RECHERCHE OPERATIONNELLE : optimisation combinatoire

Mots clefs :

optimisation, combinatoire, algorithmes, graphes, informatique, structures de données, complexité.

Jacques Carlier

Dritan Nace

0. INTRODUCTION : QU'EST-CE-QUE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE ? 5

0.1. LA RECHERCHE OPERATIONNELLE : 5
0.1.2. Heuristique et traitement interactif : 5
0.1.3. Déontologie de la R.O. : 5
0.2. QUELQUES PROBLEMES DE RECHERCHE OPERATIONNELLE: 5
0.2.1. Les problèmes combinatoires discrets : 5
0.2.2. Les problèmes combinatoires continus : 7
0.2.3. Les problèmes aléatoires : 8
0.2.4. Schéma du travail d'une équipe de recherche opérationnelle : 9
0.3. RESUMONS : 9
0.4. LES PROBLEMES COMBINATOIRES : 9
0.4.1. Problèmes faciles : 9
0.4.2. Problèmes difficiles : 9
0.4.3. Les méthodes automatiques : 10
0.4.4. Les méthodes semi-automatiques : 10
0.4.5. Les programmes spécifiques : 10
0.5. CONCLUSION : 10

1. LES GRAPHES : 13

1.1. POURQUOI LES GRAPHES ? : 13
1.2. VOCABULAIRE DE LA THEORIE DES GRAPHES : 15
1.2.1. Extrémité initiale, extrémité terminale, successeur, prédécesseur : 16
1.2.3. Chemins, circuits : 16
1.2.4. Chaînes, cycles : 18
1.2.5. Graphe partiel, sous-graphe : 18
1.2.6. Connexité : 19
1.2.7. Cocycle, cocircuit : 20
1.2.8. Fermeture transitive : 21
1.2.9. Nombre chromatique et nombre de stabilité : 21
1.3. GRAPHES PARTICULIERS : 22
1.3.1. Forêt : 22
1.3.2. Arbre : 23
1.3.3. Arborescence : 23
1.3.4. Graphe biparti : 24
1.3.5. Graphes planaires : 24

2. ALGORITHMES POLYNOMIAUX DE BASE POUR LES GRAPHES : 26

2.1. INTRODUCTION : 26
2.2. DEFINITION DE LA POLYNOMIALITE : 26
2.3. CODAGE DES GRAPHES : 26
2.3.1. Matrice d'adjacence : 26
2.3.2. Matrice d'incidence sommets-arcs : 27
2.3.3. File des successeurs : 27
2.3.4. File des prédécesseurs : 28
2.4. ALGORITHME DE BONNE NUMEROTATION D'UN GRAPHE : 28
2.5. RECHERCHE D'UN COUPLAGE MAXIMAL : 32
2.5.1. Couplage : 32
2.5.2. Théorème de BERGE : 34
2.5.3. Algorithme dans le cas d'un graphe biparti : 34
2.6. AUTRES ALGORITHMES DE GRAPHE : 38

3. COMPLEXITE DES PROBLEMES COMBINATOIRES : 39

3.1. QU'EST-CE-QUE L'OPTIMISATION COMBINATOIRE ? : 39
3.2. DIFFERENTS TYPES DE PROBLEMES : 39
3.3. QUAND UN PROBLEME EST-IL RESOLU ? : 40
3.4. LES PROBLEMES NP-DIFFICILES : 41
3.5. METHODES ARBORESCENTES : 42
3.5.1. Les Dames de Gauss : 42
3.5.2. Méthode de LITTLE pour le problème du voyageur de commerce : 42
3.5.3. Programmation linéaire en variables booléennes : méthode de FAURE-MALGRANGE : 49
3.5.4. Programmation linéaire en variables entières : 51
3.6. RECAPITULATION : 52

3.7. METHODES HEURISTIQUES : 52

4. PROBLEMES DE CHEMINEMENT : 54

4.1. INTRODUCTION : 54
4.2. PROPRIETE DES CHEMINS MINIMAUX : 54
4.3. ALGORITHME DE FORD : 56
4.4. ALGORITHME DE DIJKSTRA : 57
4.5. ALGORITHME DE BELLMAN : 60
4.6. METHODE MATRICIELLE : 61
4.7. AUTRES PROBLEMES DE CHEMINEMENT : 63

5. PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT : 64

5.1. INTRODUCTION : 64
5.2. GRAPHES CONJONCTIFS, ENSEMBLE DE POTENTIELS : 64
5.3. LA METHODE POTENTIEL-TACHES : 66
5.4. LA METHODE PERT : 68

6. LE PROBLEME DU FLOT MAXIMAL : 69

6.1. INTRODUCTION 69
6.2. RESEAU DE TRANSPORT : 69
6.3. LEMME : 70
6.4. FLOT COMPLET : 71
6.4.1. Introduction : 71
6.4.2. Algorithme de recherche d'un flot complet : 71
6.4.3. Fonctionnement sur l'exemple précédent : 72
6.5. ALGORITHME DE FORD-FULKERSON : 72
6.5.1. Chaîne améliorante : 72
6.5.2. Algorithme de Ford - Fulkerson : 72
6.5.3. Exemple : 73
6.5.4. Théorème de Ford - Fulkerson : 74
6.5.5. Complexité de l'algorithme de Ford-Fulkerson : 75
6.6. FLOT MAXIMAL A COUT MINIMAL : 76
6.6.1. Problème du flot maximal : 76
6.6.2. Le problème du flot maximal à coût minimal : 79

7. LES PROBLEMES DE FLOTS CANALISES A COUT MINIMAL : 82

7.1. INTRODUCTION : 82
7.2. FLOT CANALISE ET GRAPHE D'ECART : 82
7.3. FLOT CANALISE A COUT MINIMAL : 85
7.3.1. Décomposition d'un flot sur une base de circuits : 85
7.3.2. Bijection d'écart : 85
7.3.3. Théorème d'optimalité : 86
7.3.4. Preuve de l'algorithme de ROY : 88
7.4. Algorithme de graphe et programmation linéaire 89

0. INTRODUCTION : Qu'est-ce-que la Recherche Opérationnelle ?

La Recherche Opérationnelle est souvent réduite par les personnes extérieures à cette discipline à ses aspects mathématiques. Pourtant, et dès l'origine, elle vise essentiellement à la résolution de problèmes pratiques qui sont des défis au sens commun. C'est pourquoi il m'a paru nécessaire, dans cette introduction, de définir la Recherche Opérationnelle. Je m'appuie pour cela sur les écrits de Robert FAURE.

Les problèmes combinatoires sont des défis au sens commun. Ils sont donc étudiés mais ils restent méconnus y compris par de nombreux informaticiens. En effet, certains croient en la puissance absolue de l'ordinateur et ne s'inquiètent pas des problèmes de taille de données ni de complexité des algorithmes. D'autres se font une montagne des problèmes dits NP-difficiles. Or, ma déjà longue lutte contre les problèmes combinatoires m'a appris que la situation réelle est beaucoup plus complexe, en particulier si on se place d'un point de vue pratique. Certains d'entre eux sont effectivement simples et relèvent d'une heuristique, type recuit simulé, méthode tabou ou génétique. D'autres, au contraire, demandent des études fines et des programmes spécifiques. Mais, dans tous les cas, l'intervention humaine est cruciale. Il faut savoir exploiter les spécificités d'un problème et c'est une erreur de croire à l'automaticité de sa résolution.

0.1. La Recherche Opérationnelle :

Commençons par citer Robert FAURE qui a été un des principaux initiateurs de la R.O. en France...

0.1.1. Le caractère pratique de la Recherche Opérationnelle :

"La recherche opérationnelle a été, reste et demeurera l'art d'intervenir rapidement au profit d'une entité économique déterminée (agent ou collectivité) dans une situation difficile afin de tenter d'en améliorer l'issue".

0.1.2. Heuristique et traitement interactif :

"Depuis toujours, la recherche opérationnelle a institué des méthodes heuristiques incapables de fournir l'optimum formel mais susceptibles d'aboutir à de bonnes solutions".

0.1.3. Déontologie de la R.O. :

"L'équipe de R.O., en particulier le coordonnateur, doit absolument se garder de considérer qu'il lui revient de conclure son étude par une décision".

... pour arriver à Bernard ROY, une de ses personnalités actuelles les plus marquantes, qui propose le terme "AIDE A LA DECISION".

0.2. Quelques problèmes de recherche opérationnelle:

0.2.1. Les problèmes combinatoires discrets :

Nous illustrons par deux exemples : le problème du voyageur de commerce et le problème de l'arbre minimal.

Dans un problème de voyageur de commerce, un VRP doit visiter un certain nombre de villes en minimisant la distance parcourue. Sur la figure ci-dessous le voyageur doit visiter 18 villes en partant de Paris. Ce problème est modélisé par un graphe valué dont les sommets sont les villes et les arêtes les liaisons entre ces villes. Ces arêtes sont valuées par les distances kilométriques. On

doit chercher dans ce graphe un cycle Hamiltonien de valeur minimale. Ici il y a 17! circuits possibles. Plus généralement, s'il y a N villes, il y a N-1! circuits. Il est en général impossible d'énumérer. C'est pourquoi ce problème est un défi au sens commun. On verra dans le cours que le problème du voyageur de commerce est probablement de complexité exponentielle (il est NP-difficile). Toutefois, il y a des méthodes qui permettent de résoudre pratiquement des problèmes de grande taille.

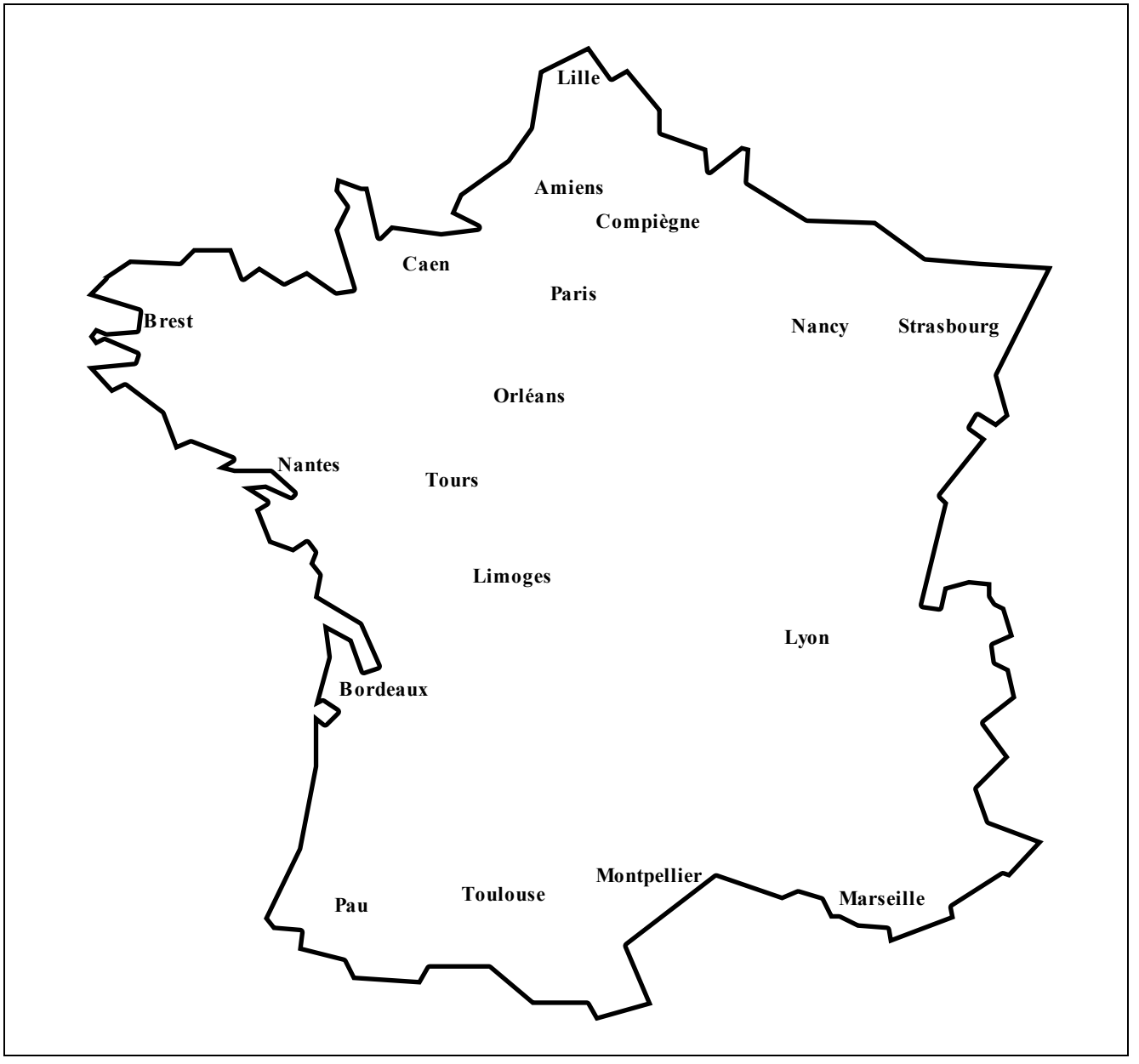


Figure 0.1 Carte des villes d'un problème de voyageur de commerce

Dans le problème de l'arbre minimal on doit relier N sites pour un coût global minimal de façon à ce que tout site puisse communiquer avec tous les autres. On verra qu'il faut chercher un arbre recouvrant de coût minimal et que ce problème est facile car pouvant être résolu par un algorithme polynomial. Un exemple de graphe est rapporté sur la figure 0.2 ainsi que son arbre minimal sur la figure 0.3. Il a été obtenu en retenant successivement les arêtes de plus petits coûts, sous réserve qu'elles soient "utiles".

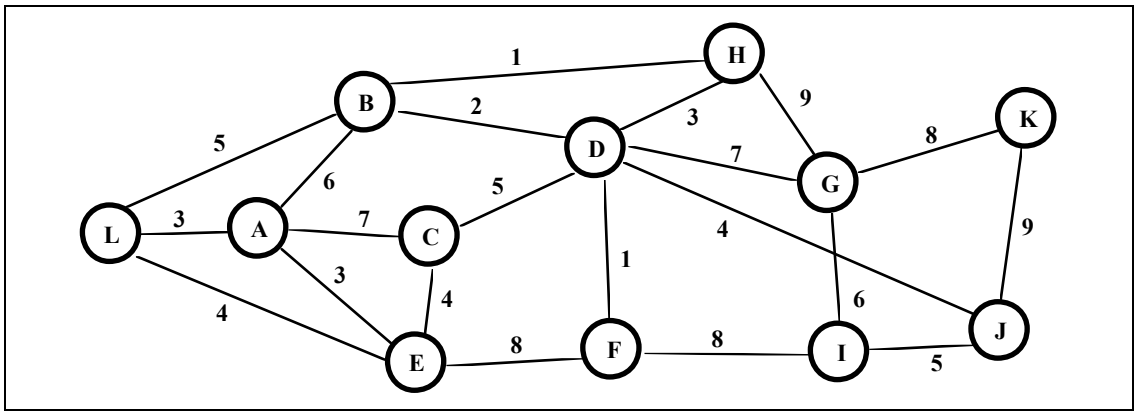


Figure 0.2 : graphe

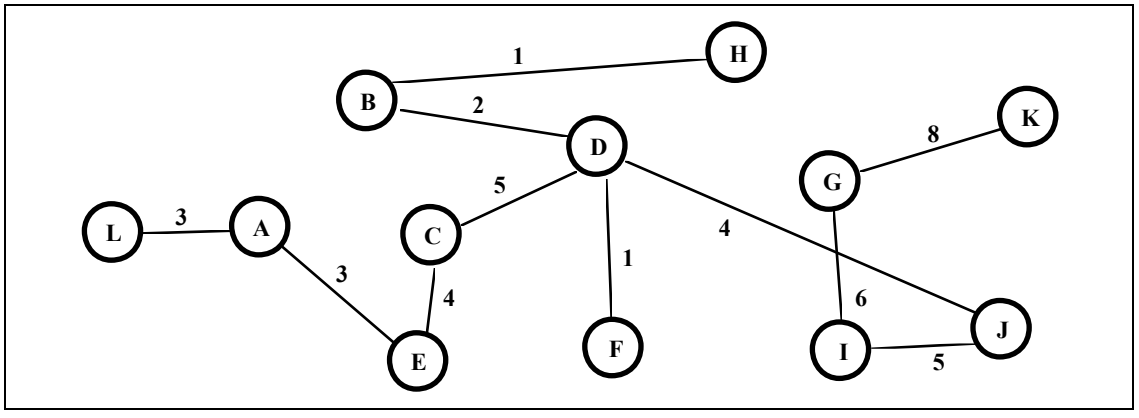


Figure 0.3 : arbre minimal

L'UV RO03 est consacrée aux méthodes traitant les problèmes combinatoires discrets.

0.2.2. Les problèmes combinatoires continus :

Un pays veut acheter des armes et s'adresse à un marchand d'armes international qui possède des stocks volés ou achetés. Celui-ci propose 2 types de lots. Le premier type de lot contient 100 mitraillettes, 200 gilets pare-balles, 5 auto-mitrailleuses légères et 50 bazookas. Le deuxième type de lot contient 50 mitraillettes, 100 gilets pare-balles, 10 auto-mitrailleuses légères et 100 bazookas. Un lot de type 1 coûte p_1 francs et un lot de type 2, p_2 francs. Le pays désire acheter au minimum 1000 mitraillettes, 2500 gilets pare-balles, 30 auto-mitrailleuses légères et 250 bazookas. Si on note x_1 le nombre de lots 1 et x_2 le nombre de lots 2 qu'il achète alors il doit résoudre le programme linéaire suivant :

Minimiser $p_1 x_1 + p_2 x_2$

sous les contraintes :

$$100x_1 + 50x_2 \geq 1000$$
$$200x_1 + 100 x_2 \geq 2500$$
$$5x_1 + 10x_2 \geq 30$$
$$50x_1 + 100 x_2 \geq 250$$

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et x_1 et x_2 entiers

On parle de programme linéaire car les contraintes et la fonction économique sont linéaires. Ce programme est discret car les variables sont supposées entières. Cette intégrité des variables rend la résolution difficile. C'est pourquoi, on relâche la contrainte d'intégrité et on suppose les variables réelles, ce qui rend le problème facile. Il est donc facile (polynomial) dans le cas continu et difficile (NP-difficile) dans le cas discret. Pour obtenir une solution entière, on pourra, par exemple, retenir les parties entières de la solution continue. Mais on n'aura pas la solution optimale.

Dans le cas général de fonctionnelle à optimiser sous contraintes, on parle de programmation mathématique. Un exemple est fourni par le problème qu'a eu à résoudre la reine DIDON lors de la fondation de Carthage à savoir : quelle est la figure géométrique de périmètre donné ayant la plus grande surface? La réponse est le cercle.

Remarquons toutefois que la plupart des problèmes de programmation mathématique sont difficiles.

Ces problèmes sont étudiés dans l'UV RO04 où on présente en particulier la méthode du simplexe qui permet de traiter de grands programmes linéaires en continu.

0.2.3. Les problèmes aléatoires :

Un phénomène aléatoire se présente aux caisses d'un supermarché. Un observateur a pu mesurer la fréquence du nombre de clients qui arrivent par minute pendant 30 minutes.

Nombre de clients par minute	0	1	2	3	4	5	6
Fréquence d'observation	4	8	8	6	3	1	0

Il a également observé la répartition des temps de services :

Temps de service	effectif des clients
Moins de 1 mn	24
1 à 2 mn	14
2 à 3 mn	8
3 à 4 mn	5
4 à 5 mn	3
5 à 6 mn	2
6 à 7 mn	1
7 à 8 mn	1
8 à 9 mn	1

Ces statistiques permettent d'estimer les lois d'arrivées et des services. Ici par exemple on a des arrivées poissonniènes et des services exponentiels. Il faut alors trouver un compromis entre le temps d'attente des clients et le nombre de caisses ouvertes.

D'autres problèmes aléatoires concernent les stocks, le renouvellement d'équipements et la fiabilité.

Ces problèmes sont étudiés dans l'UV RO05 où on présente en particulier les chaînes de Markov et les files d'attente.

0.2.4. Schéma du travail d'une équipe de recherche opérationnelle :

On a trois étapes. La première étape à pour objet de modéliser le problème et de déterminer le (ou les) critère(s). La seconde étape est la résolution, c'est-à-dire la détermination d'une solution qui paraît bonne (on dira abusivement optimale). La troisième étape est une discussion avec le décideur et, si nécessaire, un retour à la première étape.

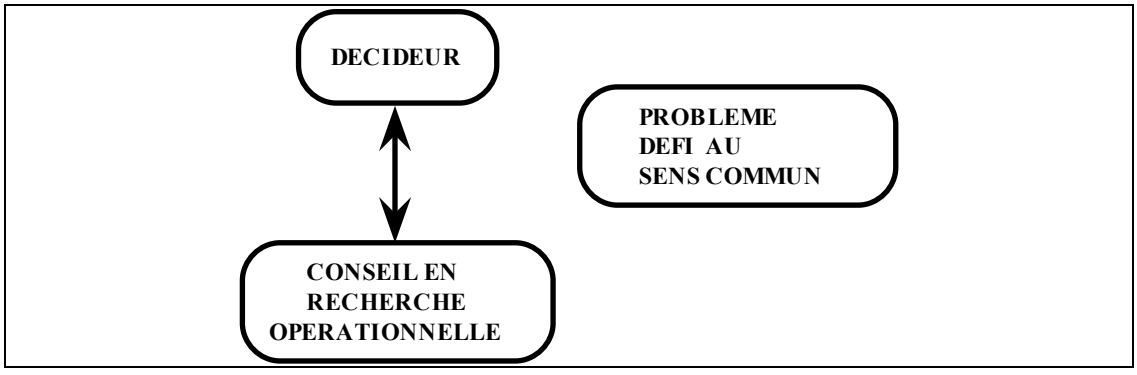


Figure 0.4 : schéma de fonctionnement d'une équipe

0.3. Résumons :

La recherche opérationnelle :

- traite un problème pratique;
- a un objectif limité (cette application);
- nécessite une boîte à outils (algorithmes et structures des données, optimisation combinatoire, graphes, complexité, programmations linéaire et mathématique, processus stochastiques, probabilités et statistiques, méthodes multicritères....);
- est pluridisciplinaire (Mathématiques, Informatique, Economie);
- est banalisée (Programmation linéaire, PERT, ...);
- aide à la décision.

0.4. Les problèmes combinatoires :

Parmi les défis au sens commun, il y a donc les problèmes combinatoires pour lesquels il est, a priori, impossible d'énumérer.

On distingue toutefois les problèmes faciles des problèmes difficiles.

0.4.1. Problèmes faciles :

Il en est ainsi pour les problèmes de toute petite taille (il faut énumérer !), pour les problèmes fortement contraints (il suffit d'énumérer !), pour les problèmes faiblement contraints (une heuristique type recuit simulé ou méthode tabou sera parfaite surtout dans un contexte industriel) et enfin pour les problèmes résolus polynomialement, encore faut-il le savoir !

0.4.2. Problèmes difficiles :

Mon expérience pratique me permet d'affirmer qu'ils sont fréquents et que pour les résoudre il faut utiliser de multiples outils (méthodes sérielles, recuit simulé, méthodes arborescentes, programmation dynamique, algorithme A*....).

Il faut ajouter que pour certains d'entre eux la méthode actuelle la plus efficace est de reproduire l'expertise humaine.

0.4.3. Les méthodes automatiques :

(ça n'existe pas encore !) Il y a 40 ans, GOMORY découvrait ses fameuses coupes pour la Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE). Or, de très nombreux problèmes combinatoires peuvent se modéliser par un PLNE. A l'époque, on a cru pouvoir résoudre les problèmes combinatoires. L'espoir a été déçu !

40 ans après, on ne sait pas résoudre automatiquement les problèmes combinatoires.

Mais il n'est pas exclu théoriquement que cela soit possible dans l'avenir. Cela revient à dire que les problèmes NP-difficiles pourraient être résolus "pratiquement" de façon polynomiale.

Il faudrait une grande avancée algorithmique

0.4.4. Les méthodes semi-automatiques :

Modéliser un problème combinatoire ne sert à rien (1), si on ne décrit pas, en plus, son algorithme de résolution et plus particulièrement de bonnes évaluations, certains disent de bonnes contraintes. D'où l'idée de faire des langages de programmation adaptés au combinatoire et incluant des parcours arborescents avec des choix automatiques.

L'avantage est de pouvoir, au moins pour le spécialiste d'un tel langage, programmer très vite. A mon avis, un tel outil reste ambitieux car on a des surcoûts liés à la rigidité d'un tel système et à la faiblesse de leurs structures de données.

0.4.5. Les programmes spécifiques :

Je citerai les méthodes arborescentes, les méthodes polyédrales et la programmation dynamique, mais aussi les heuristiques.

L'expérience de résolution des problèmes combinatoires montre l'importance cruciale pour construire une méthode efficace des points suivants :

- une modélisation adaptée;
- la complexité des algorithmes et des structures de données;
- la proximité de la machine (langage procédural, par exemple);
- la proximité du problème (si on n'a pas d'excellentes évaluations, celles-ci sont inutiles).

(1) En fait, tout modèle est une simplification de la réalité et, quand on modélise, il faut chercher à obtenir le modèle le plus représentatif que l'on puisse espérer résoudre de façon satisfaisante !

0.5. Conclusion :

Ce serait une galéjade de prétendre enseigner toute l'optimisation combinatoire en une soixantaine d'heures (cours et exercices inclus). Nous ne le prétendrons pas. Nous insisterons sur les idées principales et la présentation des algorithmes les plus fondamentaux. En effet ces algorithmes sont les outils de bases pour des méthodes plus élaborées. Nos objectifs sont de faire prendre conscience de la complexité des problèmes, du danger du combinatoire et de l'utilité des graphes pour modéliser. Espérons que cela vous évitera sur le terrain de concevoir de belles maquettes parfaites pour des exemples d'écoles de petites tailles mais inutilisables sur des problèmes réels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALJ, R. FAURE, Guide de la Recherche Opérationnelle, 2 tomes, MASSON, 1990.

[2] R. PENROSE, L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique, INTEREDITIONS, 1992.

[3] B. ROY, "Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision", Discours de remerciements à l'occasion de la remise du diplôme de Docteur Honoris Causa de l'Université de POZNAN, 1992.

[4] M. GONDRAN; M. MINOUX "Graphes et Algorithmes" Eyrolles 1985.

[5] ROSEAUX. "Exercices corrigés de Recherche Opérationnelle" 3 Tomes. MASSON, 1982.

[6] M.R. GAREY, D.S JOHNSON, "Computers and Intractability" W. H. FREEMAN, San Francisco, 1979.

1. LES GRAPHES :

1.1. Pourquoi les graphes ? :

Les graphes sont des outils irremplaçables pour modéliser et résoudre de nombreux problèmes concrets. En effet, ils permettent, d'une part de guider l'intuition lors d'un raisonnement, d'autre part de se rattacher aux résultats connus de la théorie des graphes. Nous les définissons succinctement ci-dessous et illustrons leur intérêt par quelques exemples.

Un **graphe orienté** est un couple **G = (X,U),** où X est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets et U une partie de X x X dont les éléments sont appelés arcs.

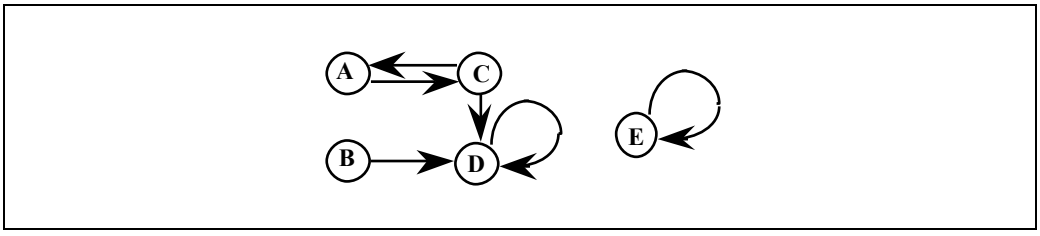


Figure 1-1 Graphe orienté

Exemple 1 :

Un premier exemple de graphe est dessiné sur la figure 1.1. Il est donné par : X = {A, B , C , D , E} et U = {(A , C) (C ,A) (C ,D) (B ,D) (D ,D) (E , E) }

Exemple 2 :

On a 3 bocaux de contenances respectives 8, 5 et 3 litres. Initialement, le plus grand bocal est plein, les autres sont vides. On veut atteindre la situation où les 2 plus grands bocaux contiennent 4 litres sous la contrainte suivante : quand on vide un bocal dans un autre, soit on remplit l'autre bocal entièrement, soit on vide le premier entièrement.

A ce problème, on associe un graphe dont les sommets représentent les états du système. Un sommet est un triplet (i ,j ,k) où i, j, et k sont les contenus des 3 bocaux. Les arcs correspondent aux possibilités de transition entre états (Cf. figure 1.2).

Un graphe non orienté est un couple G=(X,E), où X est un ensemble de sommets et E un ensemble de paires de sommets appelées arêtes. On a un multigraphe quand on autorise l'existence simultanée de plusieurs paires identiques.

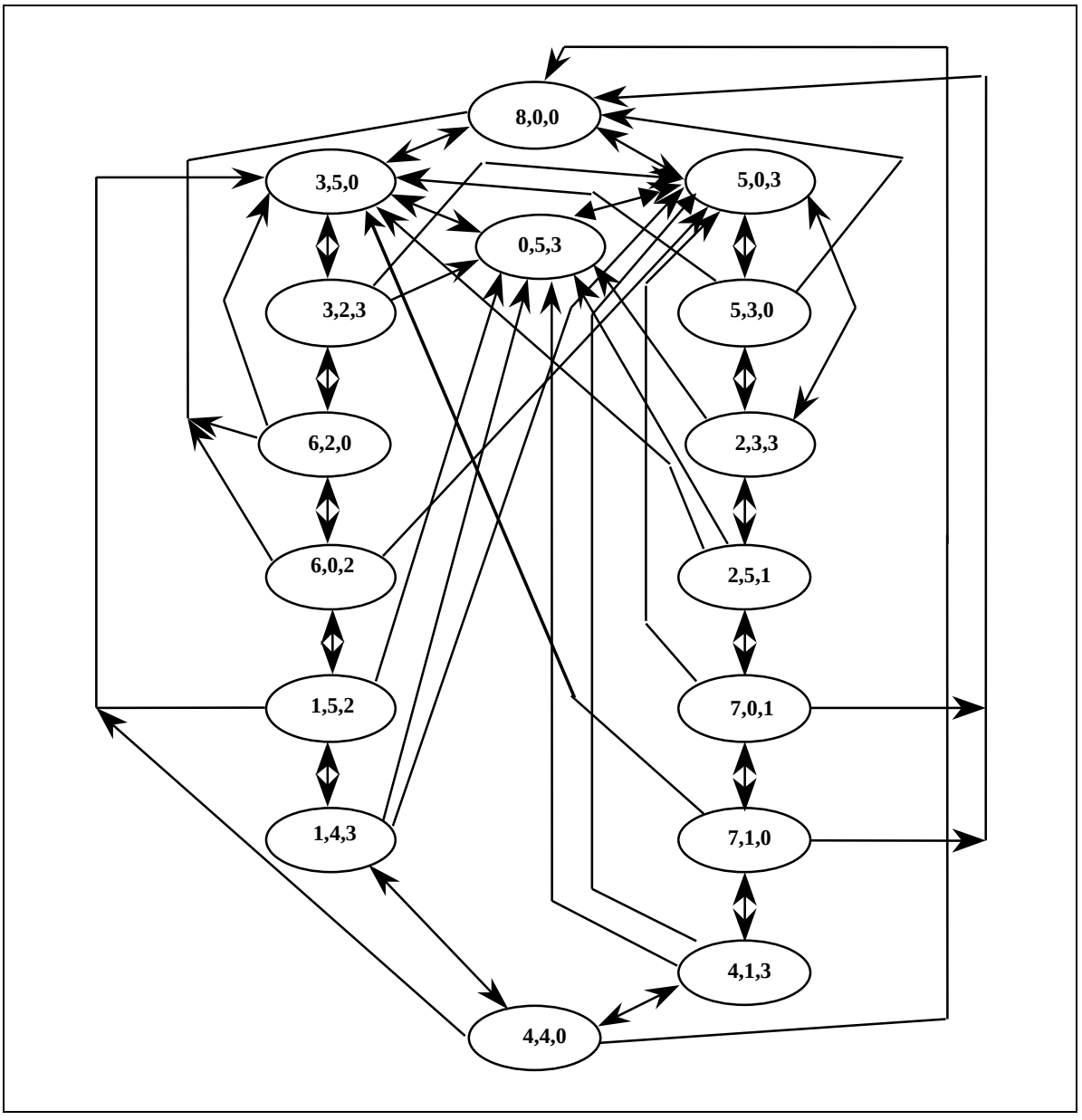


Figure 1-2 Graphe des trois bocaux

Exemple 3 :

Le pont de Königsberg (Kaliningrad) surplombe la Pregel. Au milieu de cette rivière, on a l'île de Kneiphoff (Cf figure 1.3).

