
SY01 / A21 - TEST

(Durée : 45min - fiche recto-verso A4 autorisée)
Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I (8 points)

Soit une pièce de monnaie telle qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir *pile* est égale à p . On réalise une suite de parties de *pile* ou *face* indépendantes jusqu'à la première apparition d'un *pile* suivi d'un *face*, ou d'un *face* suivi d'un *pile*.

1. Décrire un ensemble fondamental associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité que le nombre total de lancers soit égal à n , pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
3. Calculer la probabilité que le nombre de lancers soit pair.

Ensuite on réalise une deuxième expérience aléatoire où l'on lance la même pièce jusqu'à la première apparition de *pile* deux fois consécutives.

4. Calculer la probabilité de devoir lancer la pièce 4 fois.

Exercice II (6 points)

Les résultats d'un test de détection d'une maladie doivent être interprétés en prenant en compte ses performances. Notons I^+ (resp. I^-) le fait qu'un individu soit infecté (resp. non infecté), et T^+ (resp. T^-) le fait qu'un individu soit positif au test (resp. négatif). Les performances intrinsèques du test sont

- La **sensibilité** $S_e = \mathbb{P}(T^+ | I^+)$: la probabilité que le test soit positif sachant que la personne testée est infectée ;
- La **spécificité** $S_p = \mathbb{P}(T^- | I^-)$: la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne testée n'est pas infectée.

1. La **valeur prédictive positive** (VPP) d'un test est la probabilité qu'un individu choisit au hasard dans la population soit vraiment infecté sachant son test est positif. Calculer la VPP d'un test pour une population avec une proportion d'individus infectés égale à r , en fonction de S_e, S_p et r .
2. Une étude réalisée dans la ville A montrait que seulement **2%** de la population était infecté. Pour un test avec une **sensibilité de 98%** et une **spécificité de 98%**, calculer la probabilité qu'un individu choisit au hasard dans la ville A soit vraiment infecté lorsque il reçoit un résultat positif de ce test. Ce test remplit-il son rôle dans cette situation dans la ville A ?

Exercice III (6 points)

1. On considère toutes les permutations des 26 lettres de l'alphabet. Si l'on choisit une de ces permutations au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ne contienne aucun des trois mots suivants : *fish, rat, bird*.