CHAPITRE. INTRODUCTION À L'ÉCHANTILLONNAGE

ANTOINE ZUREK

RÉSUMÉ. Dans ce chapitre nous allons présenter de manière informelle la théorie mathématique permettant d'échantillonner un signal. Cette présentation ne sera pas complètement rigoureuse et certains calculs pourront, pour un public non averti, sembler « choquants ». Il faut garder à l'esprit que tous les calculs de ce chapitre peuvent être complètement justifiés par la théorie des distributions. Cependant, cette théorie est trop complexe pour une présentation claire en peu de temps. Toutes ces raisons justifient la présentation qui suit.

1. Impulsion de Dirac et peigne de Dirac

On introduit dans cette section deux objets mathématiques dont l'utilisation est courante dans de nombreuses sciences.

1.1. **Impulsion de Dirac.** Soit $a > 0$, on définit la fonction « porte » par

$$P_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq a/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On introduit ensuite l'impulsion de Dirac, notée δ_0, via la formule (formelle)

$$\delta_0(t) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} P_a(t).$$

Par le biais de cette formule on a la définition suivante

$$\delta_0(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette définition est déjà étrange au premier abord mais la suite est peut-être pire. En effet, on remarque (toujours formellement) que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} P_a(t)\, dt = \lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} P_a(t)\, dt = \lim_{a \to 0} \frac{a}{a} = 1.$$

Cette formule implique que δ_0 ne peut être une fonction au sens usuel du terme. L'impulsion de Dirac est un objet mathématique appelé distribution. La notion de distribution généralise la notion de fonction classique. Si cette théorie est très riche et intéressante, elle est par contre particulièrement difficile à maîtriser. De plus, dans la pratique (pour un ingénieur par exemple) une compréhension de la notion d'impulsion de Dirac est bien suffisante.

Date: 20 juin 2024.

Etudions maintenant comment utiliser l'impulsion de Dirac en pratique. On remarque dans un premier temps que si φ est une fonction alors

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t)\,\varphi(t)\,dt = \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} P_a(t)\,\varphi(t)\,dt = \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

De la même manière on a pour un $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0). \tag{1}$$

On peut ainsi écrire formellement que

$$\boxed{\delta_0(t-t_0)\,\varphi(t) = \delta_0(t-t_0)\,\varphi(t_0).}$$

Grossièrement cette formule traduit que la multiplication d'une fonction (signal) φ par une impulsion de Dirac $\delta_0(\cdot - t_0)$ permet de « filtrer » les valeurs de φ pour ne garder que sa valeur à l'instant t_0.

Etudions à présent le spectre de l'impulsion de Dirac, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\{\delta_0(t)\} = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t)\,e^{-2i\pi\xi\,t}\,dt = \exp(0),$$

et donc

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta_0(t)\} = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}}$$

De la même manière pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on obtient

$$\mathcal{F}\{\delta_0(t-t_0)\} = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t-t_0)\,e^{-2i\pi\xi\,t}\,dt.$$

Ainsi, d'après la formule (1) on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta_0(t-t_0)\} = e^{-2i\pi\xi\,t_0} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.}$$

1.2. **Peigne de Dirac et principales propriétés.** Soit $T_e > 0$, on définit le peigne de Dirac par la formule

$$\Pi_{T_e}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_0(t - kT_e).$$

Comme précédemment, ici on ne se pose pas la question de savoir quel sens peut avoir la somme « infinie » apparaissant dans la définition de la fonction Π_{T_e}.

En pratique, comme un peigne de Dirac est une somme d'impulsions de Dirac on va utiliser cet objet pour ne conserver que les valeurs d'un signal aux instant kT_e ($k \in \mathbb{Z}$), i.e., soit φ un signal alors

$$\boxed{\varphi(t)\,\Pi_{T_e}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k\,T_e).}$$

Nous reviendrons dans la suite sur cette formule. Etudions dans un premier temps quelques propriétés de Π_{T_e}.

Commençons par démonter que Π_{T_e} vérifie la formule suivante :

$$\boxed{\Pi_{T_e}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_0(t - k\,T_e) = \frac{1}{T_e}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\, k\,\frac{t}{T_e}}.} \tag{2}$$

Pour « démontrer » cette formule on utilise (dans le cas des distributions) la formule sommatoire de Poisson. Cette formule affirme que pour une fonction φ (vérifiant certaines hypothèses) et $a > 0$ alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(t + ka) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}\left(\frac{n}{a}\right)\, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}.$$

Ici si on considère $a = T_e$ et pour φ l'objet δ_0 alors, comme $\hat{\delta}_0(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\Pi_{T_e}(t) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\frac{t}{T_e}},$$

et quitte à poser $k = -n$ on retrouve la formule (2).