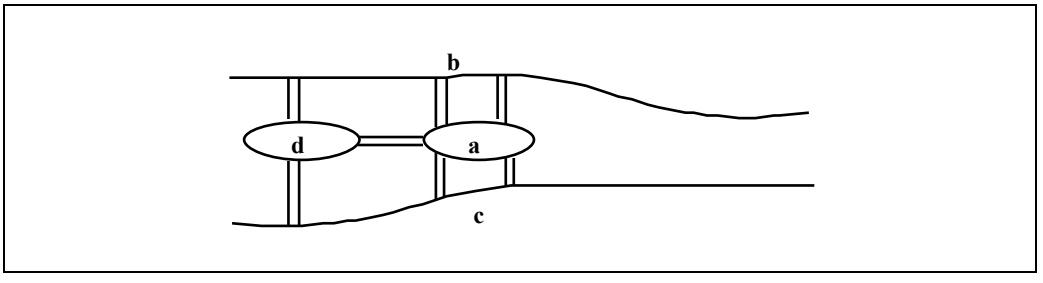


Figure 1-3 Pont de Königsberg

Un piéton peut-il traverser une fois et une seule chaque pont ? En 1736, Euler a démontré que cela est impossible. Pour le montrer, il a associé au problème le multigraphe de la figure 1.4.

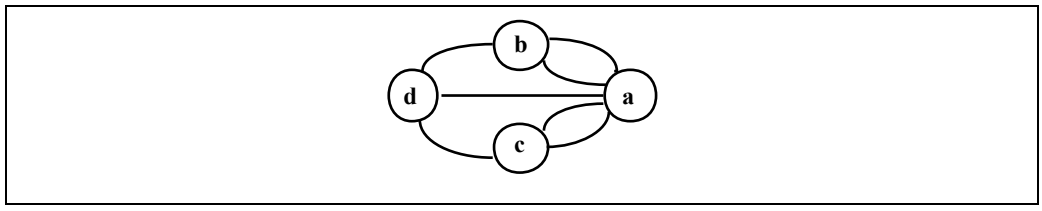


Figure 1-4 Graphe d'Euler

A chaque portion de terre correspond un sommet, à chaque pont, une arête. Le problème se formule alors ainsi : existe-t-il une chaîne passant une fois et une seule par chaque arête du multigraphe (on parlera de chaîne eulérienne) ? La réponse résulte du théorème suivant que nous ne démontrerons pas :

Théorème d'Euler : Un multigraphe simple (sans boucle) G admet une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe ("d'un seul tenant") et si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Dans le cas des ponts de Königsberg, les 4 sommets du graphe de la figure 1.4 sont de degré impair, il n'y a donc pas de solution.

1.2. Vocabulaire de la théorie des graphes :

Le but de ce paragraphe est de donner les définitions de base de la théorie des graphes. Ces définitions sont nombreuses mais très intuitives, ce qui facilite leur apprentissage !

1.2.1. Graphe orienté et non orienté, graphe valué :

graphe orienté : Un **graphe orienté** est un couple G = (X,U), où X est un ensemble dont les éléments sont appelés **sommets** et U une partie de X × X dont les éléments sont appelés **arcs**.

graphe non orienté : Un **graphe non orienté** est un couple G=(X,E), où X est un ensemble dont les éléments sont appelés **sommets** et E un sous-ensemble de parties de X contenant chacune au plus 2 éléments et dont les éléments sont appelés **arêtes**.

Remarque : on notera n le nombre de sommets d'un graphe et m son nombre d'arcs (ou d'arêtes).

A un graphe orienté, on associe un graphe non orienté en "laissant tomber l'orientation". De même à un graphe non orienté, on associe un graphe orienté, soit en introduisant pour toute arête les deux arcs qui lui correspondent, soit en choisissant un seul des deux arcs (Cf. Figure 1.5).

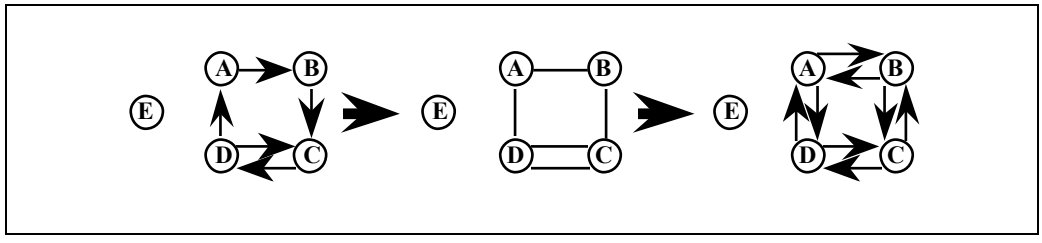


Figure 1-5 Graphes orientés et non orienté

Graphe valué :

Un **graphe valué** est un triplet G = (X, U, v) où (X, U) est un graphe et v une application de U dans IR (ensemble des réels).

1.2.1. Extrémité initiale, extrémité terminale, successeur, prédécesseur :

Extrémité initiale et terminale (successeur et prédécesseur) :

> Soit un arc (i, j); i est dit **extrémité initiale** de l'arc (i, j), j, **extrémité terminale**. On dit aussi que j est un **successeur** de i, et i un **prédécesseur** de j. L'arc (i, j) est dit **incident** vers l'extérieur en i et vers l'intérieur en j.

On note $U^+(i)$ l'ensemble des successeurs de i, $U^-(i)$ l'ensemble des prédécesseurs de i, $d^+(i)$ le **demi-degré extérieur** de i, c'est-à-dire le cardinal de $U^+(i)$, et $d^-(i)$ le **demi-degré intérieur** de i, c'est-à-dire le cardinal de $U^-(i)$ (Cf. figure 1.6).

1.2.2. Degré :

Degré d'un sommet :

> Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs incidents en ce sommet.

Quand il n'y a pas de boucle en un sommet, c'est-à-dire d'arc dont l'extrémité initiale se confond avec l'extrémité terminale, son degré est la somme de son demi-degré intérieur et de son demi-degré extérieur (Cf. figure 1.6).

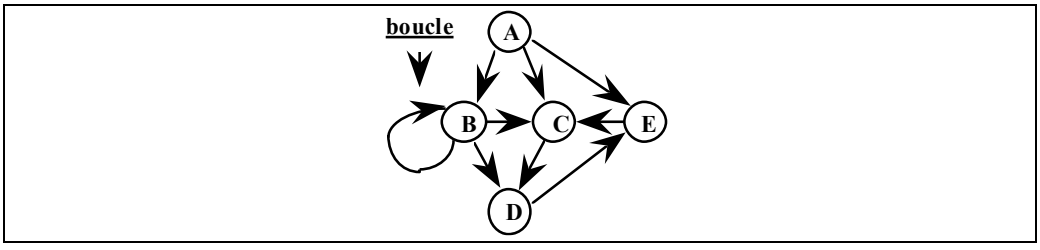


Figure 1-6 Graphe orienté

Sur la figure 1.6 on a :

$U^-(E) = \{A, D\}$ $d^-(E) = 2$ $d^-(A) = 0$ $d(C) = 4$

$U^+(E) = \{C\}$ $d^+(E) = 1$ $d^+(A) = 3$ $d(B) = 4$

1.2.3. Chemins, circuits :

Chemin :

> Un **chemin** est une suite de sommets $[x_0, x_1, ..., x_p]$ telle que les arcs (x_0, x_1), (x_1, x_2) , ... , (x_{p-1}, x_p) appartiennent au graphe. La valeur d'un chemin est alors la somme des valuations des arcs de ce chemin. La longueur d'un chemin est son nombre d'arcs.

Le sommet x_0 est appelé **extrémité initiale** du chemin et le sommet x_p, **extrémité terminale**.

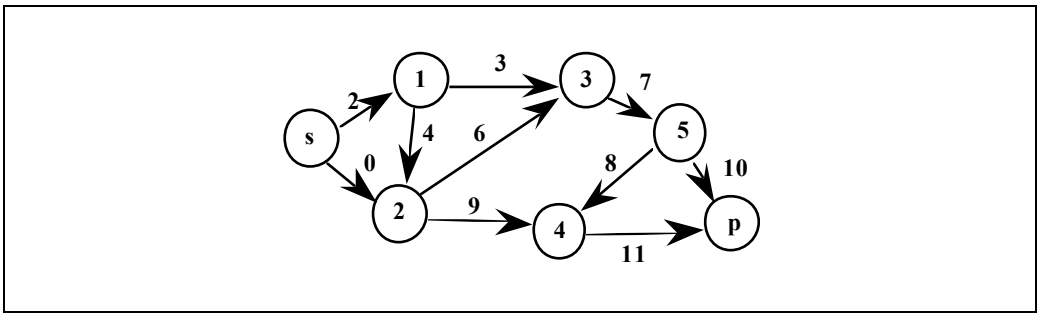


Figure 1-7 Graphe valué

Par exemple sur le graphe de la figure 1.7 la valeur du chemin {s, 1, 2, 4, p} est 26 et sa longueur 4.

Circuit :

Un **circuit** est un chemin dont l'extrémité initiale se confond avec l'extrémité terminale.

Chemin élémentaire et simple:

Un chemin est dit **élémentaire** (resp. **simple**) s'il ne passe pas deux fois par le même sommet (resp. arc).

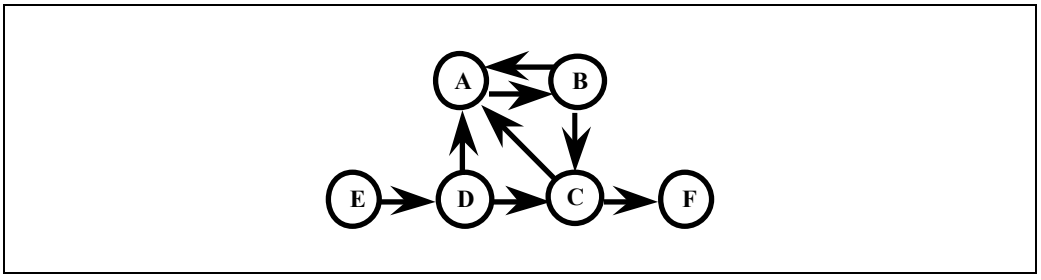


Figure 1-8 Graphe orienté

Sur la figure 1.8 : Les chemins [E, D, C, F] et [E, D, A, B, C, F] sont élémentaires alors que le chemin [E, D, A, B, A, B, C, F] n'est pas élémentaire.

Chemin eulérien et hamiltonien :

Un chemin est dit **eulérien** (resp **hamiltonien**) s'il passe une fois et une seule par chaque arc (resp. sommet) du graphe.

Descendant, ascendant :

Un sommet j est un **descendant** d'un sommet i s'il existe un chemin allant de i à j ou si i=j; on dit alors que i est un **ascendant** de j.

Source, puits :

Une **source** s est un sommet ascendant de tous les autres sommets, un **puits** p, un sommet descendant de tous les autres sommets.

Note : Un synonyme de source (resp. puits) est racine (resp. antiracine).

1.2.4. Chaînes, cycles :

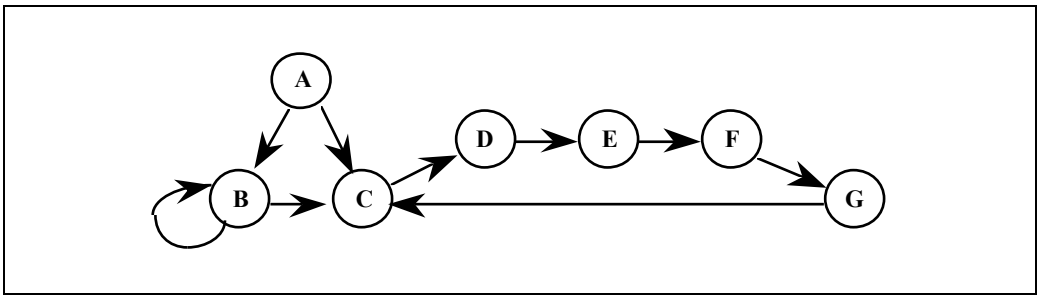


Figure 1-9 Graphe orienté

Chaîne :

Une **chaîne** est une suite d'arcs u_1, u_2, ... , u_p telle qu'une extrémité de l'arc u_i ($2 \leq i \leq p-1$) est commune avec l'arc u_{i+1}, alors que l'autre extrémité est commune avec l'arc u_{i-1}. La longueur d'une chaîne est son nombre d'arcs.

Sur la figure 1.9, (A B) (B C) (G C) (F G) (E F) (D E) est une chaîne.

Une chaîne peut être "vue" comme une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs soient liés par un arc, certains arcs peuvent être parcourus dans le sens de la chaîne (sens +), les autres arcs dans le sens opposé (sens -).

Cycle :

Un **cycle** est une chaîne dont l'extrémité initiale se confond avec l'extrémité terminale.

On définira de même une chaîne simple, hamiltonienne, élémentaire, eulérienne, un cycle hamiltonien, eulérien.

1.2.5. Graphe partiel, sous-graphe :

Sous-graphe :

Soit G=(X,U) un graphe.

Le **sous-graphe** associé au sous-ensemble A de X est par définition le graphe G_A défini par :

$G_A = (A, U \cap A \times A)$.

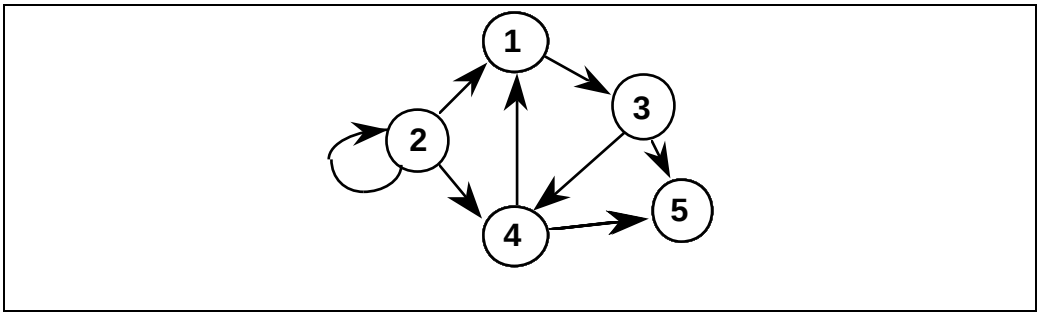


Figure 1-10 Graphe orienté

Considérons l'exemple de la figure 1.10 où n = 5 et m = 8, le sous-graphe d'ensemble A = {1, 4, 5} est rapporté sur la figure 1.11.

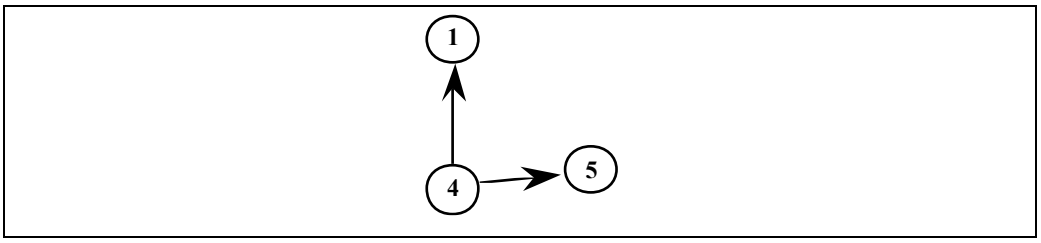


Figure 1-11 Sous-graphe

Graphe partiel :

Un **graphe partiel** G′ de G est un graphe ayant même ensemble de sommets que G et dont l'ensemble des arcs est inclus dans l'ensemble des arcs de G : G' = (X ,U') avec U' sous-ensemble de U.

Sur la figure 1.12 est rapporté un graphe partiel du graphe de la figure 1.10.

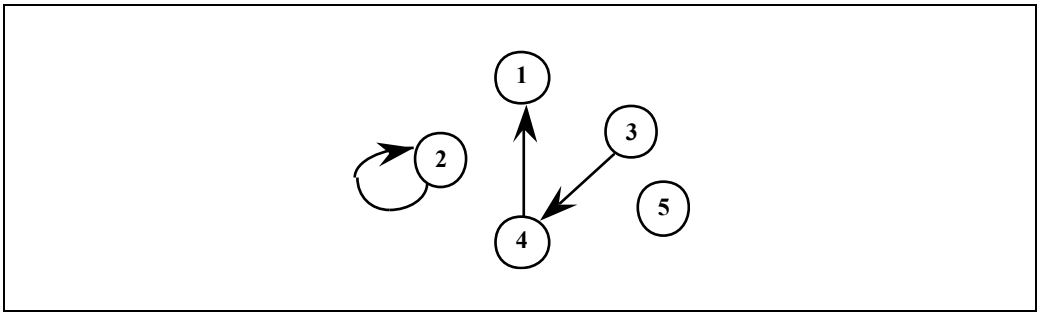


Figure 1-12 Graphe partiel

Un **sous-graphe partiel** est un sous-graphe d'un graphe partiel.

1.2.6. Connexité :

Connexité simple (non orienté) :

La relation i C j (lire i connecté à j) si i = j ou s'il existe une chaîne allant de i à j est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées composantes connexes.

Connexité forte (orienté)

La relation i FC j si i = j ou s'il existe un circuit passant par i et j est une relation d'équivalence dite de forte connexité. Les classes s'appellent les composantes fortement connexes.

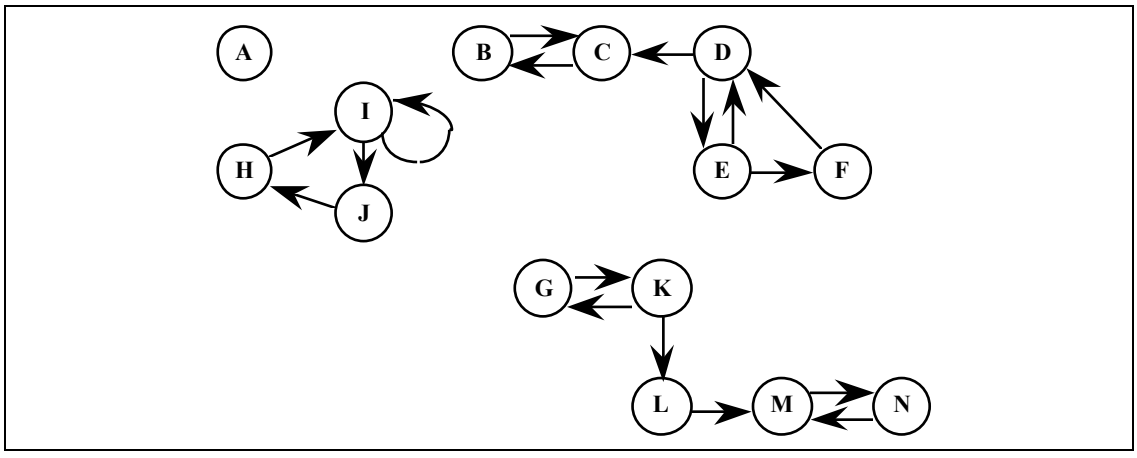


Figure 1-13 Les composantes connexes

Dans l'exemple de la figure 1.13, on a les 4 composantes connexes : {A}, {B, C, D, E, F}, {H, I, J}, {G, K, L, M, N}.

Dans l'exemple précédent, on a les 7 composantes fortement connexes :{A}, {B, C}, {D, E, F}, {H, I, J}, {G, K}, {L}, {M, N}.

Graphe réduit :

Le **graphe réduit** G_R est le graphe $(X_{/FC}, V)$ dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des classes de forte connexité et dont tout arc relie deux classes distinctes dont deux éléments sont reliés dans G. Le graphe réduit est sans circuit.

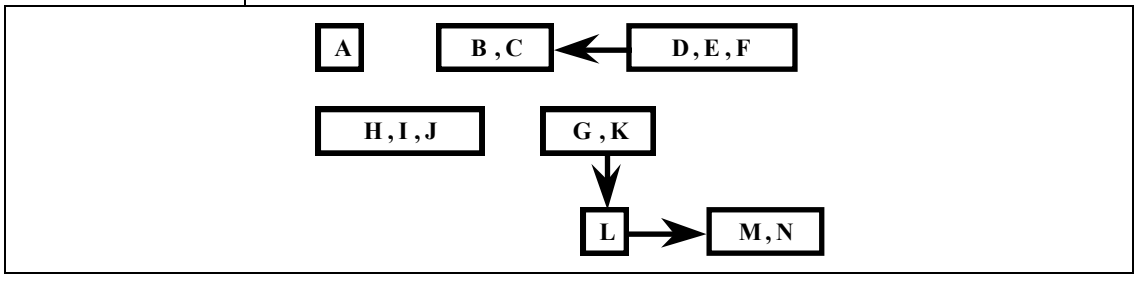


Figure 1-14 Graphe réduit

Sur la figure 1.14 on a dessiné le graphe réduit de la figure 1.13.

1.2.7. Cocycle, cocircuit :

Cocycle :

Un **cocycle** est un ensemble d'arcs reliant deux parties complémentaires du graphe. Si $Y \subseteq X$, on note $\omega(Y)$ le cocycle associé, on a donc $\omega(Y) = \omega(X-Y)$.

Cocircuit :

Un **cocircuit** est un cocycle dont tous les arcs sont dans le même sens.

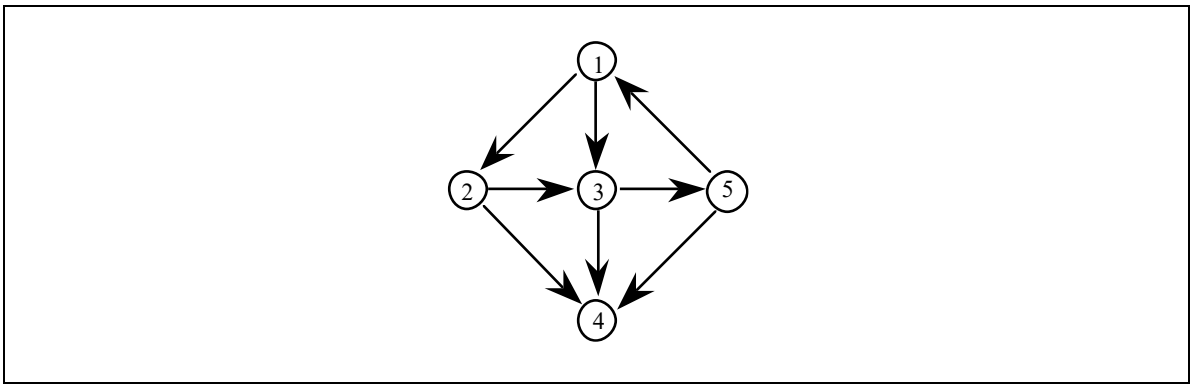


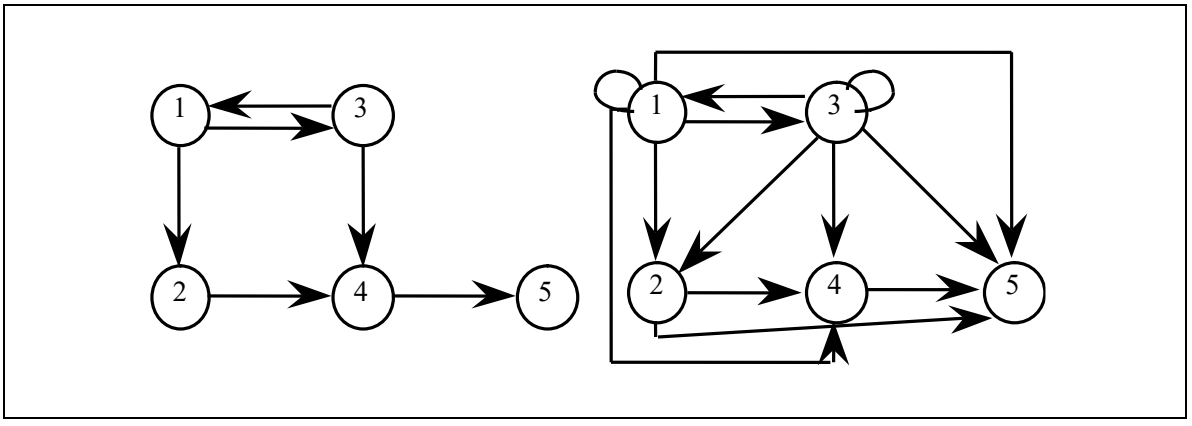
Figure 1-15

Sur la figure 1.15, ω(4) = {(2,4),(3,4),(5,4)} est un cocircuit, alors que ω{(1,2)} = {(2,4), (2,3), (1,3),(5,1)} n'est pas un cocircuit.

1.2.8. Fermeture transitive :

Fermeture transitive :

La **fermeture transitive** d'un graphe G =(X,U) est le graphe G″=(X ,U″) de même ensemble de sommets que G et tel que (i ,j)∈U″ s'il existe dans G un chemin allant de i à j.



G = (X , U) G" = (X, U")

Figure 1-16 : Fermeture transitive d'un graphe

1.2.9. Nombre chromatique et nombre de stabilité :

Stable :

Un sous-ensemble S de X est **stable** s'il n'y a pas d'arc reliant deux sommets de S. Le nombre de stabilité α(G) est le cardinal maximal d'un ensemble stable.

Nombre chromatique :

Un graphe G est **c-chromatique** s'il est possible d'en colorier les sommets avec c couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur. Le nombre chromatique $\gamma(G)$ est le plus petit c tel que G soit c-chromatique.

Exemple :

On considère un graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des examens du second semestre à l'U.T.C : deux sommets sont reliés par un arc si un même étudiant doit passer les deux examens correspondants.

On veut déterminer un emploi du temps en un nombre minimal de périodes (une période étant égale à une demi-journée). Chaque couleur va correspondre à une période de temps durant laquelle se passera l'ensemble des examens de cette couleur.

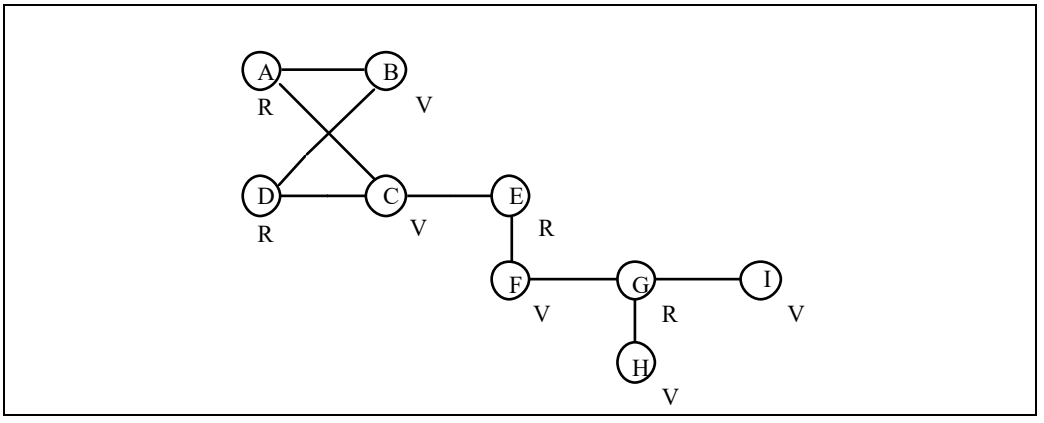


Figure 1-17 Coloration

Sur la figure 1.17 : A, D, E, G sont de couleur rouge et B, C, F, H, I sont de couleur verte. Le nombre chromatique $\gamma(G)$ = **2.**

1.3. **Graphes particuliers** :

1.3.1. Forêt :

Une forêt est un graphe sans cycle.

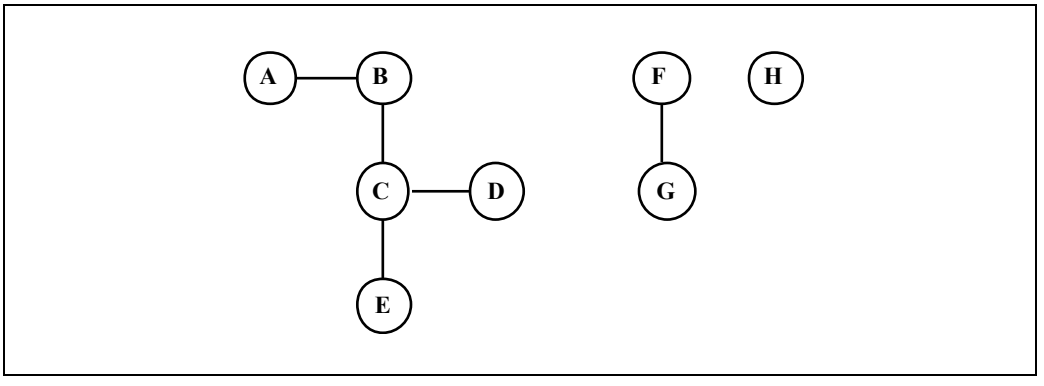


Figure 1-18 Forêt

1.3.2. Arbre :

Un arbre est un graphe connexe sans cycle (avec $|X| \geq 2$).

Sur la figure 1.19 est dessiné un arbre avec 9 sommets et 8 arêtes.

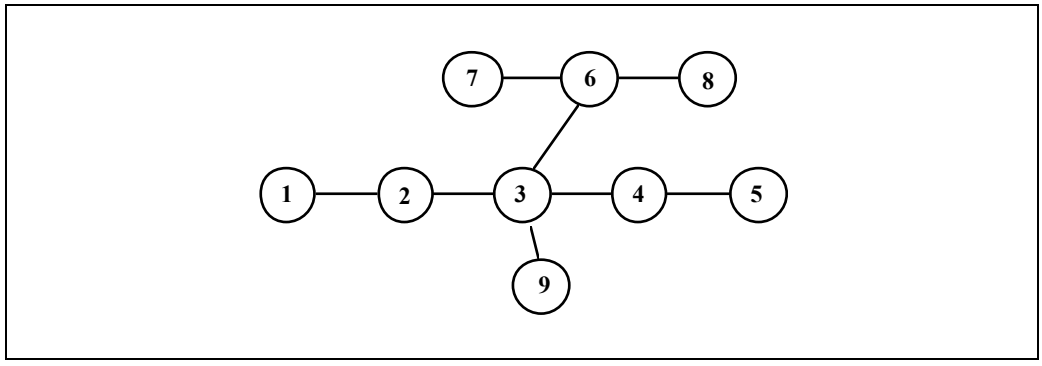


Figure 1-19 Arbre

<u>Propriétés caractéristiques (voir TD):</u>

Il est connexe et comporte n-1 arêtes.
Il est sans cycle et comporte n-1 arêtes.
Il est connexe et si on enlève une arête il n'est plus connexe.
Il est sans cycle et on crée un cycle si on ajoute une arête.
Il existe une chaîne élémentaire et une seule entre toute paire de sommets.

1.3.3. Arborescence :

<u>Arborescence :</u>

On appelle **arborescence** un arbre orienté tel que chaque sommet (sauf un) a exactement un prédécesseur. Le sommet sans prédécesseur est la **racine** de l'arborescence.

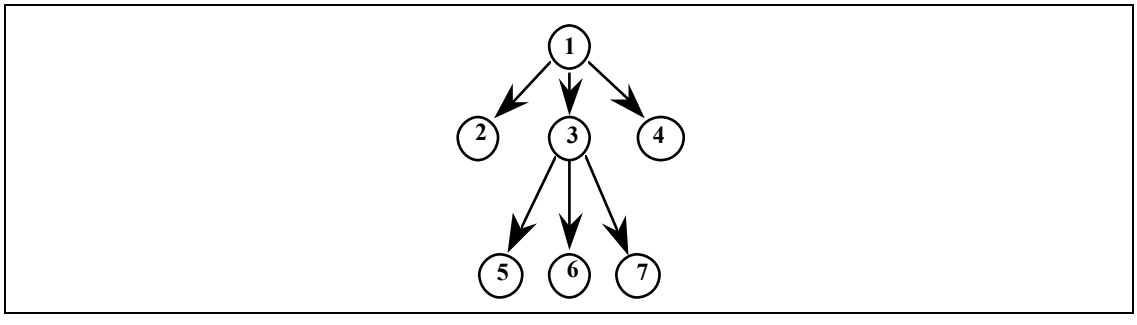


Figure 1-20 Arborescence

Pour tout sommet, il existe un chemin et un seul reliant la racine à ce sommet. Les sommets sans successeur sont appelés **sommets pendants** ou **sommets terminaux.**

1.3.4. Graphe biparti :

Un **graphe biparti** G = (X,U) est un graphe dont l'ensemble X des sommets peut être partitionné en 2 parties Y et Y' telles que tout arc a une extrémité dans Y et l'autre dans Y'.

