SY01 / A22 - TEST

(Durée : 45min - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(5 points)*

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soient A, B, C trois événements de $\mathcal{F}$. On suppose que chacun d'eux est non négligeable et non certain.

1. Montrer que si A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cap \overline{C}$ alors A est indépendant de B.

2. Montrer que A et B ne peuvent pas être simultanément incompatibles ($\mathbb{P}(A \cap B) = 0$) et indépendants.

3. Si $\Omega = A \cup B$, A et B peuvent-ils être indépendants ?

Solution:

1. $P(A \cap B) = P((A \cap B) \cap C) + P((A \cap B) \cap \bar{C}) = P(A \cap (B \cap C)) + P(A \cap (B \cap \bar{C}))$ et par indépendace on a $P(A \cap B) = P(A)(P(B \cap C) + P(B \cap \bar{C}))$ d 'où $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

2. Supposons qu'ils sont simultanément incompatibles et indépendants, on a d'une part $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ par indépendance et d'autre part $P(A \cap B) = 0$. Ce qui conduit à $P(A)P(B) = 0$ donc ou bien $P(A) = 0$ impossible par hypothèse, ou bien $P(B) = 0$ impossible ou bien les deux probabilités nulles, ce qui est impossible.

3. D'une part on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ la dernière égalité si indépendance. D'autre part $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$. Ce qui nous conduit à $P(\bar{A}) = P(B)P(\bar{A})$. Or $P(\bar{A})$ n'est ni nulle, ni égale à 1 par hypothèse et $P(B)$ ne vaut pas 1, donc l'égalité est impossible donc A et B ne peuvent pas être indépendants.

Exercice II *(8 points)*

On considère deux urnes U_1 et U_2. Nous avons $n \geq 1$ boules noires identiques et $b \geq 1$ boules blanches identiques.

1. Combien y a-t-il de façons différentes de placer ces boules dans les deux urnes?

Soient $n_1, n_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $n = n_1 + n_2$, $b = b_1 + b_2$. On suppose désormais que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches). On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (resp. N_2) l'événement "tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage".

2. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?

3. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?

4. Pour quelles valeurs de n_1, n_2, b_1, b_2 les événements N_1 et N_2 sont indépendants ?

Solution:

1. Nous avons $n+1$ (resp. $b+1$) manières différentes de placer les boules noires (resp. rouges) dans les deux urnes, donc au total nous avons $(n+1)(b+1)$ manières différentes de placer l'ensemble de boules.

2. Introduisons la famille $(U_k)_{k=1,2}$, où pour $k = 1, 2$, U_k désigne l'évènement : "on effectue les deux tirages dans l'urne numéro k" avec $\mathbb{P}(U_k) = 1/2$. Cette famille constitue un sytème complet d'événements de probabilités non nulles, et selon la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}\left(N_1\right) = \mathbb{P}\left(N_1 \mid U_1\right)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}\left(N_1 \mid U_2\right)\mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right).$$

Nous pouvons remarquer que $\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_1)$, car une fois l'urne choisie, on tire les deux boules dans la même urne et avec remise.

3. Comme $\mathbb{P}(N_1) \neq 0$, par définition $\mathbb{P}(N_2 \mid N_1) = \mathbb{P}(N_2 \cap N_1)/\mathbb{P}(N_1)$ où selon la formule de probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_2 \mid N_1\right) &= \frac{\mathbb{P}(N_2 \cap N_1 \mid U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(N_2 \cap N_1 \mid U_2)\mathbb{P}(U_2)}{\mathbb{P}(N_1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n_1}{n_1+b_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)}
\end{aligned}$$

4. Nous avons N_1 et N_2 indépendants si, et seulement si

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2),$$

ce qui donne les égalités équivalentes successives suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n_1}{n_1+b_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2 \\
\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} - \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2 &= 0 \\
\frac{b_2 n_1 - b_1 n_2}{(b_1+n_1)(b_2+n_2)} &= 0 \\
\frac{n_1}{b_1} &= \frac{n_2}{b_2}.
\end{aligned}$$

Exercice III *(7 points)*

On lance un dé (juste) de manière indépendante jusqu'à obtenir un résultat multiple de 3.

1. Donner un espace de probabilité pour cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 3 au bout d'un nombre $k \in \mathbb{N}^*$ de lancers?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 3 au bout d'un nombre impair de lancers?

Solution:

1. Nous pouvons écrire $\Omega = \{(d_1, \dots d_{k-1}, d_k), k \in \mathbb{N}^*, d_i \in \{1,2,4,5\}, i = 1, ..., k-1, \text{ et } d_k \in \{3,6\}\}$, où pour $i \in \mathbb{N}^*$, d_i réprésente le résultat du i-ème tirage.
On peut aussi écrire de manière plus compacte $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \{\{1,2,4,5\}^{n-1} \times \{3,6\}\}$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ soit $A_k = \{$Le premier multiple de 3 arrive au bout de k tirages$\}$ et nous avons

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\{(d_1, \dots, d_k) : d_1, \dots, d_{k-1} \in \{1,2,4,5\},\ d_k \in \{3,6\}\}\right) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \frac{2}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$$

3. Il suffit d'exprimer l'évènement $\{$le premier mult. de 3 arrive au bout d'un nombre impair de tirages$\}$ comme une réunion disjointe d'évènements A_k, pour tous les k impairs. Ainsi, en appliquant les propriétés de la probabilité, nous avons que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{2k+1}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_{2k+1}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}.$$