Etudions à présent le spectre de Π_{T_e}. Pour ce faire via la formule (2) on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\Pi_{T_e}}(\xi) = \frac{1}{T_e}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\left\{e^{2i\pi k\,\frac{t}{T_e}}\right\}.$$

Afin de calculer (toujours formellement) la transformée de Fourier du membre de droite on va utiliser la formule de modulation du Chapitre 5, i.e., pour toute fonction φ et pour $\xi_0 \in \mathbb{R}$ fixé on a

$$\mathcal{F}\left\{e^{2i\pi\xi_0 t}\,\varphi(t)\right\} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2i\pi(\xi-\xi_0)t}\,dt = \widehat{\varphi}(\xi - \xi_0).$$

On applique ensuite cette formule et d'autres formules du Chapitre 5 (dans le cas des distributions) à la fonction $\varphi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on obtient :

$$\mathcal{F}\{1\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{\delta_0(t)\}\} = \delta_0(-t) = \delta_0(t).$$

Ainsi on en déduit que

$$\mathcal{F}\{e^{2i\pi\xi_0 t}\} = \delta_0(\xi - \xi_0),$$

et donc avec $\xi_0 = k/T_e$

$$\boxed{\widehat{\Pi_{T_e}}(\xi) = \frac{1}{T_e}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_0\left(\xi - \frac{k}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e}\Pi_{\frac{1}{T_e}}(\xi) \quad \forall\xi \in \mathbb{R}.}$$

Il faut donc retenir que à un facteur $1/T_e$ près, la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période T_e (dans le domaine temporel) est un peigne de Dirac de période $1/T_e$ (dans le domaine fréquentiel).

2. Echantillonnage d'un signal

Dans cette partie on considère un signal (une fonction) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposé à bande limitée

Définition 1. *On dit que un signal x est à bande limitée si il existe une fréquence $\xi_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\widehat{x}$ soit nulle en dehors de l'intervalle $[-\xi_0, \xi_0]$.*

2.1. **Principal général.**

Supposons connaitre les valeurs d'un signal x en des temps de la forme kT_e où $k \in \mathbb{Z}$ et $T_e > 0$ est appelée période d'échantillonnage, i.e., on suppose connaitre la suite $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$ appelée échantillonnage du signal x. A partir de cette suite nous aimerions reconstruire le signal initial $x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Intuitivement, si T_e est trop grand, l'échantillon $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$ ne contient pas assez d'informations pour reconstruire x. On comprend donc que pour avoir une chance de reconstruire x il faut choisir une période d'échantillonnage T_e « assez petite ». La question qui se pose est donc de comprendre comment choisir T_e convenablement.

Pour ce faire, à partir de la suite $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$ on construit la « fonction » x_e de la manière suivante

$$x_e(t) = T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\, \delta_0(t - kT_e) = T_e\, x(t)\, \Pi_{T_e}(t). \tag{3}$$

Grossièrement, échantillonner un signal x à la période T_e revient à le multiplier par un peigne de Dirac de période T_e.

Remarque 1. *La constante T_e apparaissant dans la formule* (3) *devant la somme, est une constante de renormalisation utile pour la suite.*

2.2. **Echantillonnage d'un signal à bande limitée.**

Pour mieux comprendre comment choisir T_e on va étudier le spectre de x_e. On a la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{x_e}(\xi) = T_e\, \mathcal{F}\{x(t)\, \Pi_{T_e}(t)\} &= T_e\, \left(\widehat{x} * \widehat{\Pi_{T_e}}\right)(\xi) \\
&= T_e \left(\widehat{x} * \frac{1}{T_e}\, \Pi_{\frac{1}{T_e}}\right)(\xi) \\
&= \left(\widehat{x} * \Pi_{\frac{1}{T_e}}\right)(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(\nu)\, \Pi_{\frac{1}{T_e}}(\xi - \nu)\, d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(\nu) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_0\left(\xi - \nu - \frac{k}{T_e}\right)\right) d\nu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(\nu)\delta_0\left(\xi - \nu - \frac{k}{T_e}\right) d\nu,
\end{aligned}$$

d'où la formule importante

$$\boxed{\widehat{x_e}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}\left(\xi - \frac{k}{T_e}\right).}$$

Cette formule est importante car elle permet de comprendre que $\widehat{x_e}$ est $1/T_e$ périodique ! En effet, on a

$$\widehat{x_e}\left(\xi + \frac{1}{T_e}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}\left(\xi - \frac{(k-1)}{T_e}\right) \overset{k'=k-1}{=} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} \widehat{x}\left(\xi - \frac{k'}{T_e}\right) = \widehat{x_e}(\xi).$$

Ainsi [1], même si $\widehat{x}$ n'est pas périodique (car x est supposé à bande limitée) le spectre de x_e est périodique. En particulier, si l'intervalle $[-\xi_0, \xi_0]$ (où $\widehat{x}$ est non nulle) est contenu dans l'intervalle $[-1/2T_e, 1/2T_e]$ alors les spectres de x et x_e coïncident (au moins sur l'intervalle $[-\xi_0, \xi_0]$). Autrement dit si T_e est assez petit pour avoir

$$\frac{1}{T_e} \geq 2\xi_0,$$

alors le spectre du signal échantillonné x_e est assez riche pour reconstruire exactement le signal initial x. Il y a donc deux cas possible

— $1/T_e < 2\xi_0$ et dans ce cas on observe un phénomène de recouvrement ou repliement spectral et x ne peut pas être reconstruit (sans hypothèses supplémentaires),

— $1/T_e \geq 2\xi_0$ et alors on peut reconstruire le signal.

la fréquence limite $2\xi_0$ est appelée fréquence de Nyquist. Plus précisément on a le résultat suivant :

Théorème 2. *Soit T_e une période d'échantillonnage et $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$ un échantillonnage d'un signal x à bande limitée dans $[-\xi_0, \xi_0]$. Alors*

(1) Si $1/T_e < 2\xi_0$ la suite $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$ ne permet pas de déterminer x (sans hypothèses supplémentaires).