Exemple : Bataille d'Angleterre.

En 1941, les escadrilles anglaises se composaient d'avions biplaces mais certains pilotes ne pouvaient pas faire équipe avec certains mécaniciens pour des raisons de langues ou d'habitudes.

A ce problème, on associe un graphe dont l'ensemble des sommets comprend les pilotes et les mécaniciens. Un pilote étant “relié” à un mécanicien, s'ils peuvent embarquer tous deux dans le même avion.

Dans la figure 1.21, les traits gras représentent un couplage entre l'ensemble des pilotes et l'ensemble des mécaniciens.

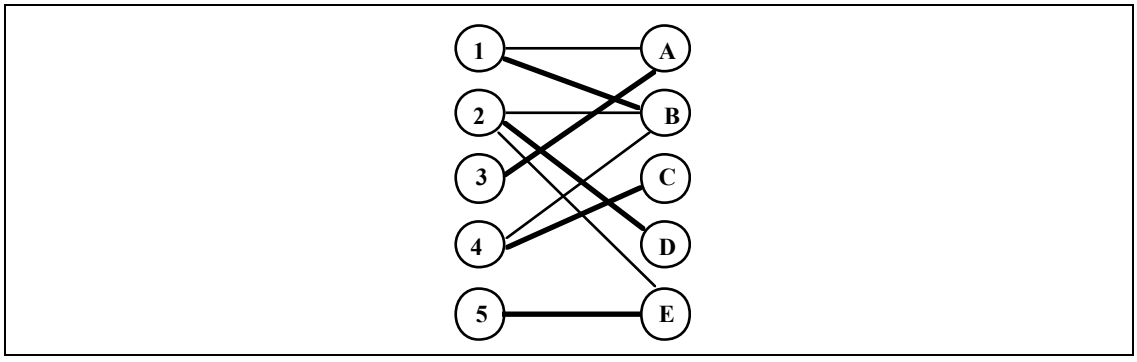


Figure 1-21 Couplage

Couplage :

Un **couplage** est un ensemble d'arcs tel que deux arcs de cet ensemble n'ont pas d'extrémité commune.

Exemple :

{ (1 ,B), (2 ,D) } est un couplage du graphe de la figure 1.21 alors que { (1 ,B), (2,D), (3 ,A), (4 ,C), (5 ,E) } est un couplage maximal.

1.3.5. Graphes planaires :

Un graphe est dit **planaire** si on peut le représenter dans le plan de telle sorte que les sommets soient des points distincts et que les arêtes ne s'intersectent pas.

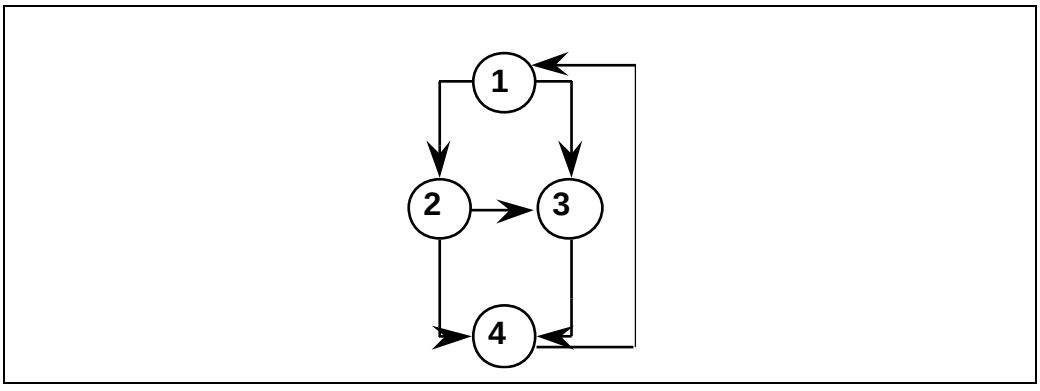


Figure 1-22 : exemple de graphe planaire

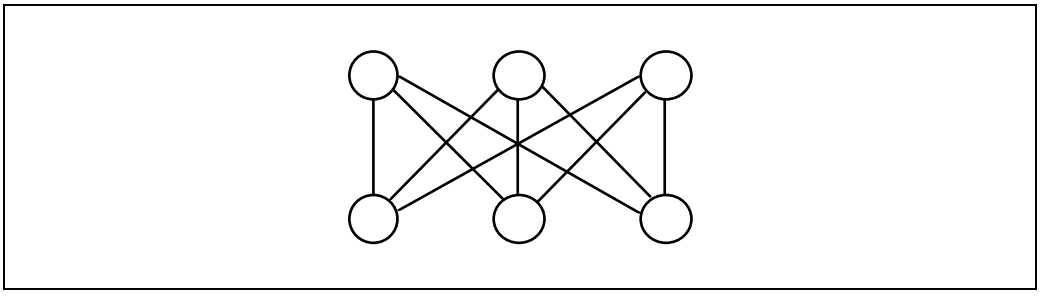


Figure 1-23 : graphe des 3 usines (non planaire)

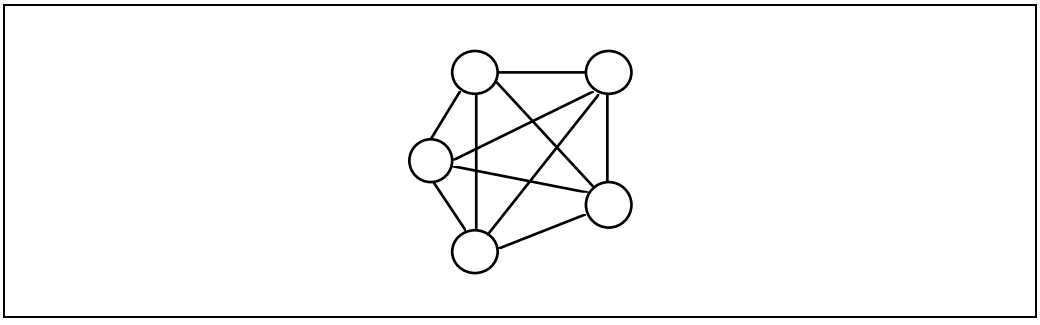


Figure 1-24 : graphe complet à 5 sommets (non planaire)

Sur les figures 1.23 et 1.24 sont dessinés les 2 graphes non planaires minimaux. En effet, si on enlève une arête à un de ces 2 graphes, le graphe devient planaire. De plus, tout graphe non-planaire contient un sous-graphe partiel qu'on peut mettre en correspondance avec un de ces deux graphes en associant une chaîne du graphe partiel à une arête du graphe (théorème de Kuratowski).

<u>Conjecture des 4 couleurs (1875 Pertersen) :</u>

"Tout graphe planaire est 4 coloriable" (les sommets sont coloriables en 4 couleurs). Cette conjecture a été "démontrée" à l'aide d'un ordinateur (1982).

A l'origine, c'est le problème du coloriage d'une carte de géographie : est-ce qu'une carte de géographie peut être coloriée en 4 couleurs ?

1.3.5. Cliques:

Une **clique** est un graphe complet sans boucles (cas orienté et non orienté). Dans le cas orienté, une clique a n(n-1) arcs et n(n-1)/2 arêtes dans le cas non orienté.

Seules les cliques de cardinalité 1, 2, 3 et 4 sont planaires.

2. ALGORITHMES POLYNOMIAUX DE BASE POUR LES GRAPHES :

2.1. Introduction :

Nous allons présenter dans ce chapitre deux algorithmes polynomiaux de graphe à savoir un algorithme pour bien numéroter les sommets d'un graphe, et un algorithme pour chercher un couplage de cardinal maximal dans un graphe biparti. Auparavant nous décrirons les différentes structures de données pour représenter un graphe en machine, et nous définirons la notion d'algorithme polynomial. Cette notion est d'importance car basique pour l'efficacité des programmes. Nous verrons que la complexité d'un algorithme est fortement dépendante de la structure de données utilisée et que certains problèmes sont intrinsèquement exponentiels. D'autres algorithmes de graphes seront étudiés dans la suite du cours et en travaux dirigés.

2.2. Définition de la polynomialité :

On dit qu'une fonction f(x) est en $\mathbf{O(x^p)}$, s'il existe un polynôme P(x) de degré p tel que $\forall x \in \mathbf{N}$, $f(x) \leq P(x)$.

On distingue pour les algorithmes les complexités en mémoire et en temps de calcul. La première donne une borne supérieure du nombre de mots mémoires nécessaires pour représenter les paramètres et les variables dans une structure de données. La seconde donne une borne supérieure du nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour exécuter un algorithme. Dans les 2 cas x représente la taille de la donnée du problème à traiter, ou plus précisément le nombre de digits de la donnée.

Remarque : Pour les graphes on exprime la complexité en fonction du nombre n de sommets et du nombre m d'arcs.

2.3. Codage des graphes :

Il existe 4 structures de données principales pour coder un graphe : la matrice d'adjacence, la matrice d'incidence, la file des successeurs, et la file des prédécesseurs.

2.3.1. Matrice d'adjacence :

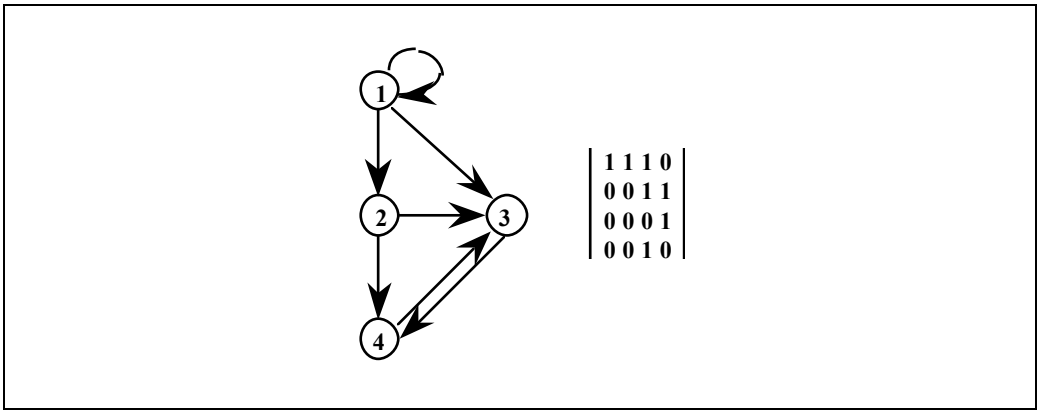


Figure 2.1 : exemple de graphe avec sa matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence sommets-sommets est la matrice carrée d'ordre n notée $A = (a_{ij})$ telle que : $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in U$,

$a_{ij} = 0$ sinon.

Remarque : Le codage par la matrice associée est en **$O(n^2)$** (complexité du codage) car ce codage utilise n^2 mots mémoires. Cela est donc coûteux, mais c'est la façon la plus simple de coder un graphe.

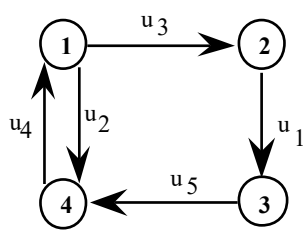
2.3.2. Matrice d'incidence sommets-arcs :

La **matrice d'incidence sommets arcs** N est définie par N_{ij} :

N_{ij} = **1** si le sommet i est extrémité initiale de u_j.

N_{ij} = **-1** si i est extrémité terminale de u_j.

N_{ij} = **0** sinon.



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figure 2.2 : graphe et sa matrice d'incidence

Remarque : La complexité du codage en fonction de n, le nombre de sommets et m, le nombre d'arcs est en O(n x m). Cette matrice est utile quand on a besoin de modéliser les problèmes de graphes par programmation linéaire (flot par exemple).

2.3.3. File des successeurs :

La file des successeurs est formée de 2 tableaux, ALPHA et BETA. BETA est la liste des successeurs des sommets rangés dans l'ordre de leur numérotation, et ALPHA le tableau donnant à un numéro de nœud donné l'emplacement dans le tableau BETA du premier successeur de ce nœud. Cela suppose que les sommets soient numérotés dans l'intervalle [1..n] (n étant le nombre de nœuds du graphe).

Remarques : Les informations relatives aux successeurs du sommet I se trouvent dans le tableau BETA entre les adresses ALPHA(I) et ALPHA(I+1)-1.

La complexité du codage est en O(n + m).

Cette structure est très utilisée, car elle est très économe en place-mémoire pour les graphes peu dense et efficace en temps de calcul, quand on a besoin d'un accès direct aux successeurs des sommets.

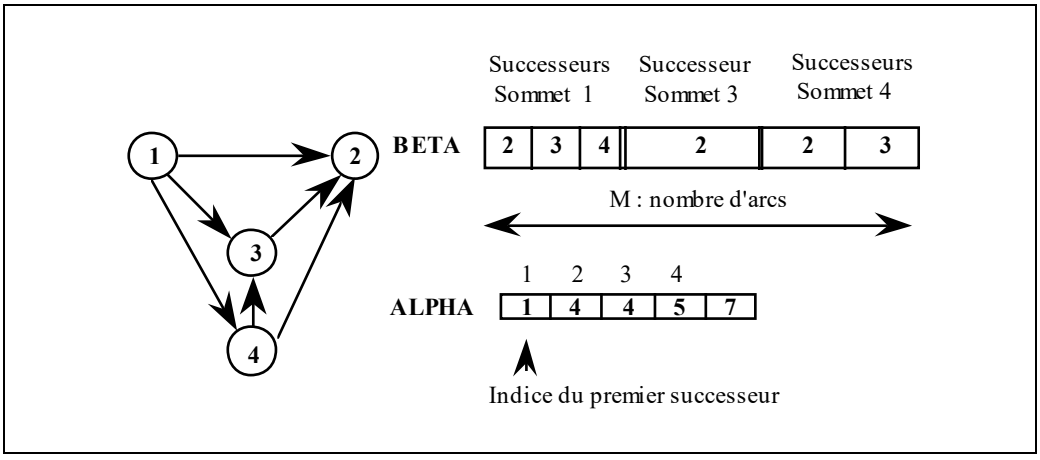


Figure 2.3 : exemple de graphe et de sa file de successeurs

2.3.4. File des prédécesseurs :

Cette file est définie de façon analogue. Elle permet un accès direct aux prédécesseurs.

2.4. Algorithme de bonne numérotation d'un graphe :

Bonne numérotation :

> On dit que numéro(x) (application de X -> [1..n]) est une bonne numérotation si, pour tout arc (x,y) appartenant à U, numéro(x) est strictement plus petit que numéro(y).

Nous allons montrer ci-dessous que pour qu'il existe une bonne numérotation il faut et il suffit que le graphe soit sans circuit. Nous énonçons également un résultat qui nous permet de construire un algorithme de complexité linéaire pour déterminer une bonne numérotation d'un graphe sans circuit.

<u>Proposition 1</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit sans circuit est que tout sous-ensemble de sommets A non vide admette au moins un élément dont tous les prédécesseurs sont dans le complémentaire de A. C'est-à-dire le sous-graphe G_A a au moins un sommet sans prédécesseur.

<u>Démonstration :</u>

Supposons que G ait un circuit $[x_0, x_1, ..., x_r]$. Posons $A = \{x_0, x_1, ..., x_r\}$ et considérons le sous-graphe G_A : tout sommet de G_A appartenant au circuit a au moins un prédécesseur dans A. Il existe donc un ensemble A pour lequel la propriété est fausse. Réciproquement supposons G sans circuit et la propriété fausse. Il existe donc un graphe G_A dont tous les sommets ont au moins un prédécesseur dans A. Partons de x_{i0} dans G_A , x_{i0} a un prédécesseur $x_{i1}...x_{ih-1}$ a un prédécesseur x_{ih}. On peut donc construire un chemin $[x_{in}, x_{in-1}, ...x_{i0}]$. Le graphe ayant n sommets distincts,

deux sommets de ce chemin sont identiques. Ce graphe à donc un circuit ce qui est absurde. (Q.E.D.).

Proposition 2 :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit sans circuit est qu'il existe une bonne numérotation.

Démonstration :

Si G a un circuit $[x_{i0}, x_{i1},...., x_{ip}, x_{i0}]$, il ne peut pas exister de bonne numérotation car sinon on aurait : numéro(x_{i0}) < numéro(x_{i1}) < ..... < numéro(x_{ip}) < numéro(x_{i0}).

On démontre le réciproque par récurrence sur le nombre de sommets du graphe. Il est clair que si G ne contient qu'un sommet et il n'a pas de circuit (donc pas de boucle) il existe bien une bonne numérotation. Supposons maintenant que la propriété, c.à.d. tout graphe sans circuit d'au plus K sommets admet une bonne numérotation, est vérifiée pour K = n-1 et prouvons la pour K = n. Si G a n sommets et n'a pas de circuit, il existe un sommet sans prédécesseur, d'après la proposition 1, en prenant A = X. On numérote 1 ce sommet et on raisonne sur le sous-graphe obtenu en l'enlevant. Ce sous-graphe a n-1 sommets. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il a une bonne numérotation. On utilise cette bonne numérotation pour numéroter 2, …, n, ces sommets, ce qui permet d'obtenir une bonne numérotation globale. (Q.E.D.).

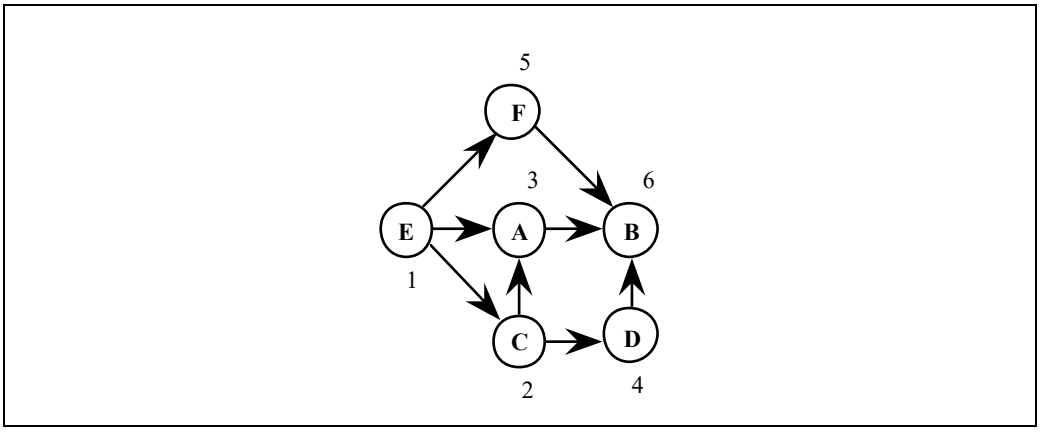


Figure 2.4 : exemple de bonne numérotation.

L'algorithme NUMEROTER ci-dessous permet de bien numéroter les sommets d'un graphe sans circuit. Le graphe a initialement une numérotation arbitraire. Il est codé par la file des successeurs.

ALGORITHME NUMEROTER :

(i) Initialisation

Lire N, M, ALPHA, BETA.{ALPHA est un tableau de dimension N+1 et BETA, de dimension M}

(ii) Calcul du nombre de prédécesseurs de chaque sommet

```
Pour I = 1  à N  faire NOMBRE(I) = 0
Pour K = 1 à M  faire
Début
        I = BETA(K)
        NOMBRE(I) = NOMBRE(I) + 1
Fin
```

(iii) Initialisation de la pile des sommets sans prédécesseur

```
SOMMET = 0
Pour I = 1 à N  faire
Début
    Si NOMBRE(I) = 0 faire
    Début
        SOMMET = SOMMET + 1
        PILE(SOMMET) = I
    Fin
Fin
```

(iv) Numérotation des sommets

```
Pour J = 1 à N
Début
    I = PILE(SOMMET)
    SOMMET = SOMMET - 1
    NUMERO(I) = J
    Pour H = ALPHA(I)  à  ALPHA(I+1) - 1
        Début
        L = BETA(H)
        NOMBRE(L) = NOMBRE(L) - 1
        Si NOMBRE(L) = 0  alors
            Début
            SOMMET = SOMMET + 1
            PILE(SOMMET) = L
            Fin
        Fin
Fin
```

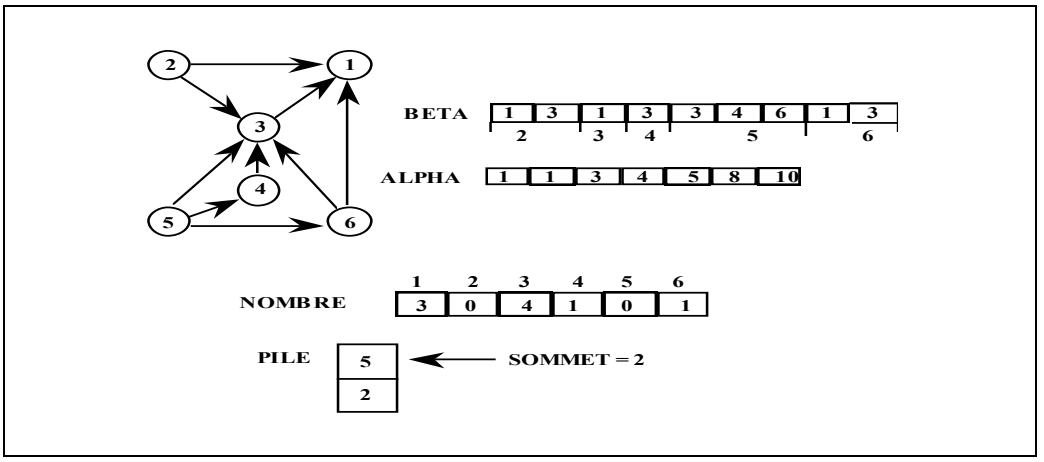


Figure 2.5 : graphe de départ avec initialisation de NOMBRE et PILE

Application Numérique :

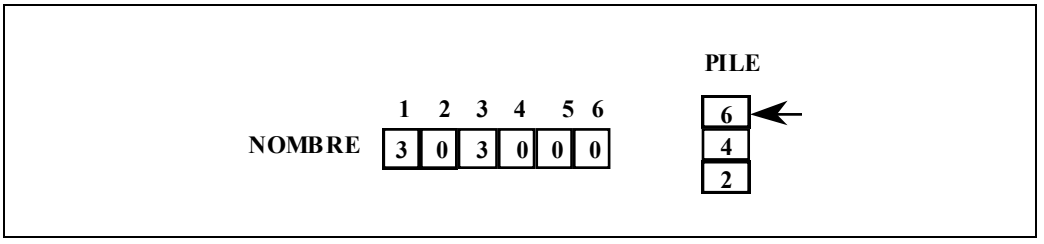


Figure 2.6 évolution de la pile et du tableau après la numérotation de 5

Lors de la numérotation de 5 on obtient :

```
I = 5
NUMERO(5) = 1
Pour H = 5 à 7
L = 3
NOMBRE(3) = NOMBRE(3) - 1
L = 4
NOMBRE(4) = 0    (Sommet 4  --> PILE)
L = 6
NOMBRE(6) = 0   (Sommet 6  --> PILE)
etc..
```

Complexité de l'Algorithme :

(i) Initialisation :

Lire N et M est en **O(1)**. Lire BETA et ALPHA est en **O(N + M)**.

(ii) Calcul de Nombre :

La première boucle est en **O(N)** alors que la deuxième boucle est en **O(M).**

(iii) Pile :

La première instruction est en **O(1)** alors que la boucle est en **O(N).**

(iv) Numérotation :

La boucle est en **O(N)** pour les trois premières instructions. Les autres instructions sont en **O(M)** car la boucle correspondant à H revient à parcourir une fois le tableau BETA.

Complexité totale :

La complexité totale est **O(M)** car :

O(N) + O(M) = O(N+ M) et O(N) + O(1) = O(N).

En général, on suppose que N-1 ≤ M, d'où O(N) + O(M) = O (Max (N, M)) = O(M).

2.5. Recherche d'un couplage maximal :

Nous allons étudier dans ce paragraphe les définitions et les propriétés des couplages, en particulier la notion de chaîne améliorante. On verra qu'un couplage est maximal si et seulement si le graphe ne contient pas de chaîne améliorante. Les algorithmes de recherche d'un couplage maximal sont fondés sur ce résultat. Nous présentons ci-dessous un tel algorithme pour le cas particulier des graphes bipartis de complexité $O(n^3)$. Signalons l'existence d'algorithmes polynomiaux dans le cas général, mais ces algorithmes sont trop techniques pour être présentés dans ce cours.

2.5.1. Couplage :

Couplage :

Un couplage **C** est un ensemble d'arêtes (resp. d'arcs) ne contenant pas deux arêtes (resp. arcs) adjacentes à un même sommet. Les arcs du couplage seront dits épais les autres minces.

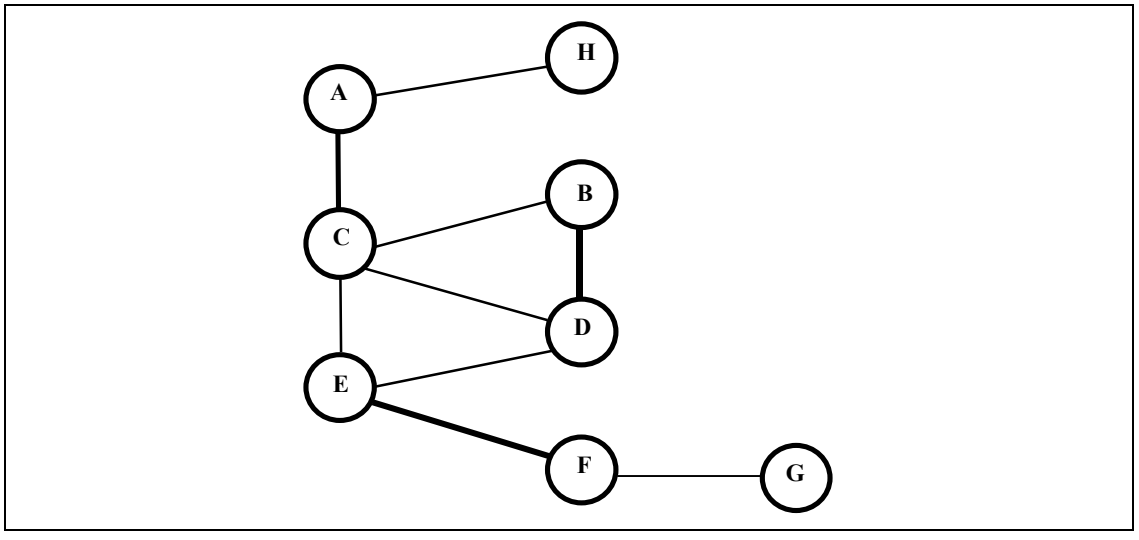


Figure 2.7 : un couplage de cardinal 3.

Transversal :

Un transversal **T** d'un graphe est un sous-ensemble de sommets rencontrant au moins une fois chaque arête du graphe.

Sommet saturé, insaturé :

Pour un couplage **C** un sommet est dit saturé si un arc du couplage est adjacent à ce sommet sinon il est dit insaturé.

Chaîne alternée, améliorante :

Une chaîne alternée d'un couplage **C** est une chaîne du graphe dont les arcs sont alternativement dans le couplage et hors du couplage. Une chaîne améliorante est une chaîne alternée reliant deux sommets insaturés.

Remarque : une chaîne améliorante est de longueur impaire et contient h arcs épais et h+1 arcs minces. Pour améliorer le couplage on retire de **C** les arcs épais de cette chaîne et on les remplace par ses arcs minces.

Sur la figure 2.7, **C** = {AC, BD, EF} est un couplage de cardinal 3. Les sommets A, B, C, D, E, F sont saturés et les sommets H et G sont insaturés.

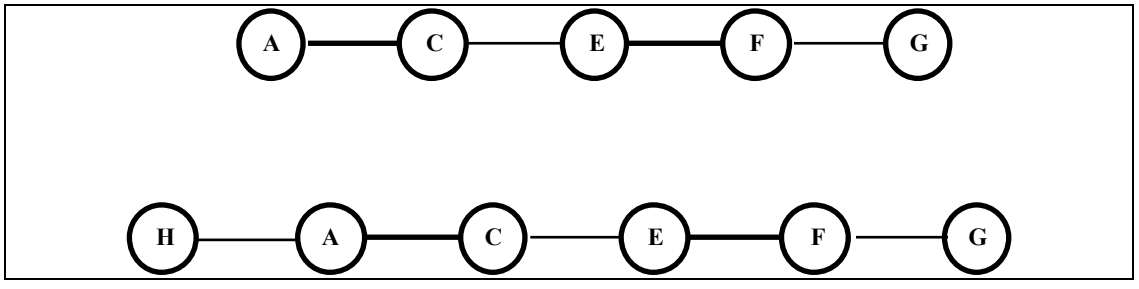


Figure 2.8 : Chaîne alternée et chaîne améliorante

Sur la figure 2.8, [A, C, E, F, G] et [H, A, C, E, F, G] sont des chaînes alternées. [H, A, C, E, F, G] est améliorante car elle relie 2 sommets insaturés. Cette chaîne permet de passer du couplage **C** = {AC, BD, EF} de cardinal 3 au couplage **C'** = {HA, CE, FG, BD} de cardinal 4. **C'** est un couplage de cardinal maximal car tous les sommets du graphe sont saturés (Cf figure 2.9).

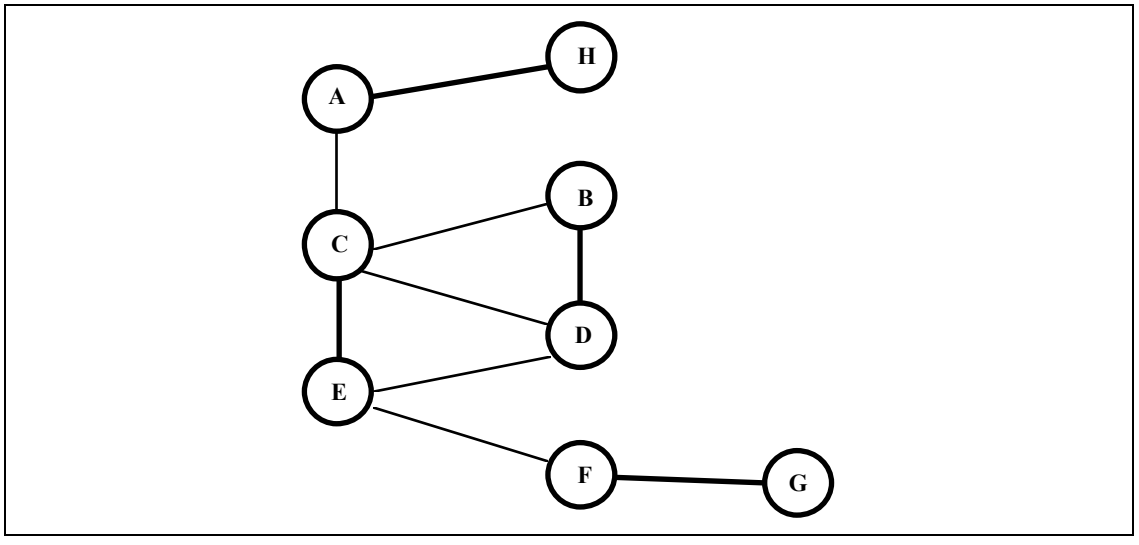


Figure 2.9 : couplage maximal.

2.5.2. Théorème de BERGE :

Théorème de BERGE :

> Un couplage est de cardinal maximal si et seulement si le graphe ne contient pas de chaîne améliorante pour ce couplage.

Preuve :

Condition nécessaire : s'il existe une chaîne améliorante elle contient p arcs épais et p+1 arcs minces, on améliore donc le couplage en remplaçant les arcs épais de cette chaîne par les arcs minces de cette chaîne.

Condition suffisante : soit G=(X,U) un graphe, C_0 un couplage de G de cardinal maximal et C_1 un couplage de G sans chaîne améliorante.

Posons $D_0 = C_0 - C_0 \cap C_1$ et $D_1 = C_1 - C_0 \cap C_1$.

