Noté sur 23 points au total

SY01 / A25 - FINAL

(Durée : 2h - fiche recto-verso A4 autorisée)

Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Résultats utiles

Dévéloppement limité : $\ln(1+x) = x + o(x)$, pour x au voisinage de 0.

Fonction bêta : Nous admettons que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x = \pi$.

Exercice I *(9 points)* 10 points

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1 **1.** Déterminer la fonction de répartition de M_n.

1 **2.** La variable M_n admet-elle une densité ? Si c'est le cas, la déterminer.

3. Considérons les v.a. $Z_n = \lambda M_n - \ln n$.

1 (a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n, que l'on notera F_{Z_n}.

1 (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la suite $(F_{Z_n}(x))_{n\geq 1}$ converge vers $G(x) = \exp(-\exp(-x))$.

0.5 (c) La fonction G vérifie-t-elle les propriétés d'une fonction de répartition ?

0.5 (d) En déduire la convergence en loi de la suite des v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$.

1 (e) Donner une méthode permettant de simuler la loi limite obtenue à la question précédente, à partir d'une réalisation de la v.a. $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

1 **4.** Énoncer le comportement asymptotique de la siute $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ d'après la LGN et le TCL.

5. Application : Un système est composé de $n = 100$ composants qui fonctionnent en parallèle (composants indépendants, et il suffit qu'un seul des composants fonctionne pour que le système fonctionne). La durée de vie de chaque composant suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ (le temps est continu et mésuré en années). En utilisant les résultats précédents, calculer :

1 (a) La probabilité que la moyenne des durées de vie des composants dépasse 1,2 an.

1 (b) La probabilité que la durée de vie du système dépasse 5 ans.

1 (c) La "demi-vie" d'un composant et du système, qui correspondent respectivment aux temps $t^C_{1/2}$ et $t^S_{1/2}$ au bout desquels le composant et le système ont 50% de chances d'être encore opérationnels. Comparer et conlcure sur la fiabilité du système en parallèle.

Valeurs numériques : $\phi(2) \approx 0.98$, $\ln(100) \approx 4.6$, $G(0.4) \approx 0.5$, $\ln(2) \approx 0.7$, $-\ln(1-(0.5)^{\frac{1}{100}}) \approx 5$.

Exercice II *(6 points)* 7 points

L'objectif de cet exercice est de démontrer la validité de l'algorithme de Box-Muller, qui permet de simuler la loi gaussienne.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, telles que $(X, Y) = g(R, \Theta) = (R\cos(\Theta), R\sin(\Theta))$, avec R et Θ deux variables aléatoires à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $[0, 2\pi[$ respectivement.

0.5 **1.** Calculer la matrice Jacobienne de la transformation $(x, y) = g(r, \theta)$ et son déterminant.

Soient $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ indépendantes. On pose $R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$ et $\Theta = 2\pi U_2$.

2 **2.** Donner la densité de la variable aléatoire Θ. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire R est $F_R(r) = (1 - e^{-r^2/2})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)$. En déduire sa densité $f_R(r)$.

0.5 **3.** Donner la densité jointe $f_{R,\Theta}(r, \theta)$.

2 **4.** Déterminer la densité jointe du couple (X, Y). Conclure sur la loi de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

2 **5.** Démontrer que $W = X^2 + Y^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$. (*N.B. Plusieurs chemins sont possibles, mais l'application directe d'un résultat connu n'est pas suffisante*).

Exercice III *(5 points)* 6 points

Pierre et Quentin jouent au jeu suivant. On tire un nombre entier naturel N suivant une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si N est impair, Pierre gagne et reçoit N euros de Quention. Si N est pair supérieur ou égal à 2, Quentin gagne et reçoit N euros de Pierre. Si $N = 0$, la partie est nulle. (*On suppose que Pierre et Quentin disposent chacun d'un montant suffisant pour payer leur adversaire*). On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Quentin gagne.

3 **1.** En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.

2 **2.** Déterminer l'espérance du gain de Pierre. En déduire celle de Quentin. Qui a l'avantage dans ce jeu ?

1 **3.** Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a l'espérance du gain du joueur qui a l'avantage est-il maximal ?