SY01 / A24 - MEDIAN

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(6 points + 2pts bonus)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, tels que $\mathbb{P}(A_1) = p_1, \mathbb{P}(A_2) = p_2$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = r$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ définie par

$$X = \mathbb{1}_{A_1} - \mathbb{1}_{A_2}.$$

1. Déterminer les lois de X et de X^2 en fonction de p_1, p_2 et r.

2. Cacluler $\mathbb{E}[X]$ et Var(X).

3. On considère maintenant $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_1 = \{1, 4\}, A_2 = \{2, 3\}$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur cet espace. On définit une autre variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ comme suit

$$Y = \mathbb{1}_{\{1,2\}} - 2 \cdot \mathbb{1}_{\{2,3\}} + 3 \cdot \mathbb{1}_{\{3,4\}} - 2 \cdot \mathbb{1}_{\{4,1\}}.$$

(a) Déterminer les valeurs de p_1, p_2 et r dans cet espace de probabilité.

(b) Déterminer la loi de Y.

(c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Cacluler $\mathbb{E}[XY]$.

(Question bonus - 2pts)

4. On considère Ω un ensemble contenant n éléments et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω . On choisit un couple d'ensembles (A_1, A_2) uniformément dans $(\mathcal{P}(\Omega))^2$ pour définir la v.a. X comme ci-dessus. Calculer la probabilité que X soit une variable aléatoire de Bernoulli.

Exercice II *(8 points)*

Deux joueurs, Alice et Bob, participent à un jeu de lancer de pièce. Chacun dispose de sa propre pièce. Le principe du jeu est le suivant : Alice et Bob lancent simultanément et indépendamment leur pièce, et ils répètent cette action jusqu'à ce qu'au moins l'un d'eux obtienne pile et remporte la partie. Les pièces utilisées ne sont pas forcément équilibrées : Alice a une probabilité p d'obtenir pile à chaque lancer, et pour Bob cette probabilité est égale à q, avec $p, q \in]0, 1[$. Soient

X_1 : Le nombre de lancers nécessaires pour qu'Alice obtienne pile.

X_2 : Le nombre de lancers nécessaires pour que Bob obtienne pile.

1. Identifier la loi de X_1 et de X_2.

2. Exprimer l'évènement "les deux joueurs gagnent à égalité" en fonction de X_1 et de X_2, et calculer sa probabilité.

3. Pour $p = q$, en déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie.

4. Soit $Z = \min(X_1, X_2)$ le nombre de lancers nécessaires pour que la partie se termine. Déterminer $\mathbb{P}(Z > k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire la loi de Z.

5. Nous considérons maintenant qu'il y a n joueurs numérotés de 1 à n qui font le même jeu qu'Alice et Bob. L' $i-$ème joueur a une probabilité p_i d'obtenir pile à chaque lancer, avec $p_i \in]0, 1[$ pour $i = 1, \ldots, n$. Déterminer la loi du nombre de lancers nécessaires pour que le jeu se termine.

Exercice III *(6 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{4}\frac{1 + a^n}{n!}, \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer a.

2. Calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire X.

3. Déterminer la loi de $X + Y$.