MT09-A2023 – Examen médian – Questions de cours
Durée : 15 à 20 minutes. Sans documents ni outils électroniques.
Rédiger sur l'énoncé.

NOM PRÉNOM :	Place n°:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A admet une décomposition de Cholesky, alors A est symétrique définie positive.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A la matrice définie par $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & \alpha \end{bmatrix}$. Faites le calcul de la décomposition de Cholesky de A. En déduire une condition suffisante sur α pour que A soit symétrique définie positive.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1,5 points)*

On se place sur l'espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n > 1$.

1. Donner la définition d'une norme $|||\cdot|||$, subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$.
2. Prouver l'inégalité $|||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||$ pour A et B dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, à partir de la définition de $|||\cdot|||$.
3. Donner l'expression des normes $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$ et $|||\cdot|||_\infty$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soit un entier $n \geq 1$. Soit C une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, et d un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $|||C||| < 1$ pour une certaine norme subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. On suppose qu'il existe $x^\star$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $x^\star = Cx^\star + d$.

1. Calculer le noyau de $I - C$.
2. Soit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, et

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad \forall k \geq 0.$$

Montrer que la suite converge vers $x^\star$. (On pourra étudier la quantité $\|x^{(k)} - x^\star\|$).

MT09-A2023 - Examen médian
Durée : 1 heure 10 min.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 9 points)*

Soit A une matrice symétrique définie positive appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$.
On va étudier la suite des vecteurs $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{aligned} & x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n, \\ & \forall k \geq 0 \left\{ \; x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|_2}. \right. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Soit z un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle.
   On pose $y = \dfrac{z}{\|z\|}$. Calculer $\dfrac{Ay}{\|Ay\|}$.
2. On rappelle qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres, qu'on nommera $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$: chaque Y_i est un vecteur propre dans $\mathbb{R}^n$ associé à une valeur propre λ_i de A.
   Donner les propriétés des Y_i pour $i = 1, \ldots, n$.
3. Montrer que toutes les valeurs propres λ_i de A, pour $i = 1, \ldots, n$ sont > 0.
4. Dorénavant, on ordonne les Y_i de telle façon que $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. On notera bien qu'on a supposé $\lambda_1 > \lambda_2$. On écrit $x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j Y_j$ et on supposera que $\xi_1 \neq 0$.
   (a) Calculer $\|x^{(0)}\|_2^2$ et montrer que $x^{(0)}$ est non nul.
   (b) Pour tout $k \geq 1$, calculer $A^k x^{(0)}$ dans la base $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$. On écrira $A^k x^{(0)}$ sous la forme $A^k x^{(0)} = \lambda_1^k w^{(k)}$, en précisant bien ce que vaut $w^{(k)}$.
   (c) Montrer que $w^{(k)}$ et $A^k x^{(0)}$ sont non nuls pour tout k.
   (d) Déduire des questions précédentes l'expression de $x^{(k)}$ en fonction de $A^k x^{(0)}$.
   (On pourra calculer $x^{(1)}$ et faire une récurrence.)
5. Déterminer les limites de $w^{(k)}$, de $\|w^{(k)}\|_2$ et de $x^{(k)}$, quand k tend vers l'infini. Bien justifier.
6. (a) Calculer $(w^{(k)})^\top A w^{(k)}$.
   (b) En déduire la limite de $(x^{(k)})^\top A x^{(k)}$, quand k tend vers l'infini.
   (c) Conclure : que permet de calculer la méthode (1)?

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* points

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. On suppose que A^T (la **transposée** de A) est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$|\,a_{kk}\,| > \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |\,a_{ik}\,|.$$

1. Montrer que le noyau de A^T est réduit à $\{0\}$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
3. Conclure sur la faisabilité de la factorisation $A = LU$ sans permutation. Bien justifier.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 3 points)*

Soit T une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{R})$ et H un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2n}$ ($n \geq 1$). On cherche V, vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $TV = H$.

On décompose T, H et V en blocs de la façon suivante :

$$T = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

où $M, N \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, 0 matrice nulle $\in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, E, F, X, Y vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$.

On démontre, et nous l'admettrons, que

$$TV = H \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} MX + NY = E \\ MY = F \end{array} \right. . \tag{2}$$

On suppose que l'on dispose des fonctions Scilab suivantes :

- `function [L, U] = LU(A)`

  Étant donnée la matrice A, cette fonction calcule sa factorisation LU : $A = LU$.

- `function [x] = resolLU(A, b)`

  Étant donnés la matrice A et le vecteur b, cette fonction calcule la factorisation LU de A puis résout $Ax = b$.

- `function [B] = inverse(A)`

  Étant donnée la matrice A, cette fonction calcule l'inverse $B = A^{-1}$ de A.

- `function [x] = solinf (L,b)`

  Étant donnés la matrice triangulaire inférieure L et le vecteur colonne b, cette fonction résout $Lx = b$.

- `function [x] = solsup (U,b)`

  Étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, cette fonction résout $Ux = b$.

1. Écrire une fonction Scilab

   - `function [V] = resol(M, N, H)` qui étant donnés les matrices M et N et le vecteur H, calcule le vecteur V tel que $TV = H$, en utilisant la relation (2).

   On sera attentif à faire le moins d'opérations possibles.

2. Donner le nombre de multiplications nécessaires pour la résolution de ce système en utilisant votre fonction `resol`.

   Quel serait le nombre de multiplications nécessaires pour résoudre directement $TV = H$? Expliquer.

   On demande le coût asymptotique, quand n tend vers l'infini.