On raisonne sur le graphe H=(X, $D_0 \cup D_1$). Les sommets du graphe H sont de degré 0, 1 ou 2, car en un sommet au plus 2 arcs sont incidents : un arc de D_0 et un arc de D_1. En conséquence les composantes connexes de H sont, soit des sommets isolés, soit des chaînes comportant alternativement des arcs de D_0 (donc de C_0) et des arcs de D_1 (donc de C_1), c'est-à-dire des chaînes alternées pour C_0 et C_1. Si une de ces chaînes était de longueur impaire, elle serait améliorante pour C_0 ou pour C_1, ce qui est impossible par hypothèse. Ces chaînes sont donc de longueurs paires et comportent autant d'éléments de D_0 que d'éléments de D_1. Les ensembles D_0 et D_1 sont donc de même cardinal. En conséquence les ensembles C_0 et C_1 sont de même cardinal. Il en résulte que C_1 est de cardinal maximal.

2.5.3. Algorithme dans le cas d'un graphe biparti :

Le théorème de BERGE fournit une méthode pour chercher un couplage maximal. Il suffit en effet de chercher successivement des chaînes améliorantes et de les utiliser pour améliorer le couplage. Le couplage sera maximal quand il n'y aura plus de chaîne améliorante.

Nous présentons ici un algorithme dans le cas des graphes bipartis.

2.5.3.1. Algorithme COUPLAGE MAX :

Début.

Etape 0 : Initialisation

Lire les données - un graphe biparti G=(X,Y,U) ainsi qu'un couplage initial C (éventuellement C est vide);

Etape 1 : Recherche d'une chaine améliorante et amélioration du couplage

Marquer * tout sommet insaturé x dans X ;

Tant qu'il existe un sommet i marqué non examiné faire:

Début

(a) Si i = x $\in$ X faire

Pour chaque arête [x, y] $\notin$ C incidente au sommet x faire:

Si y n'est pas marqué alors marquer y par x;

(b) Sinon, (i = y ∈ Y) faire :

Si y est insaturé, (il est extrémité d'une chaîne améliorante):

début

Améliorer le couplage C en inversant la chaîne améliorante obtenue;

Effacer les marques;

Marquer * tout sommet insaturé x dans X ;

fin

Sinon

début

Déterminer l'unique arête [x, y] ∈ C;

Marquer x par y;

fin;

Fin (Tant que.)

Etape 2 : Fin.

Ecrire le couplage maximal C.

Fin

2.5.3.2. Application de l'algorithme :

Considérons le graphe biparti G = (X, Y, U) avec X = {a, b, c, d, e} et Y = {1, 2, 3, 4, 5) rapporté sur la figure 2.10.

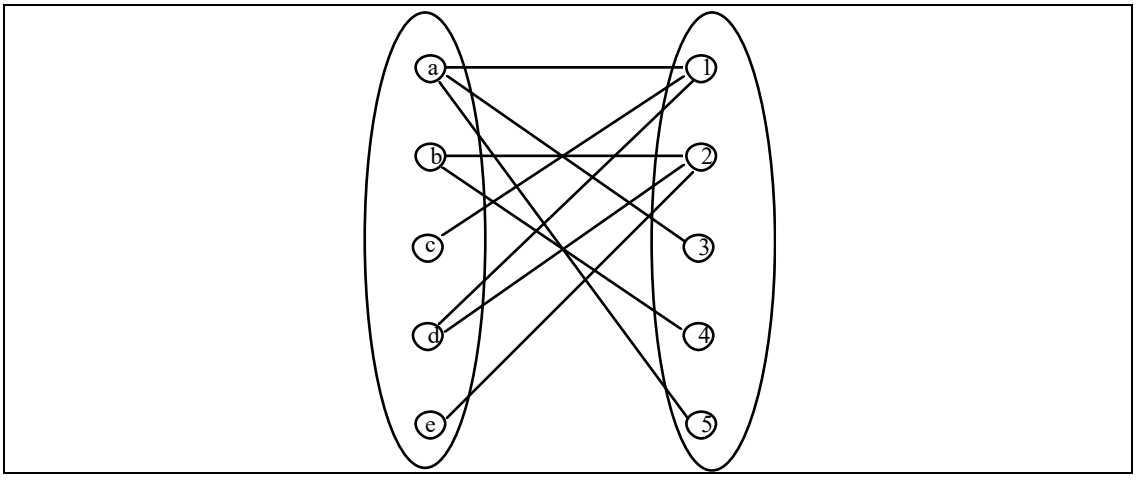


Figure 2.10 : exemple.

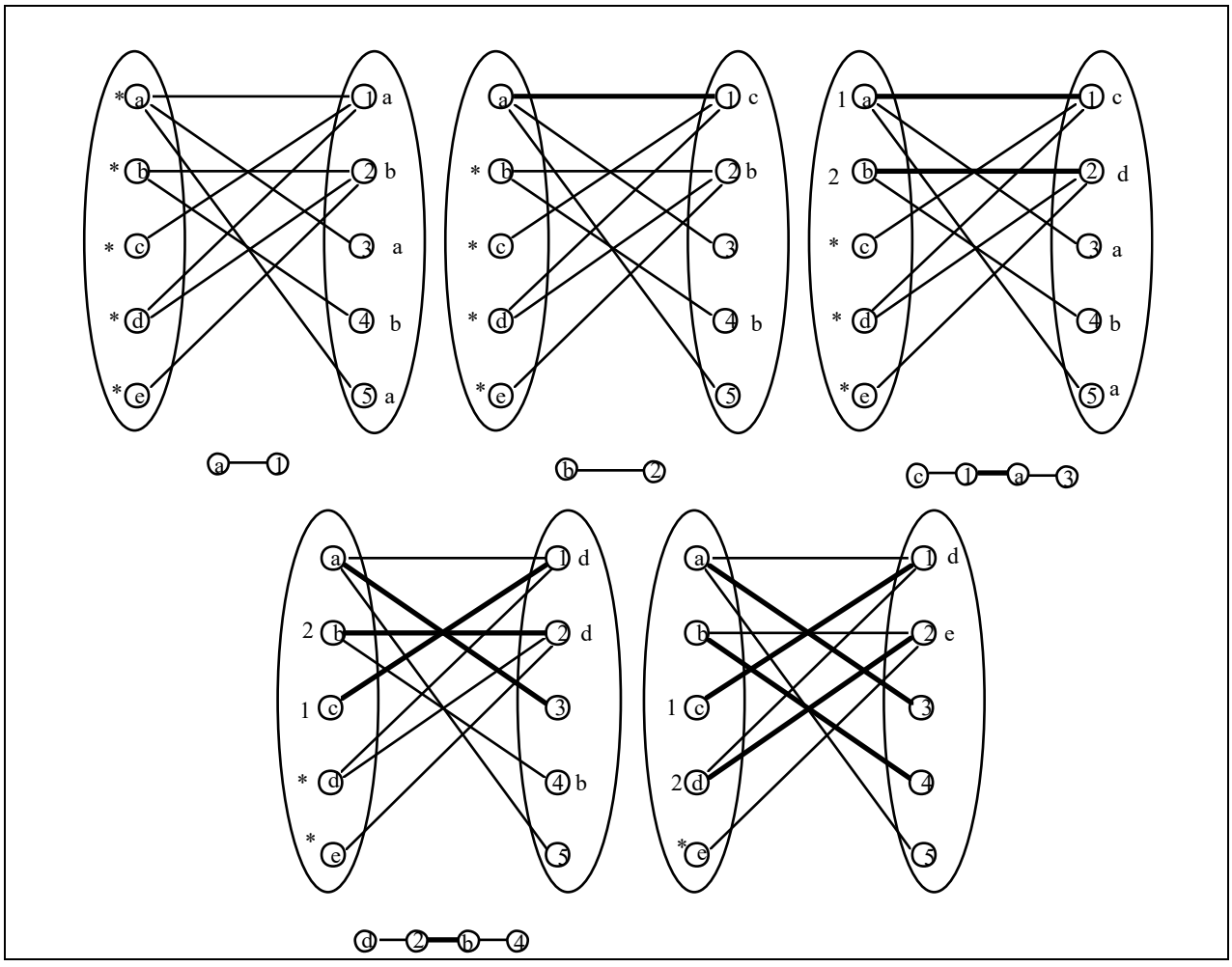


Figure 2.11 : application de l'algorithme.

On part initialement du couplage formé de l'ensemble vide et on modifie ce couplage à l'aide de chaînes améliorantes successives jusqu'à obtenir un couplage sans chaîne améliorante qui sera maximal d'après le théorème de BERGE.

Sur la figure 2.11 sont rapportées les étapes successives de l'algorithme en appliquant la règle suivante : premier sommet marqué, premier examiné.

2.5.3.3. Structures de données :

On suppose que le graphe biparti et le couplage sont codés par un tableau TAB tel que, pour $x \in X$ et $y \in Y$, TAB(x,y) = (0 si $[x,y] \notin U$) ou (1 si $[x,y] \notin C \cap U$) ou (2 si $[x,y] \in C \cap U$).

Si on suppose sans perte de généralité que Cardinal(X) = Cardinal(Y) = N/2, le tableau TAB est de dimension $N^2/4$.

Le tableau TAB permet la lecture de données et servira de tableau de travail pour le couplage. Enumérons les autres tableaux qui seront utiles pour cet algorithme. Un tableau SATURE (de taille N) servira à noter les sommets saturés. Un tableau MARQUE de taille N sert à stocker les marques des sommets. Il sera initialisé à -1 (aucune marque), on mettra 0 quand un sommet est marqué * par l'algorithme sinon il contiendra la marque du sommet. Un tableau FILE permettra de stocker les sommets marqués non examinés (règle : premier marqué, premier examiné). FILE permet un accès direct. Un tableau CHAINE permettra de reconstituer la chaîne améliorante.

2.5.3.4. Complexité de l'algorithme :

La complexité de l'étape de l'initialisation est $O(N^2)$ (lecture d'une matrice).

Etape 1. On s'intéresse d'abord aux itérations qui n'incluent pas d'améliorations de chaine améliorante. Le marquage initial coute O(N). Une itération de (a) dans la boucle Tant Que coûte O(N) car il faut parcourir une ligne de la matrice TAB. Une itération de (b) quand y est saturé coûte O(N) car il faut lire la ligne x de la matrice TAB. Une étape (b) quand y est insaturé coûte O(N). Ainsi, pour obtenir une chaine améliorante coûterait alors $O(N^2)$ et il y a aura au plus N/2 chaines améliorantes ce qui donne une complexité de $O(N^3)$ pour l'étape 1. La complexité de l'étape 2 est $O(N^2)$ car on doit parcourir la structure TAB pour retrouver toutes les arêtes du couplage. Donc la complexité de l'algorithme est $O(N^3)$.

2.5.3.5. Preuve de l'algorithme :

Nous allons prouver que cet algorithme détermine dans l'étape 1 une chaîne améliorante si et seulement s'il en existe. Ensuite on améliore le couplage. Donc en partant du couplage vide et après au plus N/2 opérations on obtiendra un couplage sans chaîne améliorante qui sera optimal d'après le théorème de BERGE.

Remarquons d'abord qu'une chaîne améliorante étant de longueur impaire relie un sommet de X à un sommet de Y (graphe biparti). On peut donc partir de X et chercher les chaînes alternées issues d'un sommet insaturé de X. Une chaîne améliorante sera une telle chaîne dont le dernier sommet qui est dans Y est un sommet insaturé.

Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : si $y \in Y$ (resp. $x \in X$) est un des p premiers sommets marqués il est extrémité d'une chaîne alternée issue d'un sommet $x_1 \in X$ insaturé de longueur impaire (resp. paire) dont la dernière arête est mince (resp. épaisse).

La propriété est vraie initialement : seuls sont marqués les sommets de X insaturés et les chaînes correspondantes sont de longueur nulle. Montrons que si la propriété est vraie à l'ordre p elle reste vraie à l'ordre p+1. Notons j le $p+1^{ème}$ sommet marqué et i sa marque et examinons deux cas :

• $i = x \in X$ ($j = y \in Y$) alors par hypothèse de récurrence, x est extrémité d'une chaîne alternée issue d'un sommet $x_1 \in X$ insaturé de longueur paire dont la dernière arête est épaisse. En concaténant à cette chaîne l'arête (x, y) on obtient une chaîne alternée issue d'un sommet $x_1 \in X$ insaturé de longueur impaire dont la dernière arête est mince et allant à j = y (l'arête (xy) est mince car y est marqué en 1(a) de l'algorithme).

• $i = y \in Y$ ($j = x \in X$) alors par hypothèse de récurrence, y est extrémité d'une chaîne alternée issue d'un sommet $x_1 \in X$ insaturé de longueur impaire dont la dernière arête est mince. En concaténant à cette chaîne l'arête (x, y) on obtient une chaîne alternée issue d'un sommet $x_1 \in X$ insaturé de longueur paire dont la dernière arête est épaisse et allant à j = x (l'arête (x, y) est épaisse car x est marqué en 1(b) de l'algorithme).

La propriété est donc vraie dans les deux cas ce qui est démontré par récurrence.

Définissons M comme l'ensemble des sommets marqués à la fin de l'étape 1 et montrons que M est alors exactement l'ensemble des sommets extrémités d'une chaîne alternée issue d'un sommet $x_1 \in X$ insaturé. D'après la propriété démontrée par récurrence tous les sommets de M ont cette propriété. Il faut montrer que réciproquement un sommet ayant cette propriété est dans M.

Avant de le prouver, remarquons que, quand on arrive à l'étape 2, les sommets de M appartenant à Y sont saturés. Il résultera de cette réciproque qu'il n'existe pas de chaîne alternée reliant un sommet insaturé de X à un sommet insaturé de Y, ce qui prouvera le résultat, à savoir qu'il n'y a pas de chaîne améliorante et que le couplage est maximal.

Soit donc k un sommet relié par une chaîne alternée à un sommet $x_1 \in X$ insaturé. On définit j comme le premier sommet de cette chaîne n'appartenant pas à M (un tel sommet existe car par hypothèse $k \notin M$). De deux choses l'une, ou bien $j = x \in X$ ou bien $j = y \in Y$. Montrons que dans l'un et l'autre cas on arrive à une contradiction. Nous notons i l'antécédent de j sur cette chaîne.

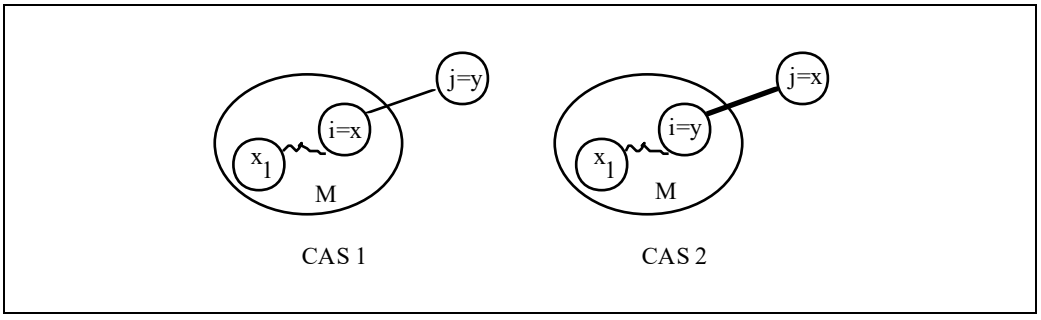


Figure 2.12 : Les deux cas possibles

Dans le premier cas (Cf. figure 2.12) la chaîne allant jusqu'à y est de longueur impaire. Donc quand on examine x, on marque y (l'arête (x, y) est mince car la chaîne est alternée). Ceci contredit le fait que j = y n'est pas marqué.

Dans le second cas (Cf. figure 2.12) la chaîne allant jusqu'à x est de longueur paire. Donc quand on examine y, on marque x (l'arête (x, y) est épaisse car la chaîne est alternée). Ceci contredit le fait que j =x n'est pas marqué.

En conséquence quand on arrive à l'étape 2, on a bien marqué tous les sommets reliés à un sommet insaturé $x_1 \in X$ par une chaîne alternée. On a vu par ailleurs que les sommets de $M \cap Y$ ayant cette propriété sont saturés. Il en résulte qu'il n'existe pas de chaîne améliorante, c'est-à-dire de chaîne alternée reliant un sommet insaturé $x_1 \in X$ à un sommet insaturé $y \in Y$. Le couplage est donc maximal. Q.E.D.

2.6. Autres algorithmes de graphe :

Tarjan a proposé des algorithmes de complexité linéaire (O(M)) pour la recherche des composantes connexes (Cf. T.D) et pour la recherche des composantes fortement connexes. Il a également développé un algorithme de complexité linéaire pour reconnaitre un graphe planaire.

Nous discuterons dans le chapitre suivant de la complexité de la recherche d'un circuit hamiltonien, du coloriage d'un graphe, et du nombre de stabilité.

3. COMPLEXITE DES PROBLEMES COMBINATOIRES :

3.1. Qu'est-ce-que l'optimisation combinatoire ? :

Jusqu'au 19e siècle, on s'intéressait aux **Problèmes d'existence**. On répondait à la question : existe-t-il un objet ayant certaines propriétés ?

Ensuite, on a résolu des **Problèmes de dénombrement** (Analyse combinatoire). On répondait à la question : combien y a-t-il d'objets ayant certaines propriétés ?

Enfin avec l'informatique, on traite des **Problèmes combinatoires.** On se propose de déterminer un objet ayant certaines propriétés, on cherche un algorithme calculant un objet.

3.2. Différents types de problèmes :

Nous énonçons ci-dessous une liste de problèmes combinatoires.

Problème du plus court chemin $O(n^3)$:

Soit G un graphe valué et x_0 une racine de G; déterminer les valeurs minimales des chemins allant de x_0 à tout sommet du graphe.

Problème du plus petit nombre O (n) :

Déterminer le plus petit nombre parmi n nombres.

Problème de tri O(nlogn) :

Ordonner en ordre croissant n nombres $a_1, a_2, ..., a_n$.

Problème de l'arbre minimal $O(n^3)$:

Soit G = (X, U) un graphe valué (non orienté); déterminer un graphe connexe de coût global minimal.

Problème d'affectation $O(n^3)$ (Algorithme Hongrois) :

Etant donné une matrice W(n, n) représentant les coûts d'affectation de n individus à n travaux, il faut affecter un travail différent à chaque individu pour un coût global minimal.

	T1	T2	T3
P1	6	5	8
P2	15	20	14
P3	8	5	3

Figure 3.1 : matrice des coûts.

Pour la matrice de la figure 3.1, l'affectation (P_1, T_1) (P_2, T_2) (P_3, T_3) est de coût 29. L'affectation (P_1, T_2) (P_2, T_1) (P_3, T_3) est optimale et a pour coût 23.

Problème de partition :

Etant donné n nombres a_1, a_2, ..., a_n, est-il possible de partitionner ces n nombres en deux sous-ensembles de même poids ?

Exemple :

Pour l'ensemble {8, 6, 15, 37, 42 ,4}, la réponse est oui car 8 + 6 + 42 = 15 + 37 + 4 = 56.

Problème du stable maximum :

Soit G = (X , U) un graphe, déterminer un stable de G de cardinal maximal.

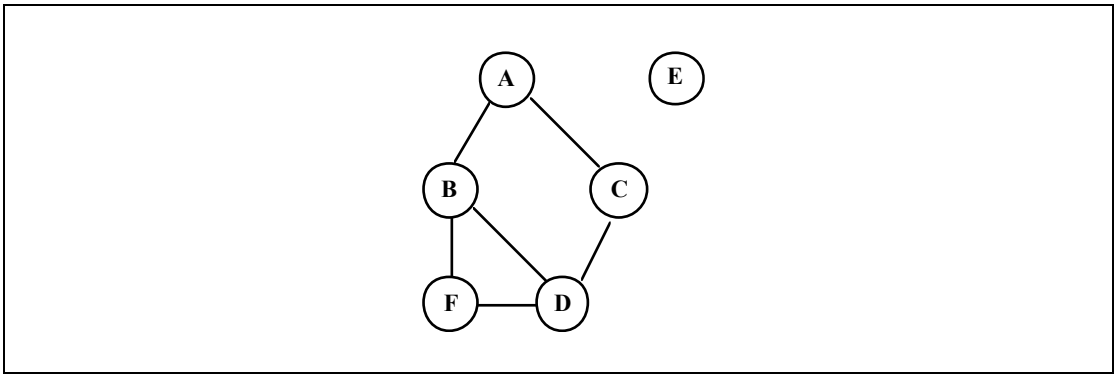


Figure 3.2 : graphe.

Sur le graphe de la figure 3.2, {E, A, F} est un stable de cardinal maximal.

Problème du voyageur de commerce :

Soit G = (X , U) un graphe valué, déterminer un circuit hamiltonien de valeur minimale.

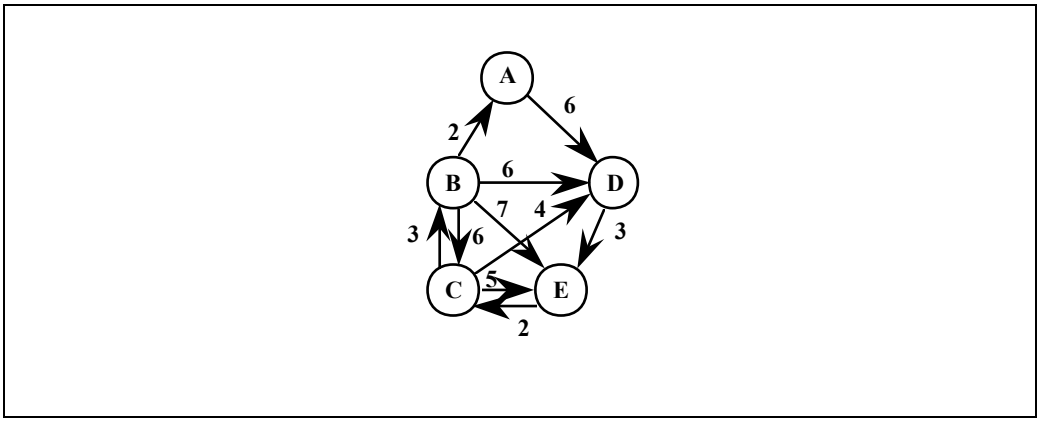


Figure 3.3 : un graphe valué.

Sur la figure 3.3, [A, D, E, C, B, A] est un circuit hamiltonien de valeur minimale.

Problème de satisfiabilité :

Etant donné une fonction booléenne sous une forme conjonctive, existe-t-il une affectation des variables rendant vraie cette fonction ?

Exemple :

Pour la fonction donnée par : $(x_1 + x_2 + \neg x_3)\ (\neg x_2)\ (x_3 + x_1)\ (x_3 + x_2) = 1$, la réponse est oui car $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_1 = 1$ est solution. De plus cette solution est unique.

3.3. Quand un problème est-il résolu ?

Pour chaque problème, il y a un nombre fini de solutions (1). On peut donc semble-t-il énumérer toutes ces solutions pour déterminer une solution optimale (ou une solution réalisable). Par exemple, pour le problème du voyageur de commerce : il y au plus (n-1)! circuits hamiltoniens, pour le problème de satisfiabilité : il y a au plus 2^n affectations, pour le problème de partition : il y a 2^{n-1} solutions.

Il est irréaliste d'avoir recours à une méthode d'énumération dans le domaine combinatoire quand la complexité résultante est exponentielle.

Le tableau suivant rapporte les durées d'énumération, si l'on dispose d'un ordinateur calculant chaque solution en une microseconde (10^{-6} s).

	10	20	40	60
n	10^{-5}s	2.10^{-5}s	4.10^{-5}s	6.10^{-5}s
n^2	10^{-4}s	4.10^{-4}s	16.10^{-4}s	36.10^{-4}s
n^3	10^{-3}s	8.10^{-3}s	64.10^{-3}s	216.10^{-3}s
n^5	0,1s	3,2s	1,7 mn	13 mn
2^n	10^{-3}s	1s	12,7 jours	366 siècles
3^n	0,059s	58 mn	3855 siècles	$1,3.10^{13}$siècles
n!	3,63s	100 siècles	...	...

Les algorithmes efficaces sont principalement les algorithmes de complexité polynomiale (2).

On dira qu'un problème est bien résolu si on a trouvé un algorithme polynomial (de faible degré) le résolvant (3).

On peut aussi étudier la variation de la taille maximum que l'on peut traiter en 1000s quand on multiplie par 10 la puissance de la machine :

T(n)	Taille maximum pour 1000s avec la première machine	Taille maximum pour 1000s avec la seconde machine	Augmentation
100n	10	100	x 10
$10n^2$	10	32	x 3,2
n^3	10	22	x 2,2
2^n	10	13	x 1,3

(1) La finitude du nombre de solutions garantit l'existence d'algorithmes de résolution, c'est-à-dire de programmes s'arrêtant. Il n'en est pas toujours ainsi en informatique où certains problèmes sont indécidables, c'est-à-dire non traitables par un programme en un temps fini.

(2) On évaluera dans ce cours la complexité en se plaçant dans le plus mauvais cas. Toutefois, quand un algorithme tourne fréquemment, il serait préférable de faire une analyse en moyenne. Malheureusement une telle analyse est très difficile et même hors de portée pour des programmes moyennement complexes.

(3) On peut en première approximation négliger les coefficients du polynôme dans la mesure où l'expérience montre que la plupart des algorithmes polynomiaux ont des petits coefficients. Il existe toutefois des exceptions pour lesquelles même des algorithmes linéaires sont impraticables (Cf : Théorie de ROBERTSON et SEYMOUR).

3.4. Les problèmes NP-difficiles :

On n'a pas trouvé d'algorithmes polynomiaux pour les problèmes de la partition, du stable maximal, du voyageur de commerce et de la satisfiabilité. Il en est de même pour un très grand nombre d'autres problèmes. On n'a pas montré qu'il n'existait pas d'algorithme polynomial pour un de ces problèmes, mais on a le résultat suivant: “Si un seul de ces problèmes est polynomial alors tous les problèmes "raisonnables" réputés difficiles sont polynomiaux”. Ces problèmes sont dits NP-difficiles.

3.5. Méthodes arborescentes :

Les **méthodes arborescentes** permettent de résoudre des problèmes **NP-difficiles**. Toutefois, il ne sera pas possible d'évaluer la complexité pratique de ces méthodes car cette complexité est fortement fonction de la donnée du problème. Elle est d’ailleurs en général exponentielle pour certaines données, mais peut être "praticable" pour d’autres données.

3.5.1. Les Dames de Gauss :

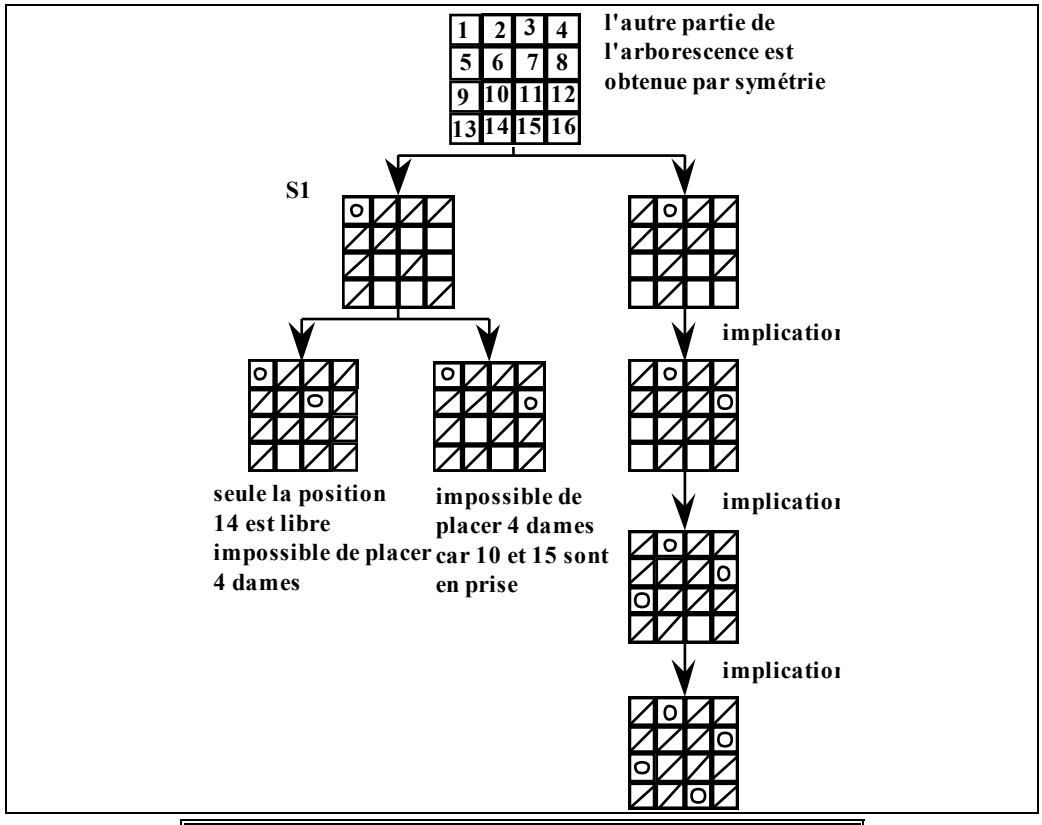


Figure 3.4 : arborescence des dames de Gauss.

A la **racine** correspond l'ensemble de toutes les solutions. Au **sommet S1** correspond l'ensemble de toutes les solutions telles que la dame sur la première ligne est sur la case n°1. A tout sommet correspond un ensemble de solutions.

Il s'agit de placer **n dames** (ici n = 4) sur un **échiquier n×n** de façon à ce que deux dames quelconques ne soient pas en prise. Pour résoudre ce problème, on construit une **arborescence** dont la racine correspond à l'ensemble des solutions du problème. On examine les différents cas possibles en construisant une arborescence (Cf. Figure 3.4), sur laquelle apparaît une solution, l’autre s’obtenant par symétrie.

3.5.2. Méthode de LITTLE pour le problème du voyageur de commerce :

Un voyageur de commerce doit visiter n villes. Il faut choisir un ordre de parcours minimisant la distance totale parcourue, c'est-à-dire trouver un circuit hamiltonien de valeur minimale. Pour résoudre ce problème, on va construire une arborescence dichotomique, comme on peut le voir sur la figure 3.5.

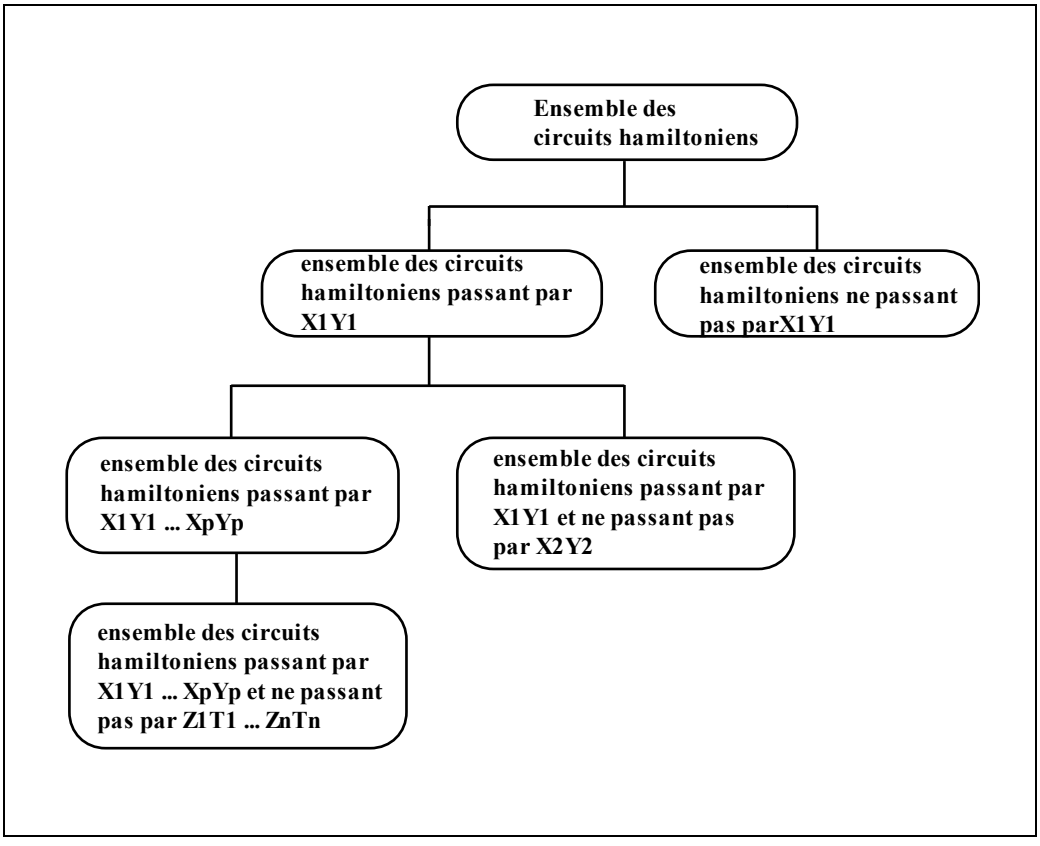


Figure 3.5 : arborescence dichotomique.

