
SY01 / A22 - TEST

(Durée : 45min - fiche recto-verso A4 autorisée)
Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I (5 points)

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soient A, B, C trois événements de \mathcal{F} . On suppose que chacun d'eux est non négligeable et non certain.

1. Montrer que si A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cap \overline{C}$ alors A est indépendant de B .
2. Montrer que A et B ne peuvent pas être simultanément incompatibles ($\mathbb{P}(A \cap B) = 0$) et indépendants.
3. Si $\Omega = A \cup B$, A et B peuvent-ils être indépendants ?

Exercice II (8 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 . Nous avons $n \geq 1$ boules noires identiques et $b \geq 1$ boules blanches identiques.

1. Combien y a-t-il de façons différentes de placer ces boules dans les deux urnes?

Soient $n_1, n_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $n = n_1 + n_2$, $b = b_1 + b_2$. On suppose désormais que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches). On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (resp. N_2) l'événement "tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage".

2. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?
4. Pour quelles valeurs de n_1, n_2, b_1, b_2 les événements N_1 et N_2 sont indépendants ?

Exercice III (7 points)

On lance un dé (juste) de manière indépendante jusqu'à obtenir un résultat multiple de 3.

1. Donner un espace de probabilité pour cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 3 au bout d'un nombre $k \in \mathbb{N}^*$ de lancers?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 3 au bout d'un nombre impair de lancers?