SY01 / A21 - FINAL

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(8 points)*

Pour tout nombre réel $b > 0$, on définit l'application f_b sur $\mathbb{R}$ par

$$f_b(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2bte^{-bt^2}, & t \geq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, l'application f_b est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f_b pour densité. Pour la suite, cette f.d.r sera notée F_b.

3. Si u est une réalisation d'une v.a. uniforme sur $[0, 1]$, donner une réalisation de X en fonction de u.

4. Pour $b = 1/2$, calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}\text{ar}(X)$.

5. Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, avec $b > 0$.

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. indépendantes, où X_n suit la loi de f.d.r. F_{b_n}.

On définit $(Y_n)_{n\geq 1}$, une suite de v.a. réelles telles que pour tout $n \geq 1$, $Y_n := X_n^2$.

(a) Déterminer la f.d.r. de Y_n, que l'on notera F_{Y_n}. S'agit-il d'une loi connue ?

(b) Trouver la limite de $F_{Y_n}(x)$ quand $n \to +\infty$, elle sera notée $G(x)$.

(c) La fonction G vérifie-t-elle les propritétés d'une fonction de répartition ?

(d) En déduire la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vers une v.a. Y dont on précisera la loi.

Exercice II *(6 points)*

On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est sans mémoire si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t)\mathbb{P}(T > s)$$

1. Vérifier qu'une v.a. T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une v.a. sans mémoire.

2. Soient T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, calculer la loi de $T_1 + T_2$ en utilisant le produit de convolution.

3. Si Z est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramétre λt, montrer que $P(Z < 2) = P(T_1 + T_2 > t)$.

4. Soient $n \geq 1$ et $T_1, \ldots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

   (a) On pose $U_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$. Déterminer la loi de U_n. S'agit-il d'une loi connue ? *Indication : calculer d'abord "*$1-$ *la fonction de répartition".*

   (b) On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. Étudier la limite de la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ quand $n \to +\infty$ en précisant le mode de convergence et le résultat utilisé.

5. Problème: Un ingénieur en informatique doit estimer le temps pour la réalisation d'un projet qui contient 100 fonctions. Le temps de codage (en jours) de chaque fonction est aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. L'ingénieur code les fonctions de manière indépendante, l'une après l'autre.
N.B. Ici le temps est continu : un temps de 1.2 *jours correspond à* 1 *jour et* 0.2 *du jour suivant.*

   (a) Quelle est le temps moyen pour la réalisation de ce projet ? Quelle est la loi exacte de la durée totale du projet ?

   (b) L'ingénieur doit donner à son client un nombre de jours n ($n \in \mathbb{N}$) pour la réalisation du projet, de telle sorte que la probabilité de ne pas avoir terminé après n jours soit inférieure à 2.5%. Déterminer une valeur approchée de ce nombre n en utilisant une approximation de la loi du temps de réalisation du projet. Justifier.
   Indication : $\phi(1.96) \sim 0.975$*, où* ϕ *est la f.d.r. de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice III *(6 points)*

Soit (X, Y) un couple aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ admettant une densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer C. S'agit-il d'une loi connue ?

2. Calculer les densités marginales de X et de Y. Sont X et Y indépendantes?

3. Déterminer sans calcul (en justifiant soigneusement) $\mathbb{P}(X + Y \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{V}\text{ar}\,(X|Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2|Y]$.

5. Soient (R, Θ) tels que $R \geq 0$, $\Theta \in [0, 2\pi[$ et $X = R\sin(\Theta)$, $Y = R\cos(\Theta)$. Calculer la densité du couple (R, Θ) et montrer que R et Θ sont indépendantes.