Nous allons nous appuyer sur un exemple dont les données sont rapportées sur la figure 3.6 pour expliquer la méthode de Little. Remarquons d'abord qu'à un circuit hamiltonien correspond exactement un élément par ligne et un élément par colonne de la matrice d'adjacence. Donc, on ne modifie pas le problème si ligne par ligne on soustrait le minimum de chaque ligne, puis colonne par colonne, le minimum de chaque colonne.

	A	B	C	D	E	F
A	∞	6	7	3	1	3
B	7	∞	8	2	9	7
C	5	10	∞	10	1	7
D	8	6	5	∞	5	1
E	7	7	6	7	∞	4
F	9	8	8	5	3	∞

Figure 3.6 : matrice d'adjacence valuée.

En soustrayant en ligne, on obtient le tableau du milieu de la figure 3.7, et en soustrayant en colonne le tableau de droite.

	A	B	C	D	E	F	
A	∞	6	7	3	1	3	1
B	7	∞	8	2	9	7	2
C	5	10	∞	10	1	7	1
D	8	6	5	∞	5	1	1
E	7	7	6	7	∞	4	4
F	9	8	8	5	3	∞	3
							12

	A	B	C	D	E	F	
A	∞	5	6	2	0	2	
B	5	∞	6	0	7	5	
C	4	9	∞	9	0	6	
D	7	5	4	∞	4	0	
E	3	3	2	3	∞	0	
F	6	5	5	2	0	∞	
	3	3	2	0	0	0	8

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	4	2	0	2
B	2	∞	4	0	7	5
C	1	6	∞	9	0	6
D	4	2	2	∞	4	0
E	0	0	0	3	∞	0
F	3	2	3	2	0	∞

Figure 3.7 : apparition des zéros par ligne et par colonne.

Le **circuit Hamiltonien** aura une valeur supérieure à **20** car on a soustrait 12 en lignes et 8 en colonnes. 20 est une évaluation par défaut de la valeur optimale pour la matrice initiale. On va travailler sur la matrice réduite, pour laquelle les circuits hamiltoniens ont tous une valeur translatée de 20. On cherche à construire un circuit hamiltonien de valeur zéro (d'où forcément optimal car les valeurs sont positives). Donc pour construire l'arborescence d'énumération, on va choisir des arcs de valuation **0**.

Pour sélectionner un de ces arcs, on introduit la **notion de regret**. On choisira un 0 de **regret maximal**. Par exemple, si on ne prend pas l'arc **AE**, on prendra obligatoirement un autre élément de la ligne A et un autre élément de la colonne E. Le coût supplémentaire ici 2, s'appelle **le regret**. Ce regret se calcule en sommant les minima en ligne et en colonne (le 0 sur lequel on calcule le regret étant exclu). En effet, si on ne passe pas par cet arc de valeur 0, on ne pourra au mieux que passer par deux arcs de coût minimum des ligne et colonne correspondantes, il en coûtera le regret.

	A	B	C	D	E	F
A	∞				0^{2+0}	
B		∞		0^{2+2}		
C			∞		0^{1+0}	
D				∞		0^{2}
E	0^{1}	0^{2}	0^{2}		∞	0^{0}
F					0^{2}	∞

Figure 3.8 : matrice des regrets.

Les regrets des différents 0 sont rapportés sur la figure 3.8. Il apparaît que BD est le 0 de plus grand regret. On choisit de prendre l'arc BD, et on introduit deux nouveaux sommets dans l'arborescence (Cf. figure 3.9). Le sommet BD correspond à l'ensemble des circuits hamiltoniens empruntant l'arc BD et le sommet ¬BD à l'ensemble des circuits hamiltoniens n'empruntant pas l'arc BD. Le sommet BD a une évaluation par défaut de 20, le sommet ¬BD a une évaluation par défaut de 24, c'est-à-dire 20 plus le regret.

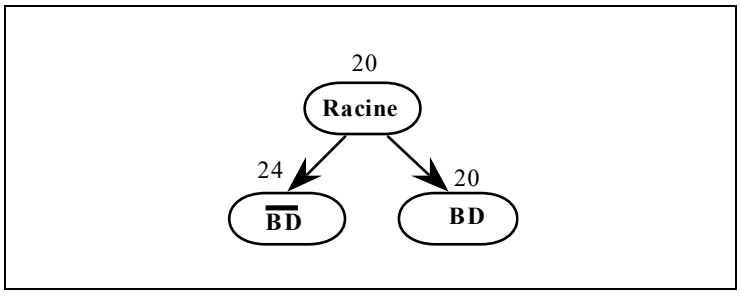


Figure 3.9 : arborescence courante après la première séparation.

Dans la matrice associée au sommet BD, on doit interdire l'arc **DB** en posant **M (D, B)** = +∞, afin d'éviter le circuit parasite [D, B, D], et réitérer le processus. Sur la figure 3.10, on a sur la gauche la matrice associée au sommet BD de l'arborescence, et à droite les regrets obtenus en éliminant la ligne D et la colonne B.

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	4	~~2~~	0	2
B	~~2~~	~~∞~~	~~4~~	~~0~~	~~7~~	~~5~~
C	1	6	∞	~~9~~	0	6
D	4	∞	2	~~∞~~	4	0
E	0	0	0	~~3~~	∞	0
F	3	2	3	~~2~~	0	∞

	A	B	C	E	F
A				0^2	
C				0^1	
D					0^2
E	0^1	0^2	0^2		0^0
F				0^2	

Figure 3.10 : matrices associées au sommet BD.

On choisit un 0 de plus grand regret et on introduit deux nouveaux sommets dans l'arborescence courante (Cf. figure 3.11), AE et ¬AE.

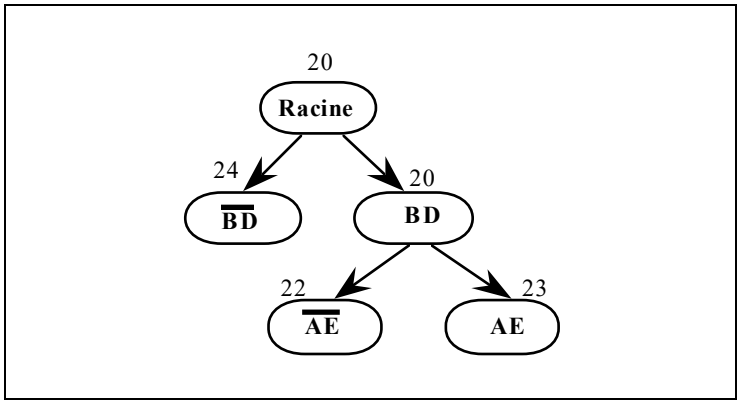


Figure 3.11 : état suivant de l'arborescence courante.

La matrice associée au sommet AE après interdiction de EA est rapportée sur la figure 3.12. On n'a pas un zéro par ligne; d'où, on va soustraire la valuation minimale sur chaque ligne et chaque colonne. On soustrait donc globalement 3. Ceci explique que la valuation du sommet AE soit égale à 23, alors que celle du sommet ¬AE est 22.

	A	B	C	F	
C	1	6	∞	6	1
D	4	∞	2	0	0
E	∞	0	0	0	0
F	3	2	3	∞	2

Figure 3.12 : nouvelle matrice avec **EA** = ∞

Présentons maintenant l'algorithme de LITTLE.

Algorithme de LITTLE :

(1) Initialisation :

Faire apparaître des **zéros** (au moins un par ligne et un par colonne)

{L'évaluation par défaut de la racine de l'arborescence est la somme des chiffres soustraits}.

Poser $\mathbf{f_0 = \infty}$ {f_0 sera la valeur de la meilleure solution connue}.

(2) Boucle principale :

Tant que le sommet S de l'arborescence de plus petite évaluation par défaut f(S) est tel que f(S) < f_0 faire {largeur d'abord}

- évaluer le regret de chacun des zéros de la matrice associée à **S** et retenir **(i, j)** correspondant à un zéro de regret maximal.
- Introduire les sommets **(S + (i, j))** et **(S + ¬(i, j))** en interdisant le circuit parasite dans **(S + (i, j)),** en faisant apparaître des zéros dans les deux matrices associées, et en valuant ces sommets par leur évaluation par défaut.
- **Si** le sommet **(S + (i, j))** correspond à un circuit hamiltonien **alors** écrire le circuit et calculer sa valeur f_1.
- poser $\mathbf{f_0 = \min (f_0, f_1)}$

Fin tant que.

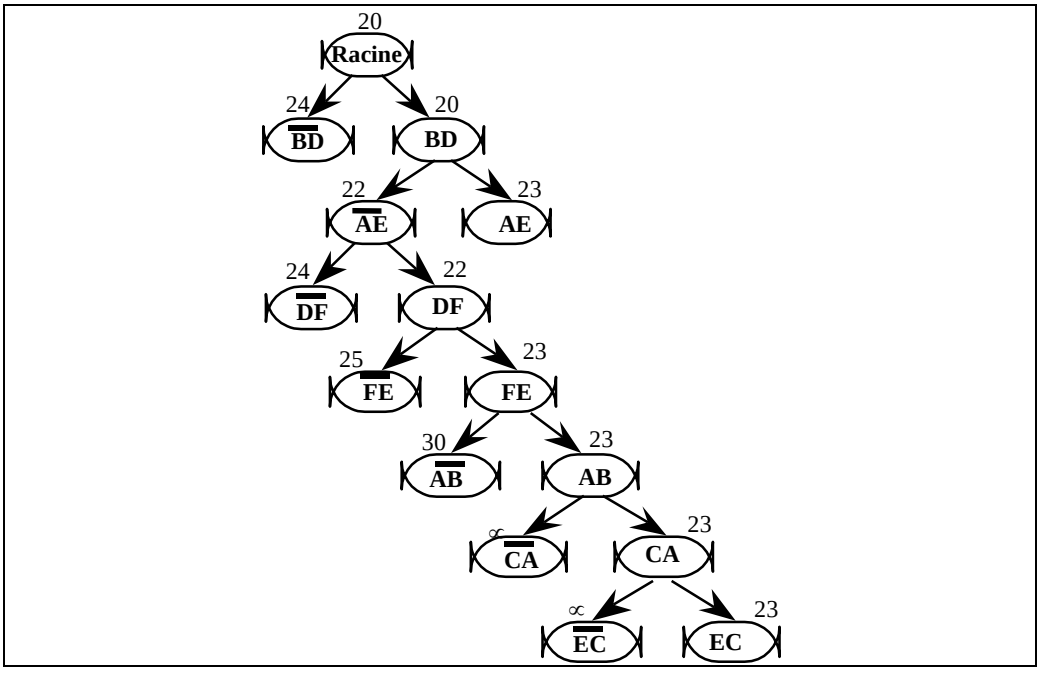


Figure 3.13 : arborescence globale.

<u>Suite de l'exemple :</u> Sur la figure 3.13 est rapportée l'arborescence après application de l'algorithme. Nous commentons ci-dessous sa construction.

Sur la figure 3.14, on a la matrice associée au sommet ¬AE, qui est le sommet pendant de l'arborescence courante de plus petite évaluation par défaut, ainsi que ses regrets.

Le plus grand regret est obtenu pour l'arc DF. On interdit l'arc FB qui créerait un circuit parasite.

	A	B	C	E	F
A	∞	0	2	∞	0
C	1	6	∞	0	6
D	4	∞	2	4	0
E	0	0	0	∞	0
F	3	2	3	0	∞

	A	B	C	E	F
A		0^0			0^0
C				0^1	
D					0^2
E	0^1	0^0	0^2		0^0
F				0^2	

Figure 3.14 : matrices associées au sommet ¬AE.

On a donc 2 nouveaux sommets dans l'arborescence qui sont DF et ¬DF. DF est le sommet pendant de plus petite évaluation par défaut. Sur la figure 3.15, sont rapportés la matrice associée à ce sommet et ses regrets. Le plus grand regret étant celui de l'arc FE.

	A	B	C	E
A	∞	0	2	∞
C	1	6	∞	0
E	0	0	0	∞
F	3	∞	3	0

	A	B	C	E
A		0^2		
C				0^1
E	0^1	0^0	0^2	
F				0^3

Figure 3.15 : matrices associées au sommet DF.

Il faut interdire le circuit parasite, décrit sur la figure 3.16, en mettant ∞ dans la case correspondant à EB.

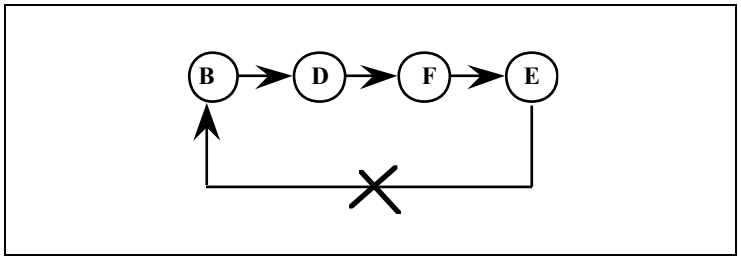


Figure 3.16 : circuit parasite.

Ayant interdit l'arc (EB), il faut faire apparaître de nouveaux zéros dans la matrice associée au sommet FE (Cf figure 3.17). Pour obtenir un zéro, on soustrait 1 et on rajoute donc 1 à l'évaluation. AB est alors le zéro de regret maximal. Pour la matrice associée au sommet AB il faut interdire le circuit parasite de la figure 3.18.

	A	B	C
A	∞	0	2
C	1	6	∞
E	0	∞	0

(-1)

	A	B	C
A	∞	0^7	2
C	0^5	5	∞
E	0^0	∞	0^2

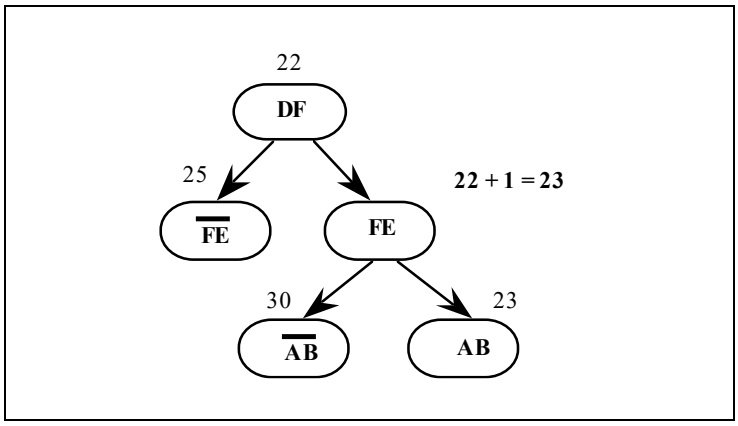


Figure 3.17 : séparation de FE.

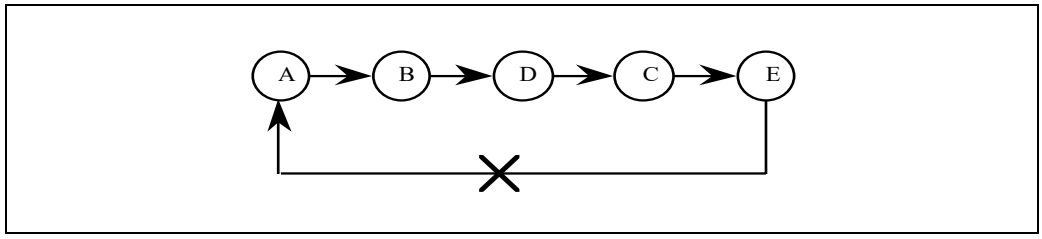


Figure 3.18 : élimination du circuit parasite du sommet AB.

Sur la figure 3.19, le choix des arcs CA et EC est obligatoire. On obtient donc le circuit hamiltonien de la figure 3.20 de valeur 23. Ce circuit hamiltonien est optimal car tous les sommets pendants de l'arborescence globale ont une évaluation supérieure ou égale à 23.

Discussion :

La méthode la plus efficace actuellement pour résoudre le problème du voyageur de commerce n'est pas l'algorithme de LITTLE qui permet de traiter optimalement des exemples à 40 villes environ. On distingue en fait les cas symétrique et asymétrique. Dans le cas asymétrique, des méthodes utilisant l'affectation linéaire couplée à de la relaxation lagrangienne (Cf. RO04) pour l'évaluation par défaut permettent de traiter des exemples à 300 villes environ. Dans le cas symétrique, la programmation linéaire généralisée consistant à introduire des coupes d'intégrité (méthodes polyédrales) permettent de traiter des exemples à 400 villes environ.

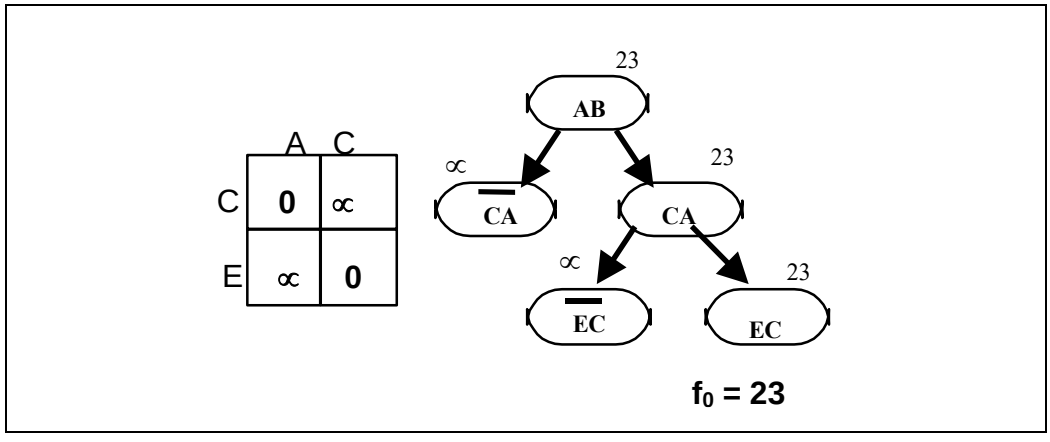


Figure 3.19 : séparation de AB.

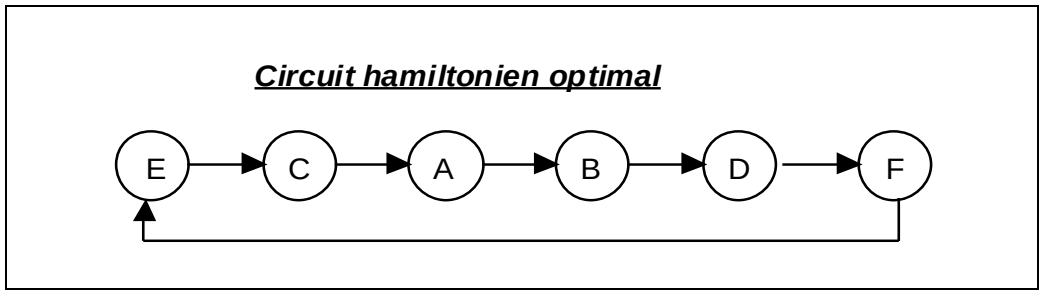


Figure 3.20 : circuit hamiltonien optimal.

3.5.3. Programmation linéaire en variables booléennes : méthode de FAURE-MALGRANGE :

Nous allons présenter sur un exemple la méthode de FAURE-MALGRANGE qui permet de traiter un programme linéaire en variables booléennes. On veut résoudre le programme linéaire suivant :

Max $F = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$

sous les contraintes :

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 4$

$4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 5$

Nous introduisons $\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3, \neg x_4$ définies par $x_i + \neg x_i = 1$.

Ceci permet de remplacer les - par des + dans les contraintes d'inégalités qui deviennent :

$3x_1 + 4x_2 + 2\neg x_3 + x_4 \leq 7$

$2x_1 + \neg x_2 + 3x_3 + \neg x_4 \leq 6$

$4x_1 + \neg x_2 + \neg x_3 + 2x_4 \leq 7$

En remplaçant les + par des - dans la fonction économique, on a :

$F = 10 - (3\neg x_1 + 5\neg x_2 + x_3 + 2\neg x_4)$

On remarque que F ne peut dépasser 10.

Le problème est mis sous une forme facilitant une énumération implicite. Mais cette fois il s'agit d'un problème de maximisation. On va donc construire une arborescence dont les sommets seront valués par une évaluation par excès. La séparation consistera à choisir une variable booléenne et à fixer la valeur de vérité de cette variable.

La meilleure solution construite fournira une évaluation par défaut de la solution optimale. Sur la figure 3.21 est rapportée l'arborescence globale dont nous commentons ci-dessous la construction.

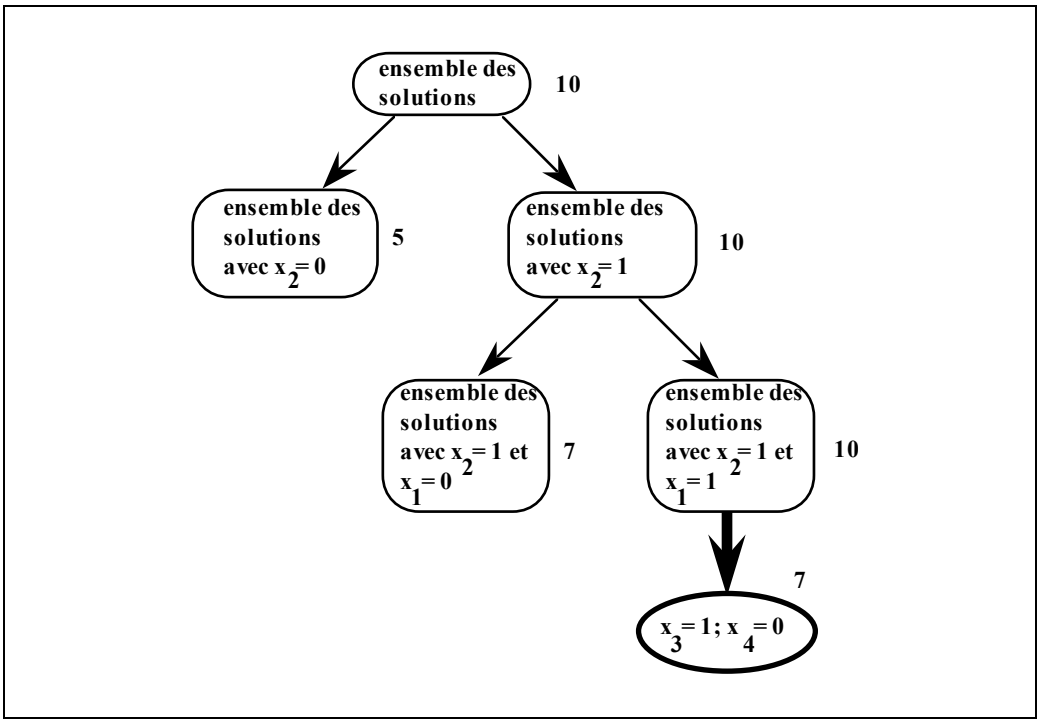


Figure 3.21 : arborescence de recherche d'une solution optimale.

<u>Premier choix :</u>

On choisit de séparer sur x_2 car son coefficient dans la fonction économique est le plus grand (x_2 est de regret maximal).

Au sommet $x_2 = 1$ de l'arborescence correspond de nouvelles contraintes :

$3x_1 + 2\neg x_3 + x_4 \leq 3$

$2x_1 + 3x_3 + \neg x_4 \leq 6$

$4x_1 + \neg x_3 + 2x_4 \leq 7$

$F = 10 - (3\neg x_1 + x_3 + 2\neg x_4)$

On sépare ce sommet :

<u>Deuxième choix :</u>

On choisit de séparer sur x_1 car son coefficient dans la fonction économique est le plus grand (x_1 est de regret maximal).

Au sommet $x_1 = 1$ de l'arborescence correspond de nouvelles contraintes :

$2\neg x_3 + x_4 \leq 0$

$3x_3 + \neg x_4 \leq 4$

$\neg x_3 + 2x_4 \leq 3$

$F = 10 - (x_3 + 2\neg x_4)$

On a alors les implications $x_3 = 1$ et $x_4 = 0$. On a donc trouvé une solution de valeur 7. Cette solution est optimale car toutes les évaluations par excès des sommets pendants de l'arborescence sont inférieures à 7.

Ici apparaît l'intérêt d'avoir des inégalités avec des termes positifs, en effet si $\sum a_i y_i \leq b$ avec les y_i variables booléennes, les a_i positifs et pour un certain i, $a_i > b$, nécessairement $y_i = 0$.

Ici on a parcouru l'arborescence en profondeur d'abord en choisissant de séparer le dernier sommet introduit. Une telle politique est gérable à l'aide d'une pile, ce qui renforce son intérêt.

3.5.4. Programmation linéaire en variables entières :

Dans l'U.V RO04, on présente la méthode du simplexe qui est efficace pour résoudre un programme linéaire dont les variables sont rationnelles. Quand les variables sont astreintes à être entières le problème devient NP-difficile. On peut le résoudre, soit par des méthodes de coupes (Cf. RO04), soit par des méthodes arborescentes.

Considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

Max $F = 3x_1 + 8x_2$

$x_1 + 4x_2 \leq 20$

$x_1 + 2x_2 \leq 11$

$3x_1 + 2x_2 \leq 19$

$4x_1 - x_2 \leq 22$

Avec $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

Une première méthode pour résoudre ce type de problème est de borner les variables de façon à se ramener à des variables booléennes. La première contrainte entraîne $x_2 \leq 5$. Une combinaison linéaire des troisième et quatrième contraintes entraîne $x_1 \leq 5$. On pose alors :

$x_1 = 4X_{11} + 2X_{12} + X_{13}$ et $x_2 = 4X_{21} + 2X_{22} + X_{23}$, ce qui permet de se ramener à des variables booléennes et d'utiliser la méthode de FAURE-MALGRANGE.

Une deuxième méthode consiste à utiliser directement le fait que les variables sont bornées et à séparer successivement sur x_1 et x_2. On a rapporté sur la figure 3.22 l'arborescence résultante. Dans cette arborescence les évaluations sont par excès, on a fait un parcours en profondeur d'abord et trouvé 2 solutions : $x_2 = 5$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$, $x_1 = 3$. La deuxième solution de valeur 41 est optimale car les sommets pendants de l'arborescence ont une évaluation plus faible.

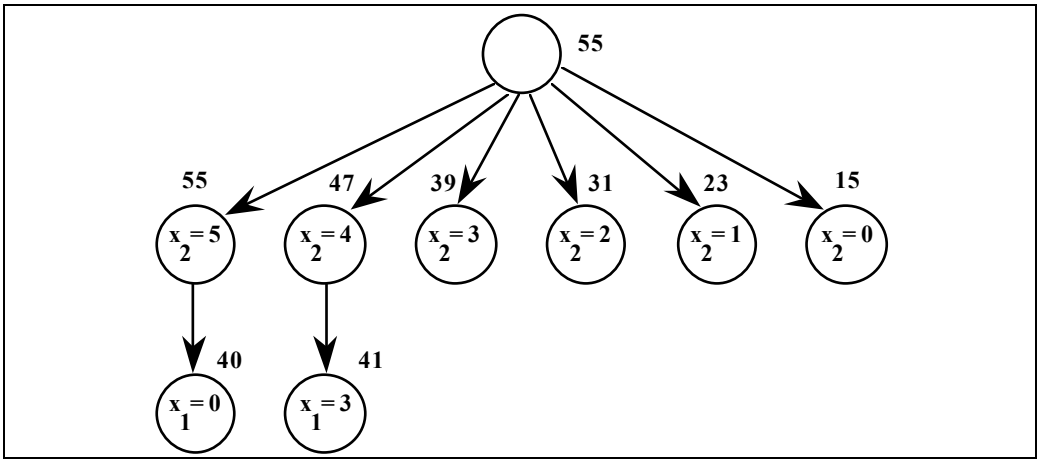


Figure 3.22 : arborescence globale.

3.6. Récapitulation :

a) Dans une méthode arborescente, on construit une arborescence dont les sommets correspondent à des sous-ensembles de solutions. L'union des successeurs d'un sommet est égal à ce sommet. Les sommets terminaux de cette arborescence sont les solutions du problème. On parle d'énumération implicite car les évaluations et les implications permettent de n'énumérer qu'un nombre limité de solutions.

b) A chaque sommet S de l'arborescence, est associé une évaluation f(S), par défaut pour un problème de minimisation, par excès pour un problème de maximisation.

c) On a également une évaluation globale f_0, par excès pour un problème de minimisation et, par défaut pour un problème de maximisation. f_0 est souvent la valeur de la meilleure solution construite.

d) Le choix du sommet à séparer est essentiel. On distingue principalement les stratégies en profondeur d'abord et en largeur d'abord.

e) En profondeur d'abord, on séparera le sommet le plus profond de l'arborescence. En conséquence, on parcourra l'arborescence branche par branche. L'arborescence courante sera un chemin, donc gérable à l'aide d'une pile. Cette stratégie est la plus utilisée pour cette raison.

f) En largeur d'abord, on séparera le sommet de l'arborescence de plus petite évaluation. En conséquence, on parcourra l'arborescence de façon anarchique. L'idée est de séparer un sommet prometteur.

g) La séparation permet d'introduire pour le sommet choisi des sommets successeurs. Pour être efficace, il faut que l'évaluation par défaut pour un problème de minimisation (resp. par excès pour un problème de maximisation) augmente (resp. diminue) pour ces sommets introduits.

h) Des implications, que l'on appelle aussi règles de dominance, permettent de rendre la méthode plus performante.

3.7. Méthodes heuristiques :

Les méthodes arborescentes sont des méthodes efficaces pour traiter de nombreux problèmes. Toutefois, au contraire des algorithmes polynomiaux, leur efficacité est fortement fonction des données du problème. De plus elles sont lourdes à mettre en œuvre et ne permettent souvent de résoudre optimalement que des problèmes de tailles réduites. Pour toutes ces raisons, il est souvent nécessaire d'utiliser des méthodes heuristiques qui permettent de construire des solutions d'un problème, mais ne garantissent plus l'optimalité.

Expliquons une heuristique simple pour le problème du voyageur de commerce. On commence par choisir la ville de départ. La deuxième ville choisie est alors la ville la plus voisine. Une fois choisies un certain nombre de villes, on choisit la ville non choisie la plus proche de la dernière ville introduite et on itère jusqu'à ce que l'on revienne au point de départ.

Cette heuristique évidemment très naïve donne des résultats très mauvais pratiquement. C'est pourquoi, on introduit les méthodes de voisinage. Présentons d'abord les méthodes de descente. L'idée est de définir une relation de voisinage sur l'ensemble des circuits hamiltoniens de telle sorte qu'il soit facile de calculer le meilleur voisin d'un sommet. On part alors du circuit hamiltonien construit à l'aide de l'heuristique naïve. Puis on calcule son meilleur voisin, si celui-ci est de coût plus faible que le tour initial, on le retient. On itère, en descendant, jusqu'à obtenir un tour dont tous les voisins sont moins bons que lui-même. On a alors trouvé un optimum local par rapport à la relation de voisinage. Remarquons qu'il n'y a pas de raison pour que cet optimum local soit un optimum global. Toutefois ces méthodes de descente sont extrêmement efficaces quand la relation de voisinage est bien choisie. Par exemple, pour un problème de voyageur de

commerce symétrique, la méthode K-opt de LIN et KERNINGHAN, permet de trouver très rapidement, même pour des problèmes de grande taille (par exemple 1000 villes) des solutions proches à 2 ou 3 % de la solution optimale.

Toutefois les résultats des méthodes de voisinage sont rarement aussi bons. On a constaté empiriquement que le problème du voyageur de commerce est un problème NP-difficile pour lequel il est relativement facile, le plus souvent, de construire de bonnes solutions. Ceci explique que, pour des problèmes plus difficiles pratiquement, on cherche à échapper à l'optimum local. Il y a trois techniques principales pour y parvenir: le recuit simulé, le tabou et le génétique.

Dans le recuit simulé, quand le voisin d'un sommet est meilleur, on descend comme précédemment. Si au contraire le voisin d'un sommet est moins bon, on le retient éventuellement à la place du sommet courant et ceci avec une certaine probabilité p. On fait diminuer cette probabilité au cours du temps de façon à s'autoriser au début de nombreuses remontées et à la fin de l'algorithme très peu de remontées. Techniquement, un paramètre T décroissant, appelé température permet cela. On a : [p = 1 - exp (-T)]. Les inconvénients du recuit simulé sont les suivants : on n'a pas de garantie d'optimalité, du moins en un temps raisonnable; il est souvent très coûteux en temps de calcul ; enfin la température est délicate à régler.

