
SY01 / A25 - TEST

(Durée : 45min - aucun document autorisé)
Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I (8 points)

On lance un dé à 6 faces deux fois. On note A l'évènement "la somme de deux résultats est égale à 7" et B l'évènement "obtenir au moins un 6".

1. Donner un espace fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire et exprimer A , B et $A \cap B$ en fonction des évènements élémentaires de Ω .
2. Soit $\mathcal{F}_1$ **la plus petite tribu** (contenant le moins d'éléments) telle que $A \in \mathcal{F}_1$. Quels sont les éléments de $\mathcal{F}_1$? L'évènement $A \cap B$ appartient-il à $\mathcal{F}_1$? Déterminer $|\mathcal{F}_1|$.
3. Soit $\mathcal{F}_2$ **la plus grande tribu** (contenant le plus d'éléments) telle que $A \in \mathcal{F}_2$. Quels sont les éléments de $\mathcal{F}_2$? L'évènement $A \cap B$ appartient-il à $\mathcal{F}_2$? Déterminer $|\mathcal{F}_2|$.
4. Considérons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω . Pour $i = 1, \dots, 6$, on note C_i l'évènement "obtenir i lors du premier lancer". Analyser l'indépendance de chaque paire d'évènements A et C_i , pour $i = 1, \dots, 6$.

Exercice II (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

En déduire que si on a $\mathbb{P}(A_i) = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 1$.

Exercice III (8 points)

Une urne contient initialement a boules rouges et b boules bleues ($a, b \in \mathbb{N}^*$). On tire une boule au hasard puis on la remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur ($c \in \mathbb{N}$); puis on recommence en tirant une boule de l'urne dans sa nouvelle composition et en ajoutant c boules de la même couleur, et ainsi de suite. On répète le processus jusqu'à obtenir deux boules de la même couleur lors de deux tirages consécutifs.

1. Donner un espace fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. On appelle R_i l'évènement "la boule sortie au i -ème tirage est rouge", pour $i \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$. Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
 - (b) On considère dans cette question $a = b = c = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de s'arrêter au bout de $2n$ tirages.