

A-2-10,

$$1) \quad (a) \quad q(x) = 1(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3$$
$$q^*(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2$$

$$q(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2 + 6x_1^2 + 3(2x_3)^2$$
$$= \underbrace{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2}_{(f_1)^2} + 6x_1^2 - 12x_2x_3 + 3(2x_3)^2(1-3x)$$

$$= f_1(x)^2 + 2(x_1^2 - 6x_2x_3) + 3(x_3)^2(1-3x)$$

$$= f_1(x)^2 + 2(x_1 - 3x_2x_3)^2 - 18x_1^2x_3^2 - 9x_3^2 + 3x_3^2$$

$$= f_1(x)^2 + f_2(x)^2 - 9x_1^2x_3^2 + 3x_3^2$$

$$= f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + 3x_3^2(1-9x)$$

$$f_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$f_2(x) = x_1 - 3x_2x_3$$

$$f_3(x) = x_3$$

$$q(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 9x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{3}$$

$$q(x) > 0 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad q(x) &= 2(x_1)^2 + 8(x_2)^2 - 3(x_3)^2 + 14x_1x_2 + 2\alpha x_2x_3 \\
 &= 2(x_1^2 + 7x_1x_2) + 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2\alpha x_2x_3 \\
 &= 2\left(x_1 + \frac{7}{2}x_2\right)^2 - \frac{49}{2}x_2^2 + 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2\alpha x_2x_3 \\
 &= 2\left(x_1 + \frac{7}{2}x_2\right)^2 - \underbrace{\frac{33}{2}x_2^2}_{<0} - \underbrace{3x_3^2}_{<0} + 2\alpha x_2x_3
 \end{aligned}$$

donc $q(x)$ n'est pas
définie positive q'q seule
la valeur de α

2)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad f(x, y) &= x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2\alpha x_1y_2 \\
 &\quad + 2x_2y_1 + 3\alpha x_1y_3 + 3\alpha x_3y_1
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\alpha \\ 2 & 6 & 0 \\ 3\alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} = \frac{4}{2} \\ \neq \frac{6}{2} \end{matrix}$

d'après la question 1) a)

$f(x, y)$ est un produit scalaire si $|\alpha| \leq \frac{1}{3}$

ainsi on a $\langle x, y \rangle = x^T A y \geq 0$

et si $|\alpha| < \frac{1}{3}$

alors $x^T A y = 0 \Rightarrow x = 0$
ou $y = 0$

$$b) f(x, y) = x_1 y_1 + 10 x_1 y_2 + \alpha x_3 y_3 + 6 x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$A_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{matrix} \alpha - 1 \geq 0 \\ \alpha \geq 1 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} A_2 \text{ def semi positive}$$

$$\alpha > 1 \quad A_2 \text{ def positive}$$

$$c) f(x, y) = 2x_1 y_1 + 8x_2 y_2 - 3x_3 y_3 + 7x_1 y_2 + 7x_2 y_1 + \alpha x_2 y_3 + \alpha x_3 y_2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & -3 \end{pmatrix} \quad A_3' = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & \alpha \\ 0 & \alpha & -3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - \frac{7}{2}L_1$$

$$A_3'' = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & \alpha \\ 0 & 0 & -3 - \frac{2}{11}\alpha^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{11}\alpha L_2$$

$$-3 - \frac{2}{11}\alpha^2 < 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ donc}$$

la forme quadratique ne définit pas un p.s