Dans les méthodes tabous, si on ne peut plus descendre, on s'autorise également les remontées afin d'échapper à un minimum local. Mais il y a alors un risque de cyclage. Pour l'éviter, on maintient une liste dynamique et de longueur limitée, contenant une liste de modifications récemment effectuées. Cette liste est gérée selon la règle premier entré, premier sorti. Les méthodes tabous ont des inconvénients similaires à ceux du recuit simulé.

Citons, pour terminer, les méthodes génétiques. Cette fois, à chaque itération, on conserve un nombre de solutions plus grand que 1 qui forment la population. On choisit alors une sous-population, souvent de cardinal 2, et on a une règle, dite génétique, pour construire à partir de cette sous-population, une nouvelle solution. On itère, après avoir mis dans la population cette nouvelle solution (naissance) et retiré une autre solution (mort). Ces méthodes ne garantissent pas non plus l'optimalité.

Les performances de ces trois méthodes dépendent des problèmes et de l'habileté de leur concepteur. On ne peut donc pas dire que l'une est meilleure que les autres. Elles sont efficaces si l'on arrive à définir une bonne relation de voisinage facile à calculer.

4. PROBLEMES DE CHEMINEMENT :

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons étudier des algorithmes polynomiaux résolvant des problèmes de cheminement fondamentaux. G = (X, U, v) (v application de U dans R) sera un graphe valué, avec $X = \{x_0, x_1,...., x_{n-1}\}$. De plus, par commodité, nous faisons l'hypothèse que x_0 est une racine de G (il existe donc un chemin allant de x_0 à tout $x_i \in X$). On considère principalement le problème fondamental suivant :

Déterminer les valeurs minimales (si elles existent) des chemins issus de x_0, puis calculer un chemin minimal allant de x_0 à x_i (pour tout i).

Nous allons voir que ce problème est résolu en $O(n^3)$ dans le cas général (algorithme de FORD), en O(m) dans le cas particulier des graphes sans circuit (algorithme de BELLMAN) et en $O(n^2)$ dans le cas particulier des graphes dont les arcs sont valués positivement (algorithme de DIJKSTRA).

4.2. Propriété des chemins minimaux :

On rappelle que la valeur d'un chemin est la somme des valuations de ses arcs. Un chemin allant de x_0 à x_i est de valeur minimale si sa valeur est plus petite que celle de tout autre chemin allant de x_0 à x_i.

Lemme 1

Tout sous-chemin d'un chemin de valeur minimale est un chemin de valeur minimale.

Démonstration

Soit μ un chemin allant de x_i à x_j et soit μ' un sous-chemin de μ allant de x_k à x_l, alors $\mu = \mu_1\mu'\mu_2$ où $\mu_1 = [x_i, x_k]$ et $\mu_2 = [x_l, x_j]$. On suppose μ de valeur minimale. Si μ' n'était pas de valeur minimale, il existerait un chemin μ'' de valeur strictement plus faible allant de x_k à x_l et le chemin $\mu_1\mu''\mu_2$ serait de valeur strictement inférieure à celle de μ, ce qui contredit le fait que μ est de valeur minimale. Q.E.D.

Cette propriété extrêmement simple est à la base de la programmation dynamique (Cf. TD): pour ces problèmes de cheminement l'optimisation globale est le résultat d'optimisations locales.

Lemme 2

Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout i, il existe un chemin de valeur minimale allant de x_0 à x_i est que le graphe G soit sans circuit de valeur strictement négative (ces circuits sont dit absorbants).

Démonstration : Supposons qu'il existe un circuit $\mu_1 = [x_i, x_i]$ de valeur strictement négative et que $\mu = [x_0, x_i]$ soit un chemin de valeur minimale allant de x_0 à x_i. Alors la valeur du chemin $\mu' = \mu\mu_1$ est strictement inférieure à celle de μ, ce qui contredit sa minimalité.

Réciproquement. Supposons G sans circuit absorbant. De tout chemin allant de x_0 à x_i, on peut extraire un chemin élémentaire de valeur plus faible (si $[x_0, x_i]$ n'est pas élémentaire, on enlève successivement les différents circuits qu'il emprunte). On peut donc limiter la recherche des chemins minimaux à celle des chemins minimaux élémentaires. Or le nombre de chemins

élémentaires allant de x_0 à x_i étant fini, il existe un chemin élémentaire de valeur minimale allant de x_0 à x_i. Q.E.D.

Les circuits absorbants pour la minimisation sont les circuits de valeur strictement négative. Dualement, si on maximise, les circuits absorbants sont les circuits de valeur strictement positive. Il faut toujours prendre garde à l'existence de tels circuits quand on recherche des chemins extrêmaux.

Théorème 1 :

Soit G un graphe sans circuit de valeur strictement négative et λ_i des valeurs de chemins entre x_0 et x_i. Une condition nécessaire et suffisante pour que ces $\{\lambda_i / 0 \leq i \leq n-1\}$ soient l'ensemble des valeurs des chemins minimaux issus de x_0 est que :

1°) $\lambda_0 = 0$;

2°) $\lambda_j - \lambda_i \leq v_{ij}$, pour tout arc $(x_i, x_j) \in U$.

Corollaire :

3°) l'ensemble des arcs pour lesquels l'inégalité de 2°) est une égalité est l'ensemble des arcs appartenant à des chemins minimaux.

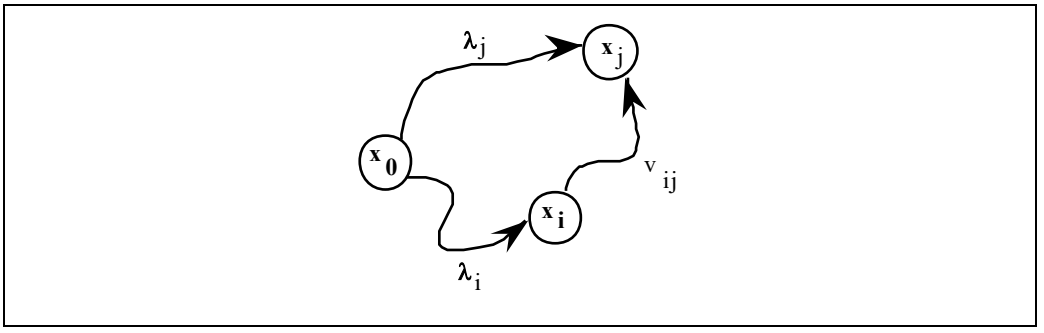


Figure 4.1 : chemins de x_0 à x_j.

Démonstration :

Les conditions sont nécessaires :

Soit λ_i les valeurs minimales des chemins issus de x_0.

1°) $\lambda_0 = 0$ (un sommet est un chemin de valeur 0).

2°) λ_j est la valeur minimale d'un chemin allant de x_0 à x_j et est donc inférieure à $\lambda_i + v_{ij}$ qui est la valeur d'un chemin allant x_0 à x_j empruntant l'arc (x_i ,x_j).

Corollaire :

3°) Si $\lambda_j - \lambda_i = v_{ij}$, l'arc (x_i, x_j) appartient à un chemin de valeur minimale allant de x_0 à x_j, obtenu en concaténant un chemin de valeur minimale allant x_0 à x_i avec l'arc (x_i, x_j).

Réciproquement :

Si (x_i, x_j) appartient à un chemin $[x_0, x_k]$ de valeur minimale, d'après le lemme 1, les sous-chemins allant de x_0 à x_j et de x_0 à x_i sont de valeur minimale; il en résulte que $\lambda_j = \lambda_i + v_{ij}$, donc l'inégalité est une égalité.

Les conditions sont suffisantes :

On suppose que les λ_i satisfont 1°), 2°) et sont des valeurs de chemins ; on va montrer que ce sont les valeurs minimales des chemins issus de x_0.

Considérons un chemin $[x_0, x_i] = \mu$ de valeur minimale, noté aussi : $\mu = [x_{j0} = x_0, \ldots, x_{jp} = x_i]$. On a : $\lambda_{j0} = 0$, $\lambda_{j1} - \lambda_{j0} \leq v_{j0j1}$, $\lambda_{j2} - \lambda_{j1} \leq v_{j1j2}$, ..., $\lambda_{jp} - \lambda_{jp-1} \leq v_{jp-1jp}$. En sommant, on obtient $\lambda_{jp} = \lambda_i \leq v(\mu)$. Il en résulte que λ_i est la valeur minimale d'un chemin allant de x_0 à x_i. Cette valeur λ_i est en effet inférieure et supérieure à la valeur minimale d'un chemin entre x_0 et x_i. Q.E.D.

Le théorème 1 est à la base des algorithmes présentés ci-dessous. On partira d'un ensemble de majorants des valeurs optimales et on les ajustera jusqu'à ce que la condition 2 soit satisfaite.

4.3. Algorithme de FORD :

Il est utilisable quel que soit le graphe, mais dans des cas particuliers, moins performant que d'autres algorithmes.

(i) Initialisation
Poser $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_i = +\infty$ pour $i > 0$.

(ii) Examen des arcs
Pour chaque sommet x_i examiné, parcourir l'ensemble des arcs (x_i,x_j) issus de x_i en remplaçant λ_j par λ_i+v_{ij} si $\lambda_i+v_{ij} < \lambda_j$.

(iii) Test d'arrêt
Itérer (ii) tant qu'un λ_j aura été modifié dans (ii).

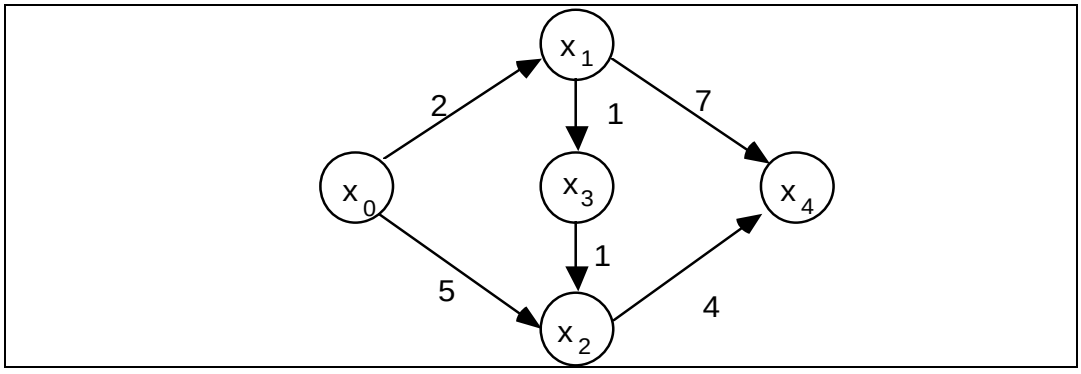


Figure 4.2 : exemple.

Le tableau ci-dessous rapporte les valeurs successives des λ_i lors de l'application de l'algorithme de FORD à l'exemple de la figure 4.2.

On doit se poser les questions suivantes:

1 - Cet algorithme donne-t-il toujours les valeurs minimales ?

2 - Quelle est la complexité de cet algorithme ?

3 - Comment déterminer les chemins minimaux ?

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Arcs issus de

Initialisation	0	∝	∝	∝	∝	
Première itération	0 0 0 0	2 2 2 2	5 5 5 4	∝ 3 3 3	∝ 9 9 9	x_0 x_1 x_2 x_3
Deuxième itération	0 0 0 0	2 2 2 2	4 4 4 4	3 3 3 3	9 9 8 8	x_0 x_1 x_2 x_3
troisième itération	0 0 0 0	2 2 2 2	4 4 4 4	3 3 3 3	8 8 8 8	x_0 x_1 x_2 x_3
	Aucun	λi	modifié	STOP		

Le théorème 2 répond à la question 1.

<u>Théorème 2 :</u>

L'algorithme de Ford calcule les valeurs des chemins minimaux issus de x_0 quand le graphe est sans circuit absorbant.

<u>Démonstration</u>

Notons $\lambda_i(k)$ la valeur de λ_i à la fin de la $k^{ème}$ itération de l'algorithme et λ_i^k la valeur d'un chemin minimal allant de x_0 à x_i parmi les chemins empruntant au plus k arcs.

On démontre le théorème par récurrence. On suppose une propriété vraie après k itérations et on démontre qu'elle reste vraie après k+1 itérations. A la fin de la $k^{ème}$ itération de (ii), $\lambda_i = \lambda_i(k)$ est la valeur d'un chemin de x_0 à x_i et est inférieure à la valeur minimale d'un chemin allant de x_0 à x_i empruntant au plus k arcs : $\lambda_i^k \geq \lambda_i(k)$. Soit $\mu_{k+1}(x_0, x_j)$ un chemin minimal allant de x_0 à x_j parmi les chemins empruntant au plus k+1 arcs : $\mu_{k+1}(x_0, x_j) = \mu_k(x_0, x_i)$ concaténé à (x_i, x_j), pour x_j successeur de x_i; λ_j^{k+1} est la valeur de ce chemin. Par hypothèse de récurrence, $\lambda_i^k \geq \lambda_i(k)$. En utilisant $\lambda_j^{k+1} = \lambda_i^k + v_{ij}$. On a donc : $\lambda_j^{k+1} \geq \lambda_i(k) + v_{ij}$ et du fait de l'algorithme $\lambda_i(k) + v_{ij} \geq \lambda_j(k+1)$. D'où le résultat. La propriété est donc vraie à l'ordre k+1. Il en résulte qu'à la $n\text{-}1^{ème}$ itération, les λ_i sont les valeurs minimales des chemins issus de x_0. Q.E.D.

Le théorème 3 répond à la question 2.

<u>Théorème 3 :</u>

La complexité de l'algorithme de Ford est : O(n x m) où n = | X | et m = | U |.

<u>Démonstration</u>

On exécute (n - 1) (ii), (ii) coûte O(m); d'où la complexité globale. Q.E.D.

Enfin pour répondre à la question 3, on utilise le corollaire : les arcs appartenant aux chemins minimaux sont les (x_i, x_j) tels que $\lambda_j = \lambda_i + v_{ij}$. Les chemins du graphe partiel formé de ces arcs sont exactement les chemins minimaux.

4.4. Algorithme de DIJKSTRA :

Cet algorithme ne sera applicable que si les valuations des arcs sont positives ou nulles. Dans cet algorithme, on va de nouveau ajuster les λ_i, mais cette fois le nombre d'ajustements sera minimal, donc égal au nombre d'arcs du graphe.

Algorithme

(i) Poser S ={x_0}, λ_0 = 0, λ_i =v_{0i} , si (x_0 , x_i) $\in$ U, λ_i= ∞ ,sinon.

(ii) Tant que S $\neq$ X faire

(a) Choisir $x_i \in$ X - S de λ_i minimum.

(b) Poser S = S +{ x_i }.

(c) Pour tout $x_j \in$(X - S), successeur de x_i , poser: λ_j = min {λ_i + v_{ij}, λ_j}.

Exemple :

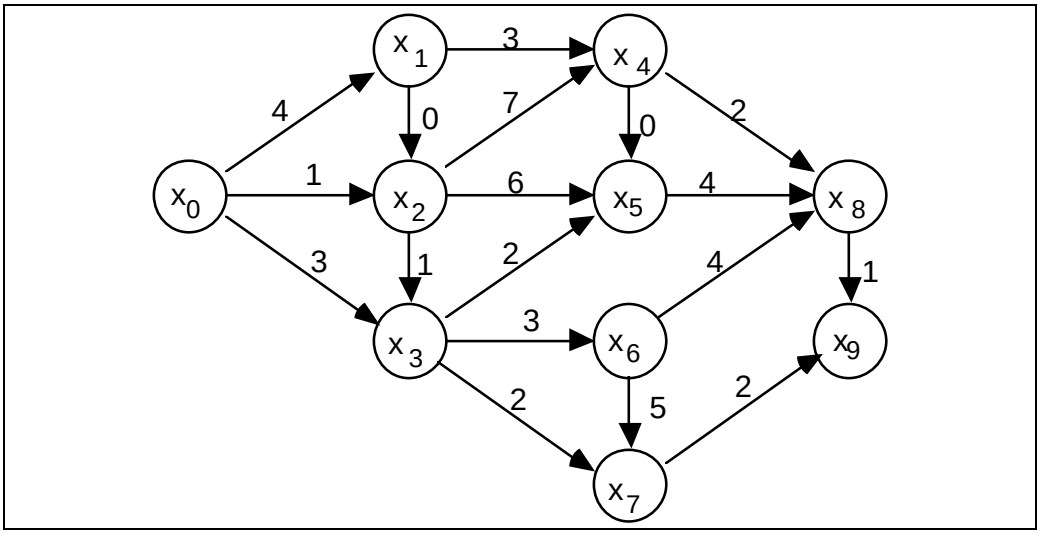


Figure 4.3: exemple

	xi	S	λ0	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7	λ8	λ9
S	{x0}	{x0}	0	**4**	**1**	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞
S	{x2}	{x0,x2}	0	4	1	2	8	7	∞	∞	∞	∞
S	{x3}	{x0,x2,x3}	0	4	1	2	8	**4**	**5**	**4**	∞	∞
S	{x1}	{x0,x1,x2,x3}	0	4	1	2	**7**	4	5	4	∞	∞
S	{x5}		0	4	1	2	7	4	5	4	**8**	∞
S	{x7}		0	4	1	2	7	4	5	4	8	**6**
S	{x6}		0	4	1	2	7	4	5	4	8	6
S	{x9}		0	4	1	2	7	4	5	4	8	6
S	{x4}		0	4	1	2	7	4	5	4	8	6
S	{x8}		0	4	1	2	7	4	5	4	8	6

Arborescence de chemins minimaux :

Si on définit pour chaque sommet x_j son père comme le sommet x_i ayant permis de fixer λ_j (donc λ_j - λ_i = v_{ij}), on a une arborescence de chemins minimaux (Cf. figure 4.4).

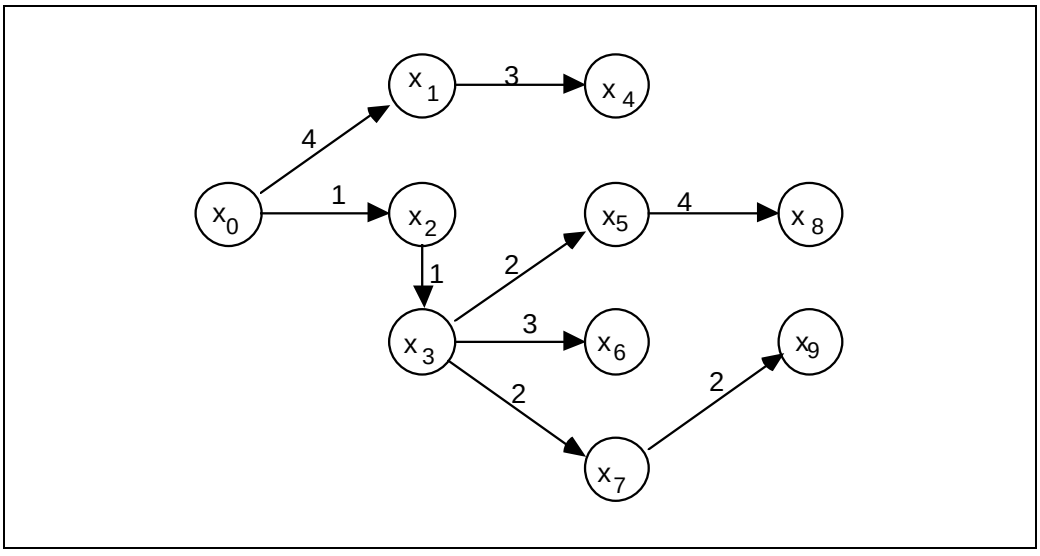


Figure 4.4: arborescence de chemins minimaux

Complexité de l'algorithme de Dijkstra :

Lemme 3

L'algorithme de Dijkstra se termine en un nombre fini d'étapes et a pour complexité $O(n^2)$.

Démonstration :

(i), l'initialisation, coûte O(n). (ii) (a) coûte O(n) et est faite n fois. (b) coûte O(1) et est faite n fois. (c) coûte globalement O(m) car chaque arc est examiné une fois. La complexité globale est donc: $O(n^2)$. Q.E.D.

Théorème 4

Les λ_i à la fin de l'algorithme sont les valeurs minimales des chemins issus de x_0.

Démonstration

Les valuations étant positives ou nulles, il n'y a pas de circuit absorbant. Il y a donc des chemins minimaux. On va noter λ_i^* la valeur minimale d'un chemin allant de x_0 à x_i et on va montrer par récurrence qu'à la fin de chaque itération (ii), on a :

1°) si $x_j \in S$, $\lambda_j = \lambda_j^*$,

2°) si $x_j \in X - S$, $\lambda_j = \min \{\lambda_k + v_{kj}\}$ sur $x_k \in S$, et prédécesseur de x_j.

La propriété est vraie à la fin de l'initialisation. Supposons la propriété vraie à la fin de la $k^{ème}$ itération et montrons qu'elle reste vraie à la fin de la $k+1^{ième}$ itération. Soit x_i le sommet de X-S de λ_i minimal au début de la $k+1^{ième}$ itération. D'après l'hypothèse de récurrence, λ_i est la valeur minimale d'un chemin élémentaire allant de de x_0 à x_i et ne passant pas par un sommet de X-S. On va montrer que $\lambda_i = \lambda_i^*$ en comparant la valeur d'un chemin élémentaire allant de x_0 à x_i et passant par un sommet de X - S à λ_i et en utilisant le fait que λ_i est la valeur minimale d'un chemin allant de x_0 à x_i et ne passant que par les sommets de S.

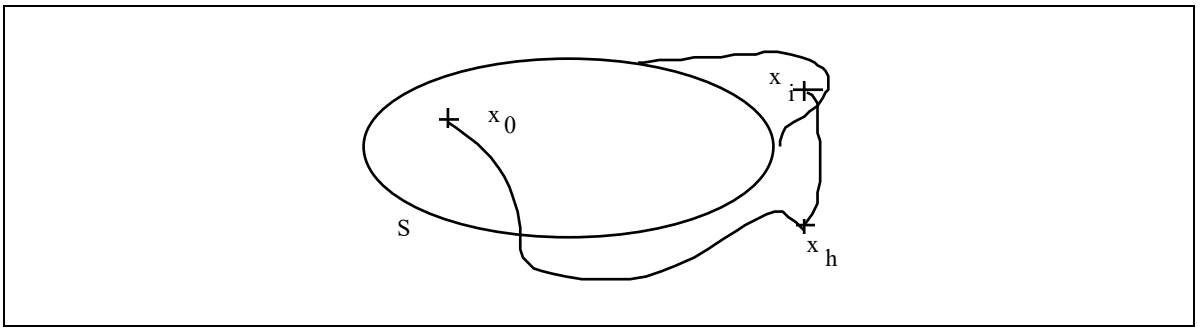


Figure 4-5: un chemin de x_0 à x_i

Soit $\mu(x_0, x_i)$ un tel chemin. On note x_h le premier sommet de X-S appartenant à $\mu(x_0,x_i)$. Le sous-chemin allant de x_0 à x_h est de valeur supérieure à λ_h. Les valuations étant positives, la valeur du chemin $\mu(x_0, x_i)$ est supérieure à λ_h donc à λ_i, d'après l'algorithme (Cf. (ii) a)). Il en résulte que $\lambda_i = \lambda_i^*$ (Cf. figure 4.5).

D'après l'algorithme (Cf (ii) a)) :

1°) est vérifié pour les autres sommets de S par hypothèse de récurrence;

2°) résulte de l'hypothèse de récurrence et de l'ajustement dans l'étape (c) de l'algorithme. En effet, posons S' = S + $\{x_i\}$ et considérons un sommet x_j n'appartenant pas à S'. Montrons qu'après l'ajustement $\lambda_j = \min\{\lambda_k + v_{kj}\}$ pour $x_k \in$ S' et prédécesseur de x_j. Avant l'ajustement, on a par hypothèse de récurrence: $\lambda_j = \min\{\lambda_k + v_{kj}\}$ pour $x_k \in$ S. On pose ensuite $\lambda_j = \min(\lambda_j , \lambda_i + v_{ij})$. Q.E.D

4.5. Algorithme de BELLMAN :

Il est applicable aux graphes sans circuit. On a vu qu'on pouvait numéroter les sommets d'un graphe sans circuit en O(m) opérations. Le nombre d'ajustements est également minimal car égal au nombre d'arcs du graphe.

Algorithme de Bellman :

(i) Numéroter les sommets du graphe, poser $\lambda_0 = 0$.

(ii) Pour j = 1 à n - 1 poser : $\lambda_j = \min\{\lambda_i + v_{ij}\}$ sur l'ensemble des prédécesseurs x_i de x_j.

Exemple :

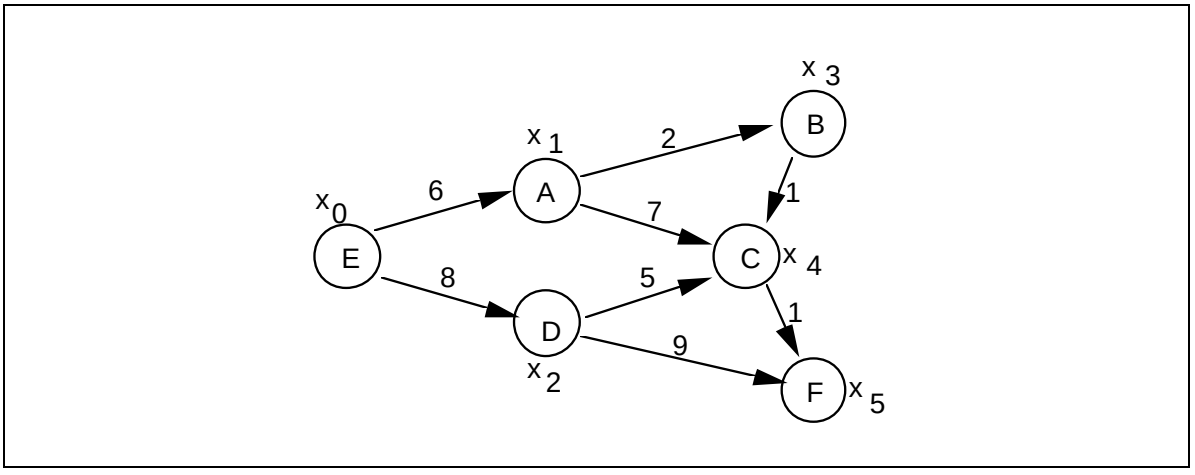


Figure 4.6 : un exemple pour Bellman

$\lambda_0 = 0$. $\lambda_1 = 6$ (0+6). $\lambda_2 = 8$ (0+8). $\lambda_3 = 8$(6+2). $\lambda_4 = 9 = \min\{8+5, 6+7\}$. $\lambda_5 = 10 = \min\{9+1, 8+9\}$.

Théorème 5 :

L'algorithme de Bellman calcule les valeurs λ_i des chemins minimaux issus de x_0 en O(m) itérations.

Démonstration :

(i) coûte O(m). (ii) coûte O(m) car on examine un arc exactement une fois. On suppose par récurrence que, à l'ordre j, on a : $\lambda_1 = \lambda^*_1$, $\lambda_2 = \lambda^*_2$, ..., $\lambda_j = \lambda^*_j$, où les λ^*_i sont les valeurs minimales des chemins allant de x_0 à x_i, qui existent puisque le graphe est sans circuit, donc sans circuit absorbant. La propriété est vraie à l'ordre j+1, car un chemin minimal allant de x_0 à x_{j+1} est obtenu en ajoutant l'arc (x_k, x_{j+1}) à un chemin minimal allant de x_0 à x_k pour un prédécesseur x_k de x_{j+1}. Ceci démontre la propriété par récurrence. Q.E.D.

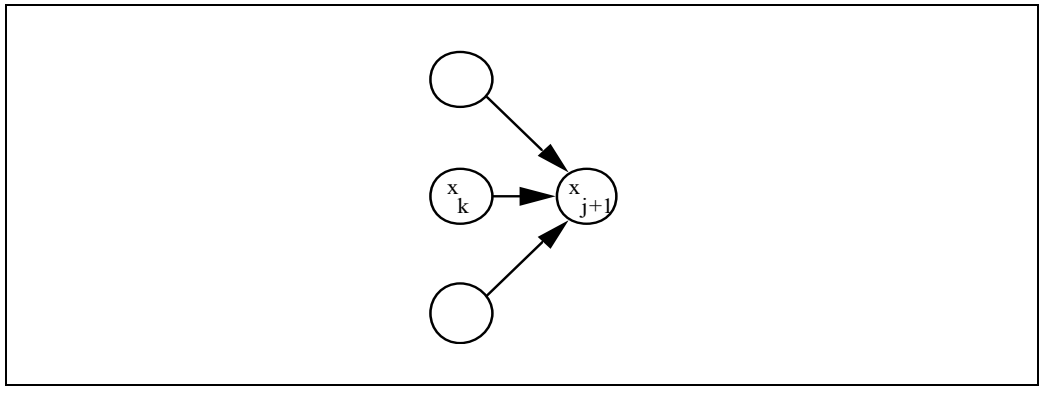


Figure 4.7 : preuve du théorème 5

4.6. Méthode matricielle :

La méthode matricielle permet de calculer la valeur des chemins minimaux entre toute paire de sommets dans un graphe sans circuit absorbant pour une complexité $O(n^3)$.

Algorithme

(i) Soit $V^0 = (v^0_{ij})$ la matrice des valuations des arcs de G.

($v^0_{ij} = \propto$ si (x_i, x_j) n'appartient pas à U)

(ii) Pour k = 1 à n

Pour i = 1 à n

Pour j = 1 à n Faire

$v^k_{ij} = \min\{v^{k-1}_{ij}, v^{k-1}_{ik} + v^{k-1}_{kj}\}$

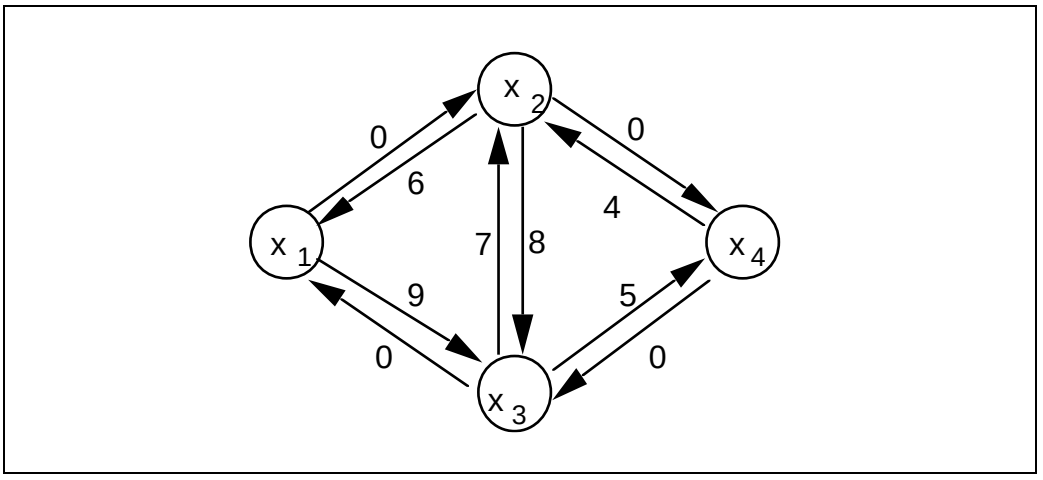


Figure 4-8: un exemple pour la méthode matricielle

$V^0=$

∞	0	9	∞
6	∞	8	0
0	7	∞	5
∞	4	0	∞

$V^1=$

∞	0	9	∞
6	6	8	0
0	0	9	5
∞	4	0	∞

$V^2=$

6	0	8	0
6	6	8	0
0	0	8	0
10	4	0	4

$V^3=$

6	0	8	0
6	6	8	0
0	0	8	0
0	0	0	0

$V^4=$

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Figure 4.9 : application de la méthode matricielle à l'exemple

Théorème 5 :

En l'absence de circuit absorbant, à la fin de la $k^{ième}$ itération, v^k_{ij} est la valeur minimale d'un chemin élémentaire allant de i à j et ne passant que par les sommets 1, 2, ... , k.

Démonstration :

Ce résultat se démontre immédiatement par récurrence. L'absence de circuit absorbant permet de limiter la recherche des chemins minimaux aux chemins élémentaires. Un chemin élémentaire entre i et j, s'il existe, ne passant que par 1, 2, ...,k est soit un chemin passant une fois par k, soit un chemin ne passant pas par k. Ceci explique la formule de l'algorithme. Q.E.D.

Remarque : S'il y a des circuits absorbants des termes négatifs apparaissent sur la diagonale principale d'une des matrices.

