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

(f) Donner la forme de G_3. Quelle sera son action sur la dernière colonne de $G_2(G_1 A)$?

(g) Calculer G_3 et achever la dernière étape de l'algorithme de Givens pour obtenir la décomposition $(G_3 G_2 G_1)A = R$.

(h) Exprimer Q en fonction G_1, G_2 et G_3.

(i) Calculer $G_3(G_2(G_1 b))$. Comparer avec (2b).

4. **Questions `Scilab` :**

(a) Écrire une fonction `Scilab`
`[G, c] = transGivens(xi)`
qui, étant donné un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^2$, calcule la matrice de rotation G et le vecteur $c = G\xi$.
On traitera le cas $\xi_2 = 0$ (expliquer).

(b) Écrire une fonction `Scilab`
`[Q, R] = QRGivens(A)`
qui, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $(m \geq n+1)$ qui a la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n+1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j+2,$$

(A est nulle à partir de la seconde sous-diagonale), calcule la factorisation QR de A en utilisant les transformations de Givens.

Exercice 2 *(barème approximatif : 7 points)*
CHANGEZ DE COPIE

Soit un entier $p \geq 1$. Soit f une fonction de classe C^1 : $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$. On considère l'équation différentielle :

$$\text{trouver } y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^p), \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Soient deux réels t_0 et $T > 0$ et un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, \ldots, N$. On étudie le schéma

$$z_{n+1} = z_n + h\left(\frac{2}{3}f(t_n, z_n) + \frac{1}{3}f(t_{n+1}, z_{n+1})\right), \ n \geq 0, \quad \text{et} \quad z_0 = y_0. \tag{2}$$

1. On prend $p = 1$ et $f(\theta, x) = -\lambda x$.
   Étudier la stabilité absolue du schéma (2).

   Comparer avec la stabilité absolue des schémas d'Euler explicite et implicite.

2. On prend $p = 1$, f quelconque et on suppose y aussi régulière qu'on veut.
   Étudier l'ordre de consistance du schéma (2).

3. On prend $p \geq 1$ et f lipschitzienne par rapport à sa seconde variable :

   $$\exists L > 0, \text{ telle que } \forall \theta \in [t_0, t_0 + T], \forall x, y \in \mathbb{R}^p, \quad \|f(\theta, x) - f(\theta, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

   (a) Écrire le problème de point fixe à résoudre à chaque pas de temps.

   (b) Donner une condition sur h en fonction de L pour que ce problème admette une unique solution.

4. On étudie le problème

   $$\begin{cases} u'''(t) = tu^2(t) - 2u'(t) + u''(t)u(t) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ u(t_0) = a, \ u'(t_0) = b, \ u''(t_0) = c. \end{cases} \tag{3}$$

   Mettre cette équation différentielle sous forme normale (1), en explicitant complètement dans ce cas la fonction f, la valeur de p et la condition initiale y_0.

5. **Questions `Scilab` :**

   (a) Écrire la fonction `Scilab`
   `[Y] = myfun(theta, X)`
   utilisée pour résoudre le problème (3) avec le schéma (2).

   (b) Écrire la fonction `Scilab`
   `[Z] = myscheme(y0, t0, T, N, f)`
   implémentant le schéma (2), en utilisant la méthode du point fixe pour résoudre le problème non-linéaire.

   Le point fixe pourra être programmé directement dans `myscheme` comme une boucle à chaque pas de temps.

   (c) Écrire **l'appel de la fonction** `myscheme` pour résoudre (3) avec $a = 1, b = 0, c = -2$, $t0 = 0$, $N = 100$, puis la **commande traçant** dans le plan (u, u'') (où u est la solution et u'' est sa dérivée seconde) la courbe représentative de la solution approchée obtenue.