(2) Si $1/T_e = 2\xi_0$ alors on peut reconstruire le signal x via la formule

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\, \frac{\sin(2\xi_0\,(t-kT_e))}{2\xi_0\,(t-kT_e)}.$$

(3) Si $1/T_e > 2\xi_0$ il existe une infinité de formules de reconstruction de x à partir de la suite $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$.

Remarque 3. *La théorie exposait précédemment ne s'applique que dans le cas d'un signal x à bande limitée. Que faire alors dans le cas où $\widehat{x}$ ne peut être nulle sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ (ce qui arrive toujours en pratique) ? Dans ce cas, il faut appliquer un filtre passe bas afin d'annuler le spectre de x à partir d'une certaine fréquence ξ_0. Pour plus de détails je renvoie à l'UV SY06 !*

1. Pour bien comprendre ce qui va suivre je conseille fortement de voir la Figure 1 !

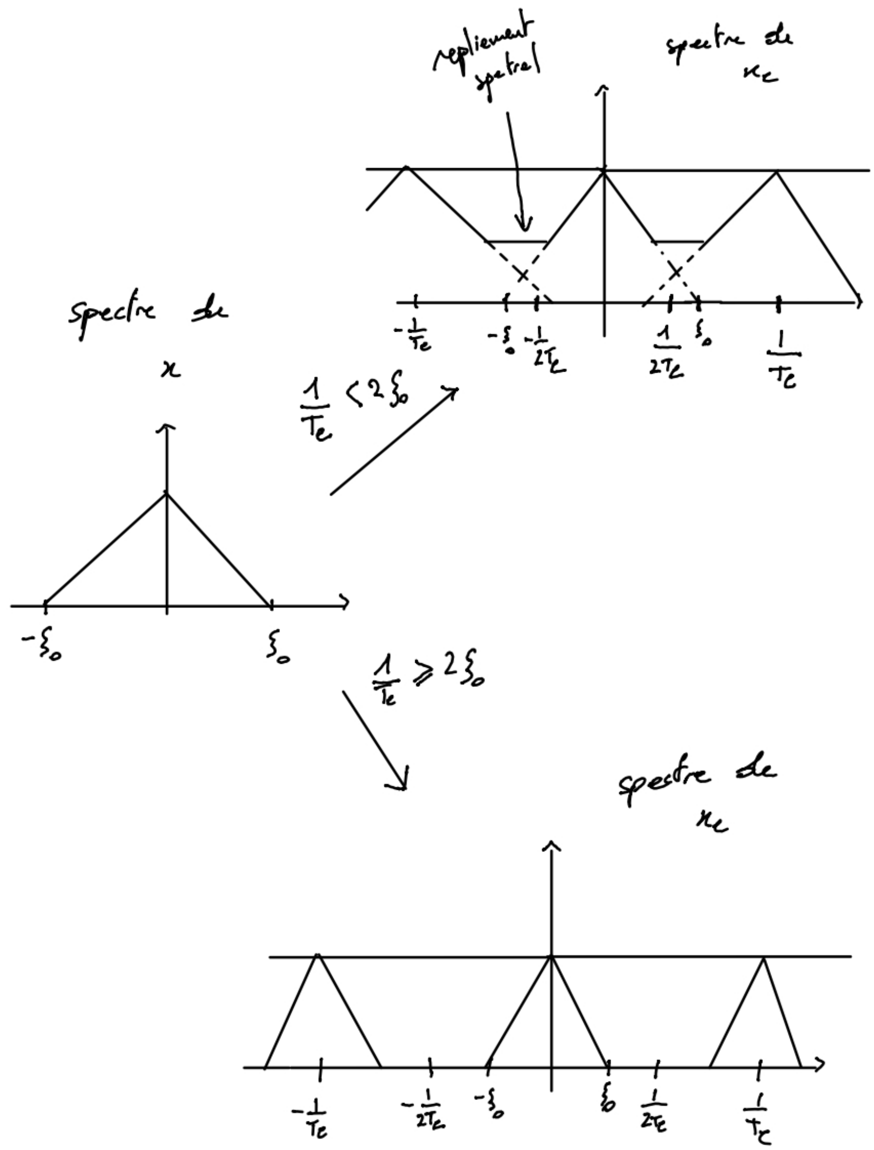

FIGURE 1 – Illustration du spectre du signal initial x et du signal échantillonné x_e en fonction de la période d'échantillonnage T_e.

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE, LMAC, 60200 COMPIÈGNE, FRANCE
Email address: antoine.zurek@utc.fr