4.7. Autres problèmes de cheminement :

D'autres problèmes de cheminement se résolvent de manière similaire. Nous citons les problèmes suivants ainsi que leurs méthodes de résolution :

- Chemins de valeur maximale : Ford et Bellman restent valables en remplaçant MIN par MAX et en initialisant les λ_i à $-\infty$ et λ_0 à 0.

- Existence d'un chemin de i à j : méthode matricielle ou matrice booléenne associée élevée à une puissance (Cf. : TD).

- Dénombrement du nombre de chemins entre i et j : M matrice réelle associée (nombre de chemins de longueur 1), M^k (nombre de chemins de longueur k).

- Chemins de fiabilité maximale entre i et j. La fiabilité d'un chemin est le produit des valuations des arcs de ce chemin (fiabilité : probabilité de ne pas tomber en panne). On utilise Ford ou Bellman en remplaçant + par x et MIN par MAX. Les λ_i sont initialisés à 0, sauf λ_0 qui est initialisé à 1.

- Chemins de capacité maximale. La capacité maximale d'un chemin est la plus petite des valuations (≥ 0) de ce chemin. On utilise également Ford et Bellman en remplaçant + par MAX et MIN par MAX. Les λ_i sont initialisés à -1, sauf λ_0 qui est initialisé à ∞.

5. PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT :

5.1. Introduction :

Jusqu'en 1958, on utilisait les diagrammes de Gantt (appelés aussi planning à barres).

Cette année là, se sont développées deux méthodes fondées sur les graphes :

1 - La méthode potentiel-tâches, à l'occasion de la construction du paquebot FRANCE;

2 - La méthode PERT, lors de celle des fusées POLARIS.

Ces méthodes ne prennent en compte que les contraintes potentielles (succession et localisation temporelle) et ne gèrent pas les contraintes de ressources. Elles sont fondées toutes les deux sur la recherche de chemins maximaux, que l'on appelle chemins critiques. Cela n'était pas trop pénalisant dans la mesure où, si les projets correspondants comportaient de très nombreuses tâches, ils étaient aussi de prestige et la fonction coût était donc secondaire. L'important était de terminer le projet le plus tôt possible, ce que permettent les méthodes de chemin critique.

5.2. Graphes conjonctifs, ensemble de potentiels :

Dans l'une ou l'autre méthode, on associe au problème un graphe conjonctif. Un ordonnancement sera un ensemble de potentiels sur le graphe conjonctif.

Graphe conjonctif :

> Un graphe conjonctif est un graphe G = (X, U) valué ayant une racine 0 et une antiracine n+1 tel qu'il existe un chemin de valeur positive entre la racine et tout autre sommet et entre tout sommet différent de l'antiracine et l'antiracine.

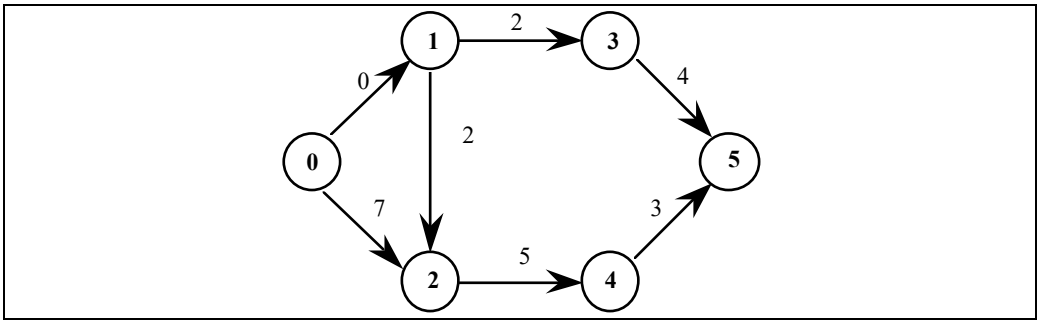


Figure 5.1 : exemple de graphe conjonctif

Ensemble de potentiels :

> Un ensemble de potentiels sur un graphe conjonctif G=(X, U) est une application t de X dans R telle que :
>
> 1. $t_o = 0$,
> 2. $v_{ij} \leq t_j - t_i$, pour tout arc (i, j) de U.

Par abus d'écriture, on écrira T= $\{t_i \mid i \in X\}$.

Théorème d'existence :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un ensemble de potentiels sur un graphe conjonctif G = (X, U) est que ce graphe n'ait pas de circuit de valeur strictement positive.

Démonstration :

La condition est nécessaire :

S'il existe un circuit $[i_1, i_2, ..., i_r, i_1]$ de valeur strictement positive, c'est-à-dire tel que :

$v_{i1i2} + v_{i2i3} + \ldots + v_{iri1} > 0$, on a, pour tout ensemble de potentiels T :

$t_{i2} - t_{i1} \geq v_{i1i2}$, $t_{i3} - t_{i2} \geq v_{i2i3}$, ..., $t_{i1} - t_{ir} \geq v_{iri1}$. En sommant, on trouve : 0 > 0, ce qui est absurde.

La condition est suffisante :

S'il n'existe pas de circuit de valeur strictement positive, il existe un chemin maximal entre 0 et i.

On va noter r_i la valeur d'un tel chemin et montrer que $R = \{r_i / i \in X\}$ est un ensemble de potentiels. En effet, la valeur maximale r_j d'un chemin de 0 à j est supérieure à $r_i + v_{ij}$ qui est la valeur d'un chemin de 0 à j obtenu en concaténant un chemin maximal de 0 à i à l'arc (i,j).

Il en résulte : 1. $r_o = 0$,

2. $r_j - r_i \geq v_{ij}$. Q.E.D.

Ensemble de potentiels calé à gauche et calé à droite:

On suppose dans la suite que le graphe est sans circuit de valeur strictement positive et nous notons l(i,j) la valeur maximale d'un chemin allant de i à j.

On a vu que $R = \{r_i = l(0,i) / i \in X\}$ était un ensemble de potentiels (il sera dit calé à gauche ou au plus tôt).

On va montrer que $F = \{ f_i = l(0,n+1) - l(i,n+1) / i \in X \}$ est également un ensemble de potentiels (il sera dit calé à droite ou au plus tard).

Posons $t^* = l(0,n+1)$.

Proposition 1 :

Pour tout ensemble de potentiels $T= \{t_i / i \in X\}$, $t_{n+1} \geq t^* = l(0,n+1)$. En particulier t^* est la durée optimale de l'ordonnancement. De plus, pour tout i, on a: $r_i \leq t_i$ (r_i : date au plus tôt). Enfin, si T est un ordonnancement optimal, donc de durée t^*, alors $t_i \leq f_i$, (f_i : date au plus tard).

Démonstration :

Soit $[i_o=0 , ... , i_r = n+1]$ un chemin de valeur maximale entre 0 et n+1, donc de valeur l(0,n+1) (un tel chemin est dit critique). $t_{i1} - t_{io} \geq v_{ioi1}$, $t_{i2} - t_{i1} \geq v_{i1i2}$, ..., $t_{ir} - t_{ir-1} \geq v_{ir-1ir}$. En sommant, on obtient: $t_{ir} - t_{io} \geq l(0,n+1)$ et puisque $i_r = n+1$ et $i_o = 0$, on a: $t_{n+1} \geq t^* = l(0,n+1)$.

On vérifie de façon analogue que $R = \{r_i = l(0,i) / i \in X\}$ est un ensemble de potentiels d'écart minimal entre t_o et t_i, d'où $t_i \geq r_i$. L'écart minimal entre t_i et t_{n+1} est égal à l(i,n+1), en conséquence si $F = \{f_i = l(0,n+1)-l(i,n+1) / i \in X\}$, on a : $t_i \leq f_i$ si $t_{n+1} = t^*$. Q.E.D.

5.3. La méthode potentiel-tâches :

Tâches	Durée	contraintes potentielles
1	3	
2	7	
3	4	La tâche 1 précède la tâche 3
4	6	Les tâches 1 et 2 précèdent la tâche 4
5	5	La tâche 3 précède la tâche 5
6	3	Les tâches 3 et 4 précèdent la tâche 6
7	2	La tâche 6 précède la tâche 7

Figure 5-2 : exemple

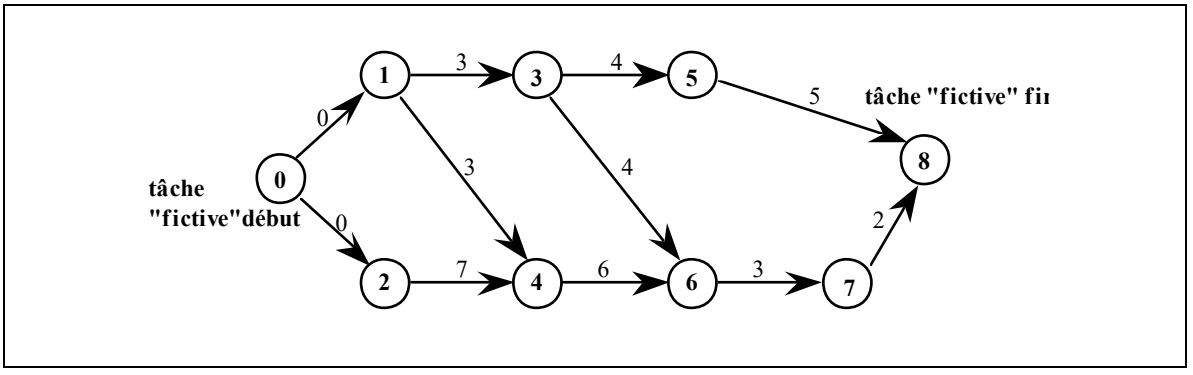


Figure 5.3 : le graphe potentiel-tâches de l'exemple.

On associe de façon canonique à ce problème un graphe G = (X , U) où X = {0, 1, 2, ... , n+1} (0 : tâche fictive début; n+1 : tâche fictive fin), et U est associée aux contraintes potentielles, qui comprennent, d'une part les contraintes initiales, d'autre part les contraintes dues aux tâches 0 et n+1 : on relie tout sommet sans prédécesseur à 0 par un arc de valuation 0 et on relie tout sommet i sans successeur à n+1 par un arc de valuation égale à la durée de la tâche i.

<u>Le chemin critique :</u>

Les chemins maximaux entre 0 et n+1, dits critiques, jouent un rôle central dans cette méthode. Les tâches appartenant à ce chemin critique sont dites critiques. Si on retarde d'un certain délai une tâche critique, l'ordonnancement sera retardé du même délai. Cela résulte du fait que les tâches critiques ont <u>des dates au plus tard égales aux dates au plus tôt</u> : elles sont de marge nulle.

<u>Ordonnancement :</u>

Un ordonnancement est un ensemble de potentiels sur le graphe conjonctif associé.

Tout ordonnancement est de durée supérieure à l(0,n+1) = t* valeur du chemin critique. On calcule le plus souvent, les ordonnancements calés à gauche et à droite (au plus tôt et au plus tard), en résolvant deux problèmes de cheminements: $r_i = l(0, i)$, $f_i = l(0,n+1) - l(i,n+1)$. On utilisera BELLMAN en l'absence de circuit ou FORD, s'il y a un circuit, en utilisant les formules suivantes.

<u>pour les dates au plus tôt :</u> $r_0 = 0$, $r_j = \max (r_i + v_{ij})$ (avec $i \in U^-(j)$).

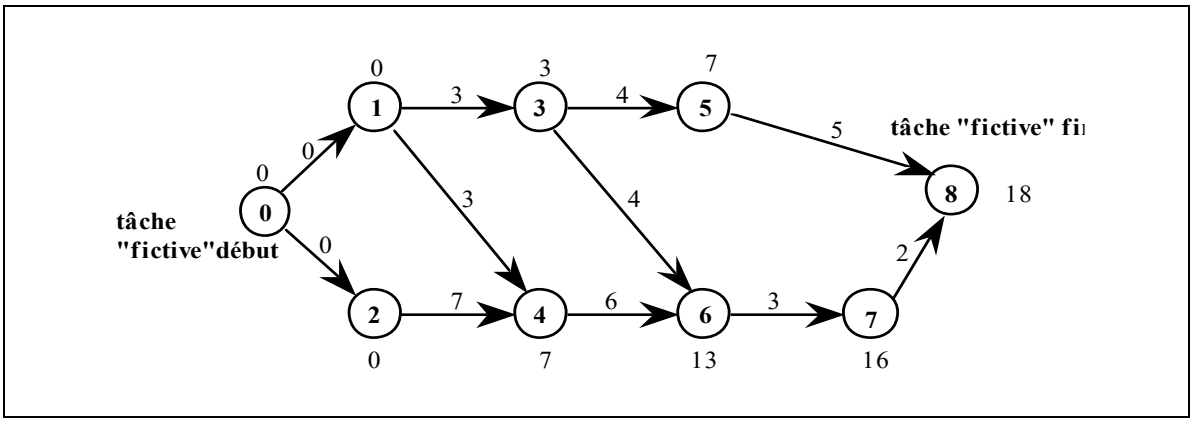


Figure 5.4 : dates au plus tôt

<u>pour les dates au plus tard :</u> $f_{n+1} = t^*$, $f_i = \min (f_j - v_{ij})$ (avec $j \in U^+(i)$).

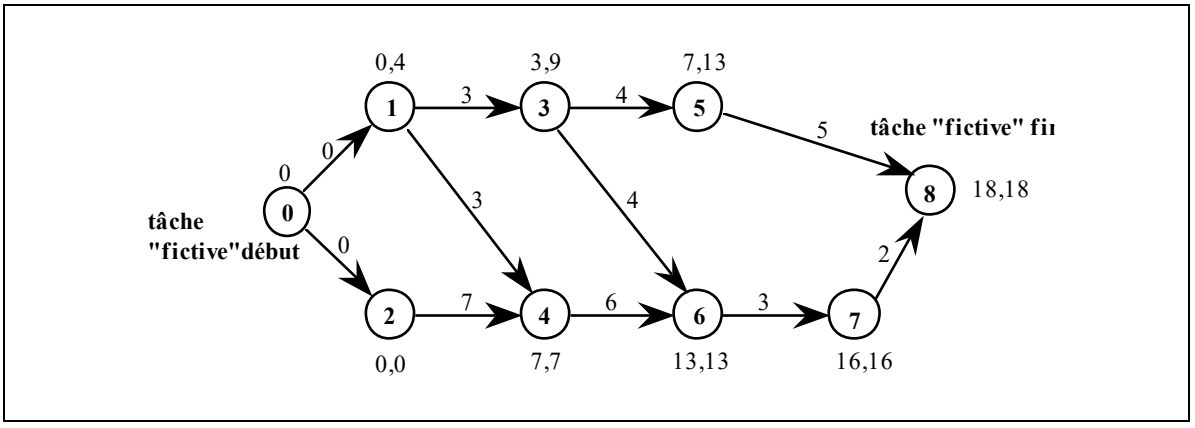


Figure 5.5 : dates au plus tard.

<u>Les différents types de contraintes potentielles :</u>

Nous rapportons ci-dessous les différents types de contraintes potentielles qui comprennent les contraintes de succession et de localisation temporelle.

<u>Contraintes de succession :</u>

i précède j, en appelant t_i (resp. t_j) la date de début de i (resp. j) et p_i la durée de i, la contrainte s'écrit $t_j \geq t_i + p_i$, c'est-à-dire $t_j - t_i \geq p_i$: on associe un arc (i, j) valué par p_i.

<u>Contraintes de localisation temporelle :</u>

La tâche i est disponible à la date a_i, $t_i \geq a_i$ ou $t_i - t_0 \geq a_i$ ($t_0 = 0$). On associe un arc (0,i) valué par a_i.

La tâche i doit être achevée à la date d_i : $t_i + p_i \leq d_i$, qui s'écrit: $t_o - t_i \geq p_i - d_i$. On associe un arc (i,0) valué par $p_i - d_i$ (cette valuation est négative ou nulle).

<u>Contraintes de succession au sens large :</u>

La tâche j pourra débuter après la tâche i plus un temps de réglage r_{ij}: $t_j \geq t_i + p_i + r_{ij}$, d'où $t_j - t_i \geq p_i + r_{ij}$.

La tâche j pourra commencer après que i soit commencée d'un tiers : $t_j \geq t_i + p_i/3$.

5.4. La méthode PERT :

On associe à chaque tâche i, un événement D_i, début de la tâche i et un événement F_i, fin de la tâche i. On introduit également un événement D début de l'ordonnancement et F fin de l'ordonnancement.

Le graphe conjonctif associé a pour sommets l'ensemble des événements et pour arcs l'ensemble des tâches, plus des arcs dits fictifs permettant de représenter les contraintes.

Exemple :

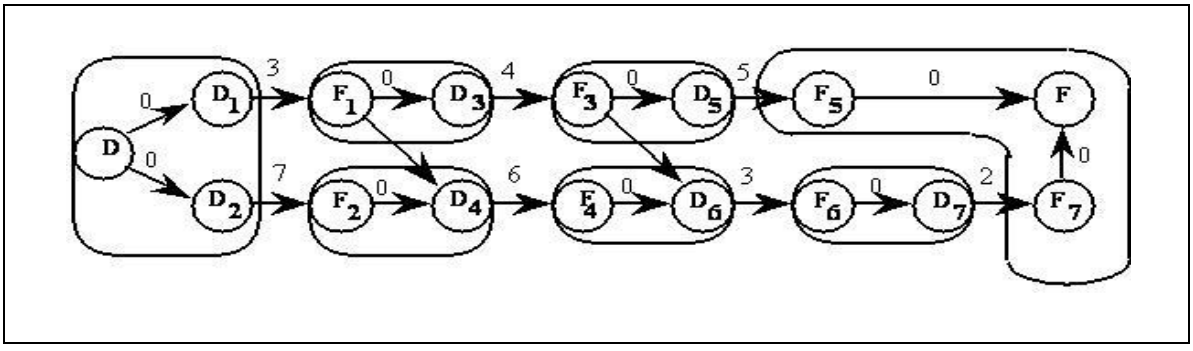


Figure 5.6 graphe PERT développé

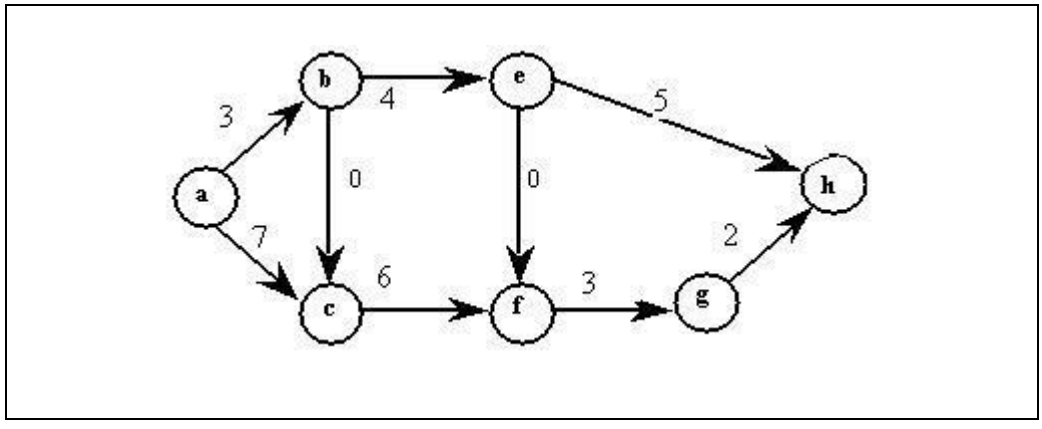


Figure 5.7 : graphe PERT simplifié

On peut simplifier le graphe PERT en fusionnant des événements début ou fin de tâches. Mais les inconvénients du graphe simplifié sont :

• la non-automaticité de sa construction;

• le fait qu'il n'est pas unique;

• le fait que si on modifie une contrainte (ajout ou retrait), il faut reconstruire tout le graphe simplifié.

L'avantage du graphe PERT est une meilleure lisibilité pour des non-spécialistes. En effet une tâche qui a une certaine durée est représentée par une "flèche".

6. LE PROBLEME DU FLOT MAXIMAL :

6.1. Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre le problème du flot maximal. Ce problème apparaît quand il s'agit de maximiser la quantité transportée d'une ou plusieurs sources vers une ou plusieurs destinations. Il est modélisé par un graphe valué, appelé réseau de transport, que nous définissons. Les arcs représentent les possibilités de transport entre deux sites et sont valués par les capacités correspondantes. Le problème du flot maximal est résolu par un algorithme efficace fondamental du à FORD et FULKERSON, que nous présentons et justifions ci-dessous. Pour terminer nous discutons de la polynomialité de ce problème en évoquant des travaux de recherche plus récents qui ont permis la mise au point d'algorithmes plus performants.

6.2. **Réseau de transport :**

Définition :

On appelle réseau de transport un graphe valué positivement sans boucle, ayant une racine s, un puits p et contenant l'arc (p,s) de valuation infinie. Les valuations des arcs sont appelées capacités.

Un exemple de réseau de transport est rapporté sur la figure 6.1 ci-dessous.

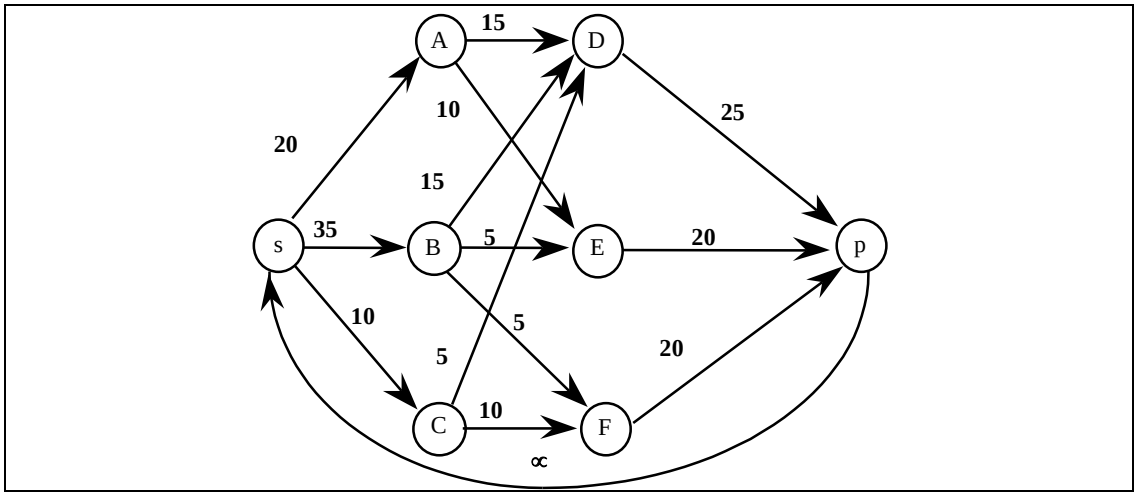


Figure 6.1 : réseau de transport

Définition :

On appelle flot sur un réseau de transport G = (X, U) une application f : U dans R qui vérifie :

1) Les contraintes de capacité :

pour tout arc (i,j) de U : $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$;

2) Les contraintes de conservation (Kirchoff) (Cf figure 6.2)

pour tout sommet i de X, on a : $\sum_{j \in U^+(i)} f_{ij} = \sum_{k \in U^-(i)} f_{ki}$

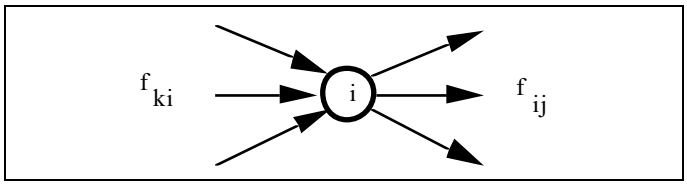


Figure 6.2 : contrainte de conservation

Un premier exemple de flot est le flot nul. Un deuxième exemple de flot est rapporté sur la figure 6.3.

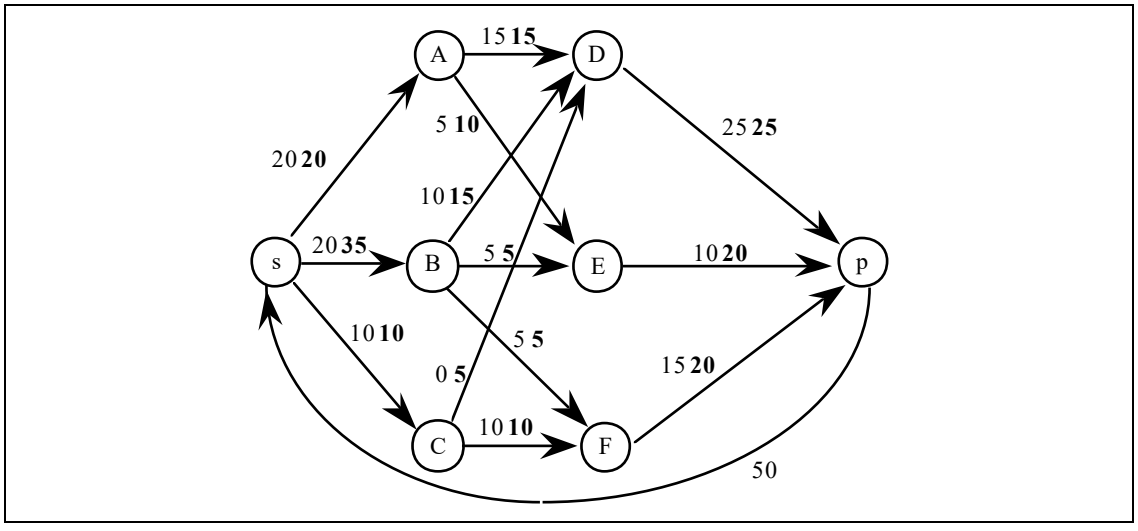


Figure 6.3 : un flot complet.

<u>Exemple :</u>

En trois dépôts A, B, C, on dispose respectivement de 20, 35 et 10 tonnes de marchandises. On a des demandes de 25, 20 et 20 tonnes aux destinations D, E et F. Il existe des possibilités de transport à l'aide de camions. Ces possibilités sont rapportées dans le tableau suivant :

	D	E	F
A	15	10	0
B	15	5	5
C	5	0	10

<u>Problème :</u> Déterminer un plan de transport permettant de transporter des origines aux destinations une quantité maximale.

A ce problème, on associe le graphe de la figure 6.1. Plus généralement, il faut résoudre le problème suivant:

Déterminer un flot de valeur maximale sur l'arc (p, s), donc maximiser f_{ps}.

6.3. Lemme :

Avant d'introduire les algorithmes pour maximiser le flot, nous montrons que la propriété de conservation du flot se généralise à un sous-ensemble de sommets.

Lemme :

Si Y est un sous-ensemble de X, le flot sortant de Y est égal au flot entrant dans Y.

Démonstration :

On somme l'égalité de Kirchoff sur l'ensemble des sommets de Y. Les flux sur les arcs qui ont une extrémité dans Y et l'autre en dehors de Y apparaissent de chaque côté de l'égalité. On peut donc les soustraire. Il reste alors d'un côté de l'égalité la somme des flux des arcs sortants de Y et de l'autre côté de l'égalité, la somme des flux des arcs entrants dans Y. On a donc le résultat. Q.E.D.

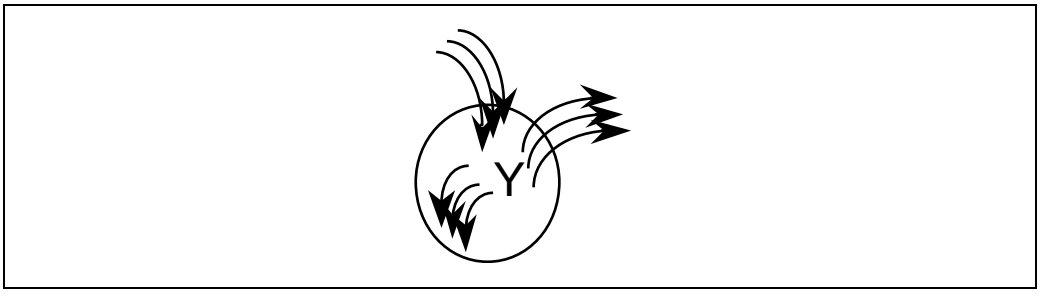


Figure 6.4: preuve du lemme.

6.4. Flot complet :

6.4.1. Introduction :

Une première idée pour optimiser le flot est de saturer successivement les chemins de s à p. On obtiendra alors un flot dit complet qui, comme nous le verrons ci-dessous, n'est pas maximal, mais fournit une excellente solution de départ pour appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson que nous présenterons au paragraphe suivant.

Définition :

On dit qu'un flot est complet si tout chemin du réseau de transport allant de s à p contient au moins un arc saturé, c'est-à-dire un arc (i,j) tel que $f_{ij} = c_{ij}$.

6.4.2. Algorithme de recherche d'un flot complet :

On part d'un flot f (par exemple, f = 0) et on l'améliore pas à pas par une procédure de marquage:

(I) Marquer s.

(II) Soit i un sommet marqué non encore examiné; marquer j si j est un successeur non marqué de i avec $f_{ij} < c_{ij}$. La marque de j est +i.

(III) Si p est marqué, aller en (IV).
Si tous les sommets marqués sont examinés, le flot est complet FIN.
Sinon aller en (II).

(IV) Améliorer le flot. Effacer les marques (sauf celle de s) et aller en (I).

6.4.3. Fonctionnement sur l'exemple précédent :

On trouve successivement les chemins améliorants suivants : sADp (15), sAEp (5), sBDp (10), sBEp (5), sBFp (5), et sCFp (10). Le flot résultant a pour valeur 50 et est complet (Cf figure 6.3). En effet tous les chemins passant par l'arc sA sont saturés car cet arc est saturé; tous les chemins passant par l'arc sC sont saturés car cet arc est saturé; tous les chemins passant par l'arc sB sont saturés car les arcs Dp,BE et BF sont saturés.

6.5. Algorithme de FORD-FULKERSON :

Pour construire un flot complet, on a supprimé les chemins améliorants. Il n'est pas optimal car il reste **une chaîne améliorante.** Nous expliquons ci-dessous la notion de chaîne améliorante et nous rapportons l'algorithme de Ford-Fulkerson qui permet de chercher les chaînes améliorantes et qui s'arrête quand il n'y a plus de chaîne améliorante. Le flot est alors optimal.

6.5.1. Chaîne améliorante :

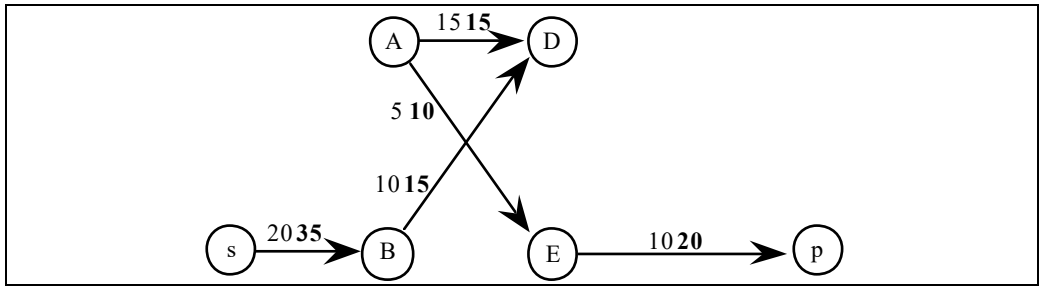


Figure 6.5: une chaîne améliorante

Dans un chemin de s à p, le sens des arcs est respecté. Dans une chaîne de s à p, au contraire, le sens des arcs n'est pas forcément respecté. On peut alors distinguer deux types d'arcs: les arcs qui respectent l'orientation (arcs dits dans le sens +) et les arcs qui ne respectent pas l'orientation (arcs dits dans le sens-). Une chaîne améliorante est une chaîne allant de s à p dont les arcs allant dans le sens + sont insaturés et les arcs dans le sens - transportent un flux strictement positif. Elle permet d'améliorer le flot, en ajoutant une quantité δ sur les arcs dans le sens +, et en retirant une quantité δ sur les arcs dans le sens -.

L'algorithme de Ford - Fulkerson part d'un flot quelconque (par exemple, le flot nul ou un flot complet). Il cherche une chaîne améliorante. Il améliore le flot tant qu'il existe une chaîne améliorante et sinon il s'arrête. Le flot est alors optimal.

6.5.2. Algorithme de Ford - Fulkerson :

(I) Marquer l'entrée s par *.
(II) Soit i un sommet marqué non examiné.
    Etudier tous les successeurs j de i :
        Marquer j s'il est non marqué et si $f_{ij} < c_{ij}$ par +i.
    Etudier tous les prédécesseurs k de i:
        Marquer k s'il est non marqué et si $f_{ki} > 0$ par -i.
(III) Si p est marqué, aller en (IV)
    S'il reste des sommets marqués non examinés, aller en (II).
    Sinon le flot est optimal, FIN.
(IV) Améliorer le flot à l'aide de la chaîne améliorante ayant permis de marquer p.

