
SY01 / A23 - TEST

(Durée : 45min - aucun document autorisé)
Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I (8 points)

On lance une pièce deux fois. On note F_i l'événement "obtenir face au i -ème lancer", pour $i = 1, 2$.

1. Donner un espace fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire, et exprimer $F_i, i = 1, 2$ à partir des événements élémentaires de Ω .
2. Exprimer à l'aide des événements $F_i, i = 1, 2$ les événements suivants : $A =$ "obtenir au moins une fois face", $B =$ "obtenir exactement une fois face", $C =$ "obtenir deux fois pile".
3. Considérons les deux tribus $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, F_1, \overline{F_1}\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, F_2, \overline{F_2}\}$.
 - (a) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est-elle une tribu sur Ω ? Justifier.
 - (b) $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est-elle une tribu sur Ω ? Justifier.

On suppose que la pièce n'est pas forcément équilibrée et que la probabilité d'obtenir pile sur chaque tirage est égale à $p \in]0; 1[$ (les deux tirages sont indépendants). On considère l'événement $D =$ "les résultats des deux lancers sont différents".

4. Vérifier que F_1 et D sont indépendants si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

Exercice II (8 points)

Un facteur distraait doit distribuer n lettres ($n \in \mathbb{N}^*$), chacune destinée à une personne différente. Il les distribue de manière aléatoire dans les n boîtes aux lettres ("BAL"), mais il oublie où il est déjà passé (il pourra mettre plusieurs dans une même BAL, ou laisser des BAL vides).

1. Donner un ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire pour
 - (a) $n = 2$.
 - (b) n quelconque.

Pour un n quelconque, soit $B_i =$ "la BAL du destinataire i est vide", $i = 1, \dots, n$.

2. Calculer $\mathbb{P}(B_i), \mathbb{P}(B_1 \cap B_n), \mathbb{P}(B_1 \cup B_n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n)$.

Exercice III (4 points)

On considère deux lots d'articles de même type, le premier contient n_1 articles défectueux et m_1 bons articles ; et le deuxième, n_2 articles défectueux et m_2 bons articles. On choisit au hasard l'un des lots, pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux. Quelle est la probabilité que le second article tiré soit défectueux lui aussi ?