Effacer les marques, sauf celle de s, et aller en (I).

6.5.3. Exemple :

(I) On marque s par ∗ et nous partons du flot complet construit précédemment (Cf figure 6.3).

(II) <u>On examine s</u>

On marque B par +s, car seul l'arc sB est insaturé.

(II) <u>On examine B</u>

BD est le seul arc insaturé sortant de B; on marque donc D par +B (successeur de B).

B n'a pas de prédécesseur non marqué.

(II) <u>On examine D</u>

Il n'y a pas d'arc insaturé sortant de D.

Par contre, l'arc AD transporte un flux non nul. Cela entraîne que A est marqué -D (prédécesseur de D).

(II) <u>On examine A</u>

On marque E par +A, car il est successeur insaturé de A.

Le seul prédécesseur de A est déjà marqué.

(II) <u>On examine E</u>

On marque p par +E, c'est-à-dire comme successeur de E.

(IV) p étant marqué, on a trouvé une chaîne améliorante. On utilise les marques "en remontant" pour reconstituer cette chaîne améliorante: c'est la chaîne sBDAEp, dont les quatre arcs dans le sens + sont insaturés, alors que l'arc dans le sens - transporte un flux non nul. Cette chaîne permet d'améliorer le flot de 5 unités.

On efface les marques sauf celles de s et on recommence.

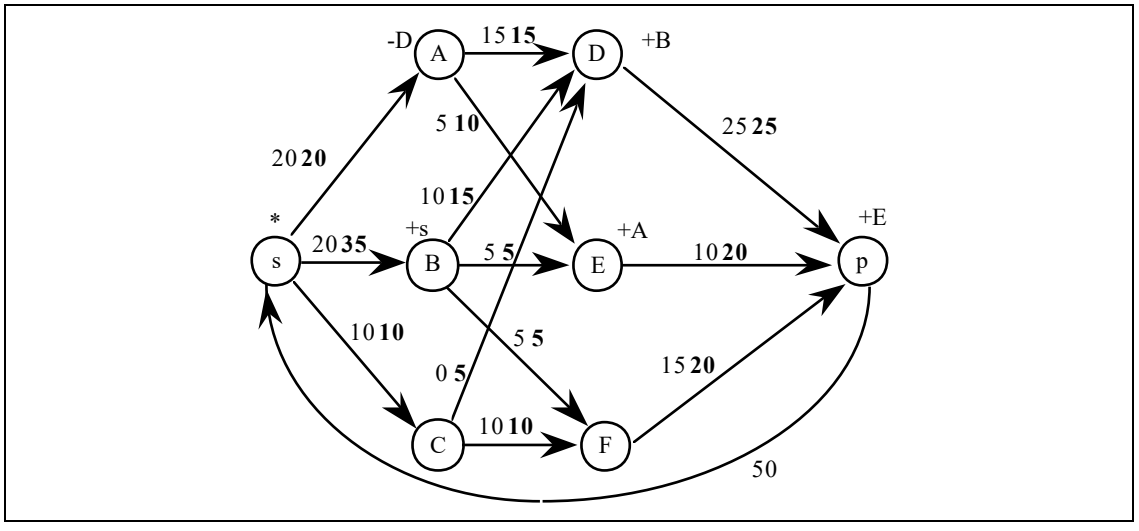


Figure 6.6 : marquage de Ford-Fulkerson

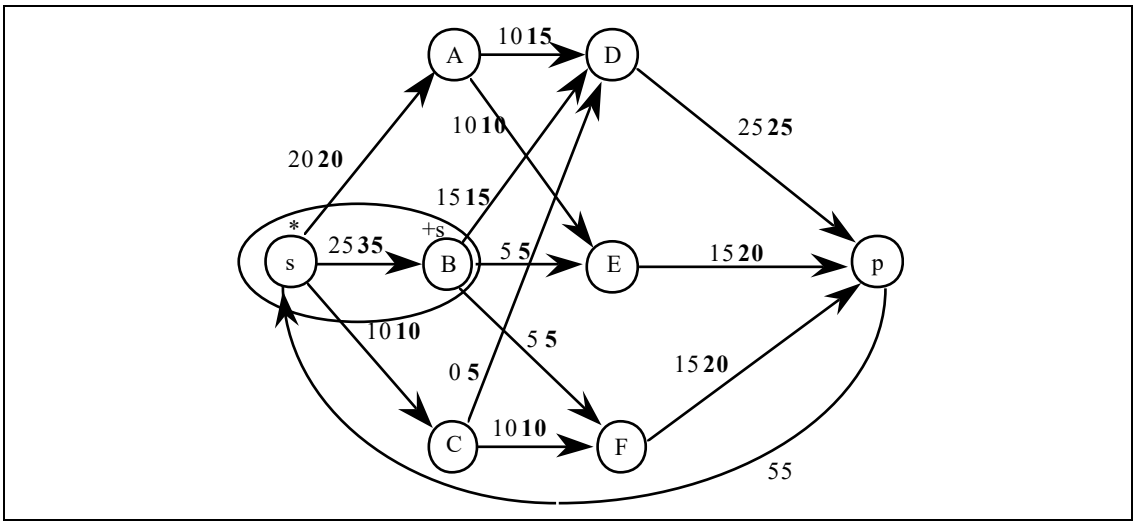


Figure 6.7 : flot optimal.

(ii) Cette fois, on marque le sommet B et c'est fini car tous les arcs sortants de B sont maintenant saturés. Le flot est maximal comme nous allons le montrer ci-dessous dans le cas général.

6.5.4. Théorème de Ford - Fulkerson :

Définitions :

> Une coupe est un ensemble de sommets contenant s et ne contenant pas p. La capacité d'une coupe est la somme des capacités des arcs sortant de cette coupe.

Exemple : à la fin de l'algorithme précédent l'ensemble des sommets marqués M = {s, B} est une coupe qui a la propriété suivante :

- tous les arcs sortants de M sont saturés;
- les arcs entrants dans M, à l'exception de (p,s), ont un flux nul.

Théorème de Ford-Fulkerson :

La capacité minimale d'une coupe est égale au flot maximal.

Démonstration :

Il faut montrer que : Max f_{ps} = Min C(Y) (avec f, flot, $Y \subseteq X$, $s \in Y$, $p \notin Y$)

1- Montrons que Max $f_{ps} \leq$ Min C(Y) :

Soit f un flot quelconque et Y une coupe quelconque, il suffit de montrer que : $f_{ps} \leq C(Y)$.

Le flot sortant de Y est inférieur à C(Y). Le flot entrant dans Y est supérieur à f_{ps}. Comme le flot entrant dans Y est égal au flot sortant de Y, on a : $f_{ps} \leq C(Y)$.

2- Montrons que Max $f_{ps} \geq$ Min C(Y) :

On va montrer qu'il existe un flot f ' et une coupe M telle que : $f'_{ps} = C(M)$. L'inégalité en résultera car Max $f_{ps} \geq f'_{ps}$ et Min $C(Y) \leq C(M)$.

Quand on applique Ford-Fulkerson, à la fin, si on désigne par M l'ensemble des sommets marqués et par f ' le flot, on a $C(M) = f'_{ps}$.

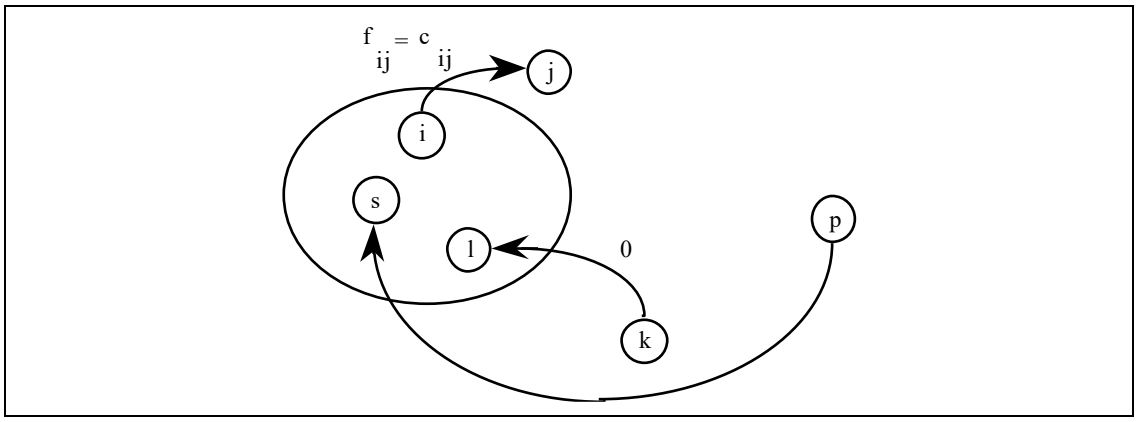


Figure 6.8 : coupe minimale.

Après un nombre fini d'itérations, Ford-Fulkerson s'arrête. En effet, chaque itération permet d'améliorer le flot d'au moins une unité; ce flot est borné, par exemple, par C({s}). A la fin, les arcs sortants de M sont saturés et les arcs entrants dans M ont un flux nul. Le flot entrant dans M est f_{ps}. Le flot sortant de M est C(M). D'où C(M) = f_{ps}. Q.E.D.

On démontre immédiatement les corollaires suivants :

<u>Corollaire 1 :</u> Une C.N.S pour qu'un flot soit maximal est qu'il n'existe pas de chaîne améliorante.

<u>Corollaire 2 :</u> L'algorithme de Ford-Fulkerson construit un flot maximal.

6.5.5. Complexité de l'algorithme de Ford-Fulkerson :

La figure 6.9 rapporte un exemple où le nombre d'itérations de Ford-Fulkerson est égal à 2M si on choisit successivement les chaînes améliorantes {s x y p} et {s y x p} de capacités 1. Le nombre d'améliorations peut donc être exponentiel. L'algorithme de Ford-Fulkerson n'est pas polynomial.

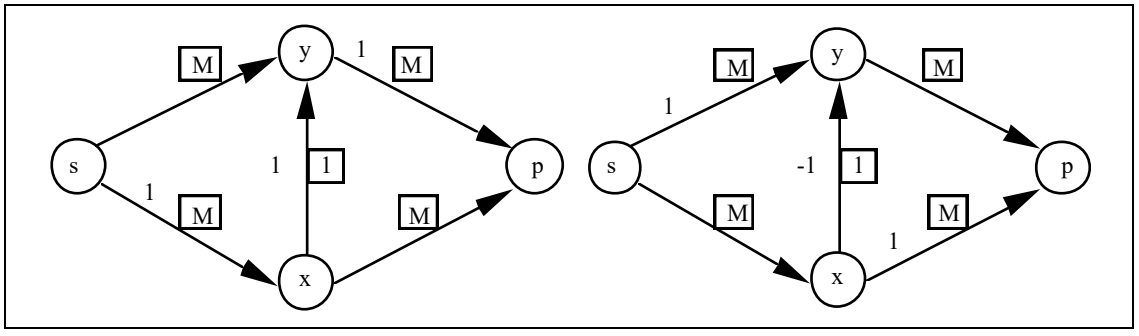


Figure 6.9 : exemple.

Par contre, si on applique la règle "premier marqué, premier examiné" l'algorithme de Ford-Fulkerson devient polynomial de complexité $O(n^5)$: le nombre de chaînes améliorantes est majoré par $1/4\ (n^3 - n)$ d'après le théorème d'EDMONS et KARP. Cela revient à chercher les chaînes améliorantes les plus courtes. Remarquons pour terminer qu'il existe de meilleurs algorithmes, en particulier, l'algorithme de KARZANOV de complexité globale $O(n^3)$.

6.6. Flot maximal à coût minimal :

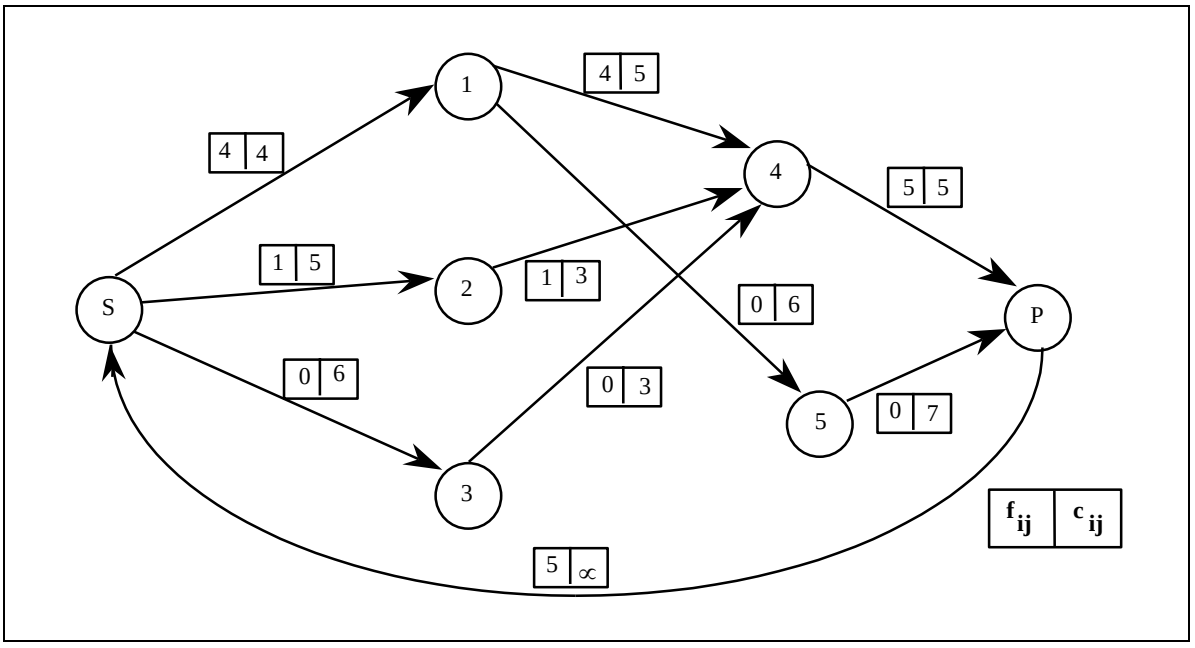


Figure 6.10 : flot sur un réseau de transport

Nous revenons sur l'algorithme de Ford-Fulkerson en montrant que la notion de chaîne améliorante sur le graphe initial est équivalente à la notion de chemin améliorant sur le graphe d'écart. Sur la figure 6.10, on a un flot sur le réseau de transport. Le graphe d'écart associé est rapporté sur la figure 6.11.

6.6.1. Problème du flot maximal :

Définition du graphe d'écart $G^e(f)$:

Au couple formé d'un flot f et d'un réseau de transport G, on associe le graphe d'écart $G^e(f)=(X,U^e(f))$ défini par :

> à tout arc (i, j) de G, correspond deux arcs : un arc (i, j) de $G^e(f)$ de capacité $c_{ij} - f_{ij}$ et un arc (j, i) de $G^e(f)$ de capacité f_{ij} (si la capacité d'un arc est nulle dans $G^e(f)$, on ne représente pas l'arc, car il est inutile).

Remarquons qu'ajouter (resp. retirer) un flux sur un arc du graphe initial revient à ajouter ce flux sur l'arc correspondant (resp. inverse) du graphe d'écart. Les chaînes améliorantes du graphe initial correspondent à des chemins du graphe d'écart. L'algorithme de Ford-Fulkerson devient donc l'algorithme suivant :

Algorithme du graphe d'écart :

Cet algorithme permet de construire un flot de valeur maximale sur l'arc de retour (p, s) dans G.

(I) Initialiser f sur tous les arcs (par exemple, f = 0, si b(u)= 0, pour tout u).

(II) Construire $G^e(f)$ et chercher un chemin de s à p dans $G^e(f)$.
Aller en (III) si un chemin a été trouvé sinon FIN.

(III) Améliorer le flot f le long du chemin obtenu et retourner en (II).

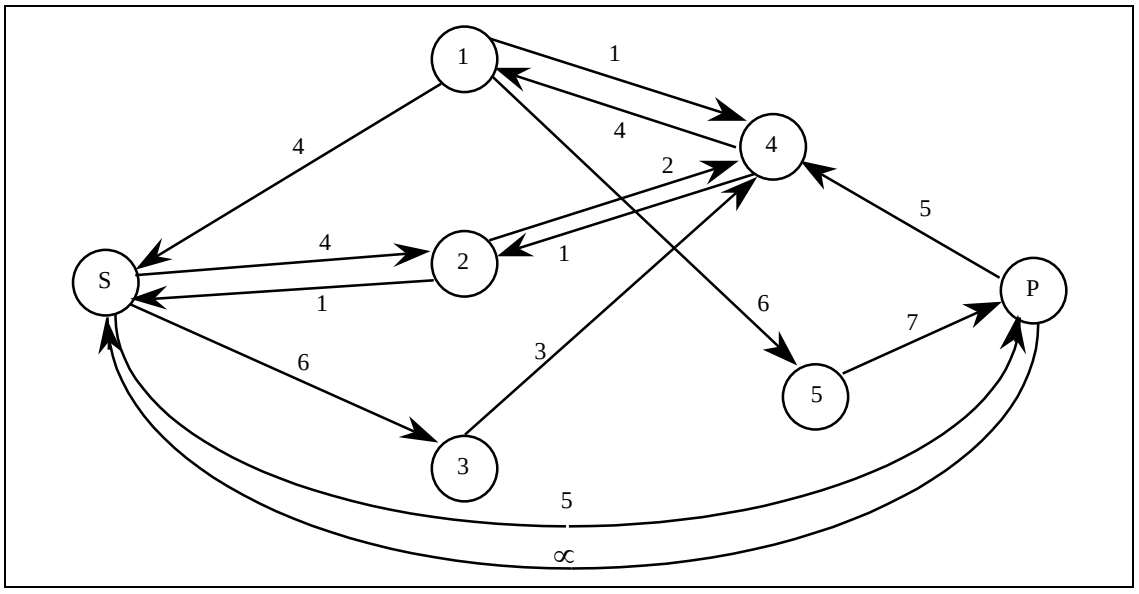


Figure 6.11 : premier graphe d'écart.

<u>Application de l'algorithme à l'exemple précédent</u>

Sur le premier graphe d'écart (figure 6.11), on a le chemin [s, 3, 4, 1, 5, p] qui permet d'améliorer le flot de 3. Sur le deuxième graphe d'écart (figure 6.12), on a le chemin [s, 2, 4, 1, 5, p] qui permet d'améliorer le flot de 1. Le troisième graphe d'écart (figure 6.13), ne contient plus de chemin de s à p; le flot est donc maximal. Les flux sont égaux à la capacité des arcs inverses de ce troisième graphe d'écart (Cf. fig 6.14).

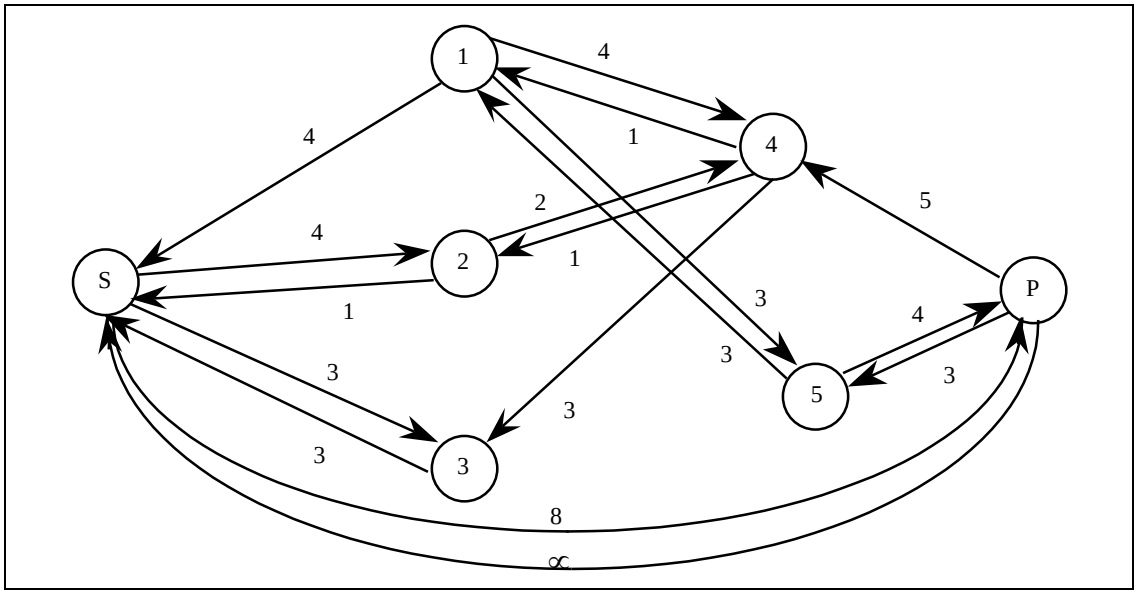


Figure 6.12 deuxième graphe d'écart

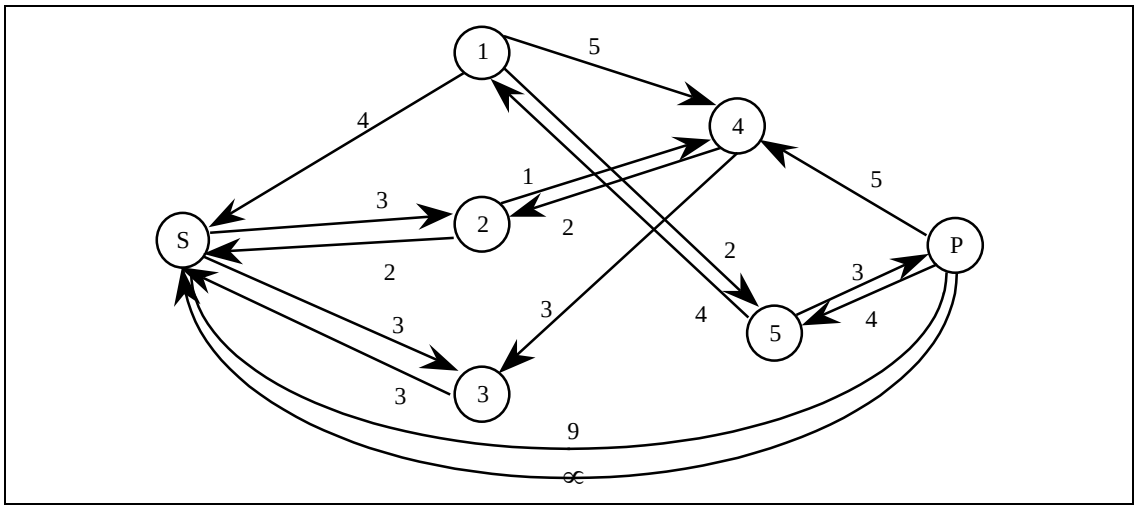


Figure 6.13: troisième graphe d'écart

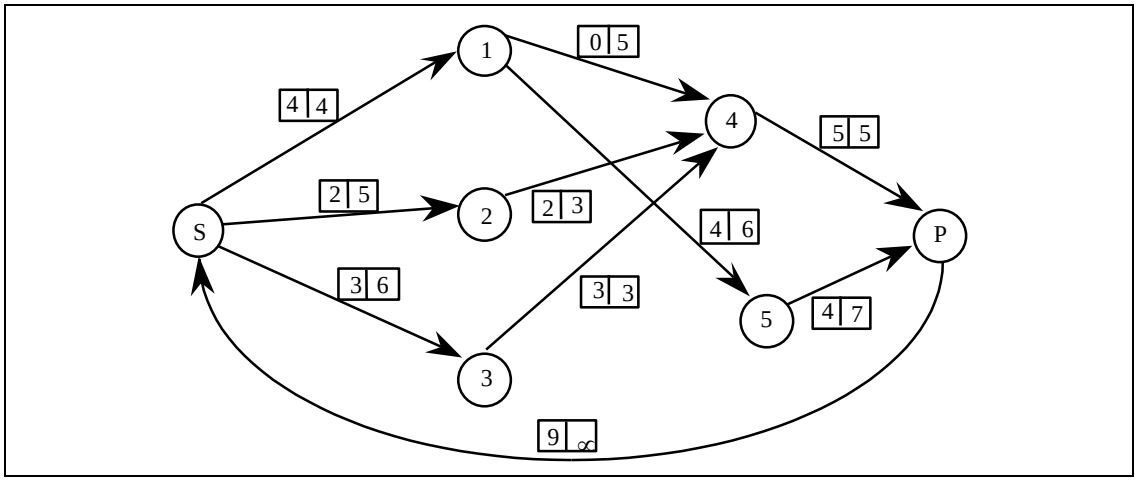


Figure 6.14 : flot maximal.

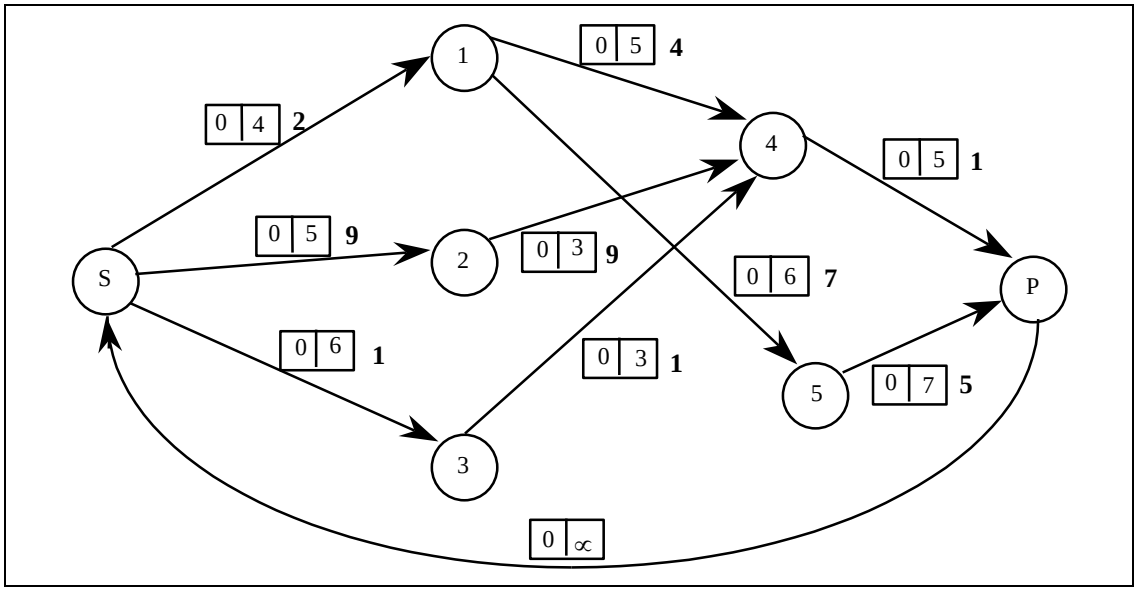


Figure 6.15: un problème avec des coûts

6.6.2. Le problème du flot maximal à coût minimal :

Nous allons maintenant modifier cet algorithme du graphe d'écart pour pouvoir tenir compte de coûts unitaires de transport sur les arcs. Pour chaque arc (i, j), on a en outre , un coût d_{ij} (≥ 0).
Il faut déterminer un flot maximal de coût global minimal, c'est-à-dire qui minimise : $\sum_{(i,j)\in U} d_{ij} f_{ij}$

<u>Algorithme de ROY :</u>

(I) Poser f = 0.

(II) Construire $G^e(f)$ en introduisant un coût d_{ij} sur l'arc (i, j) et un coût - d_{ij} sur l'arc (j , i).

(III) Chercher un chemin de coût minimal dans $G_e(f)$ allant de s à p. S'il n'y a pas de chemin de s à p, le flot est maximal de coût minimal alors FIN.

(IV) Sinon améliorer le flot f et retourner en (II).

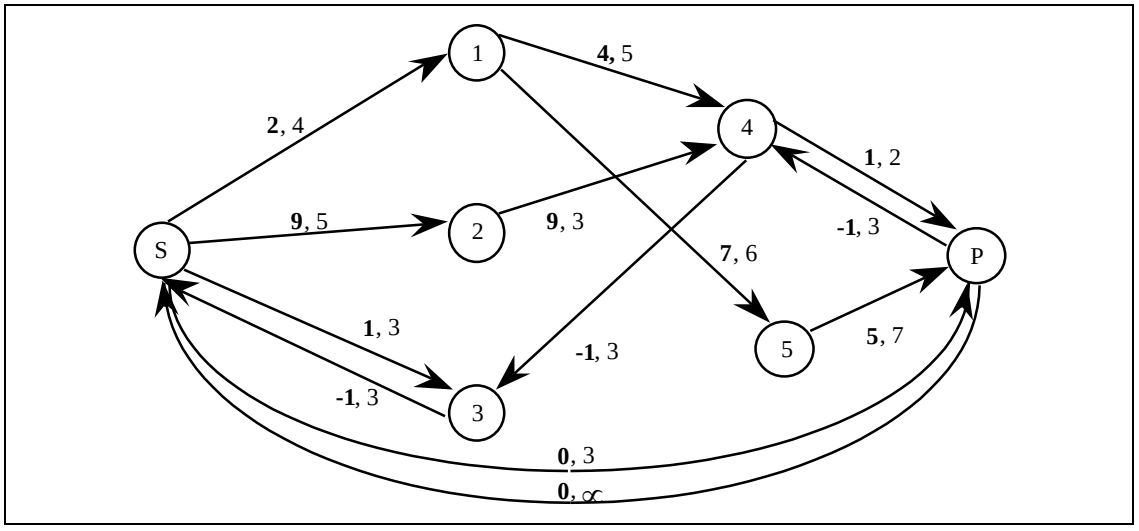


Figure 6.16 : deuxième graphe d'écart.

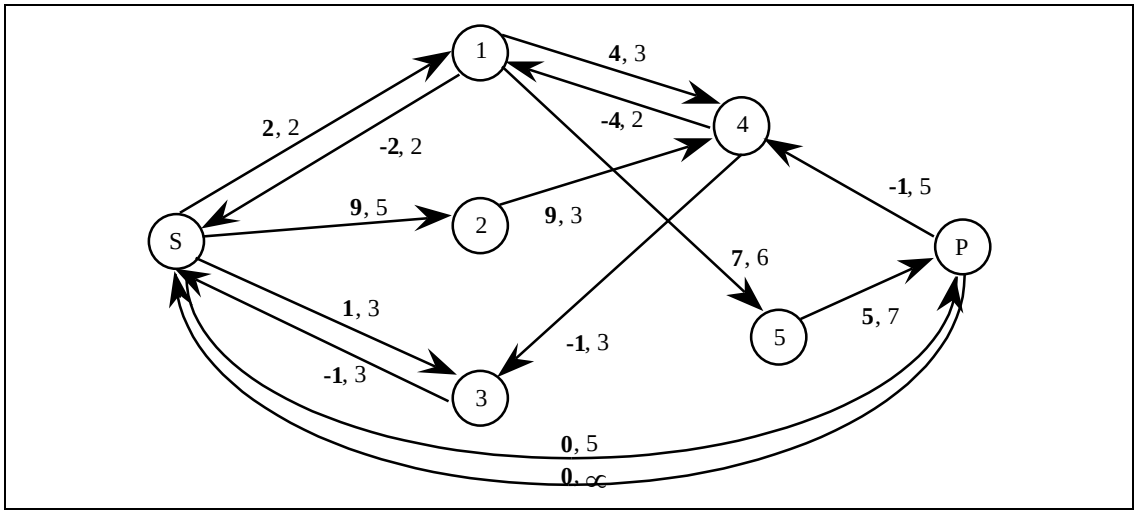


Figure 6.17 : troisième graphe d'écart.

Exemple :

Le premier graphe d'écart se confond avec le graphe initial (Cf. figure 6.15). Sur ce graphe, le chemin de coût minimal allant de s à p est [s, 3, 4, p] de coût 3. On fait alors passer un flux de valeur 3 à travers ce chemin et on obtient un deuxième graphe d'écart (Cf. figure 6.16). Sur ce graphe, le chemin de coût minimal allant de s à p est [s, 1, 4, p] de coût 7. On fait alors passer un flux de valeur 2 à travers ce chemin et on obtient un troisième graphe d'écart (Cf. figure 6.17). Sur ce graphe, le chemin de coût minimal allant de s à p est [s, 1, 5, p] de coût 14. On fait alors passer un flux de valeur 2 à travers ce chemin et on obtient un quatrième graphe d'écart (Cf. figure 6.18). Sur ce graphe, le chemin de coût minimal allant de s à p est [s, 2, 4, 1, 5, p] de coût 26. On fait alors passer un flux de valeur 2 à travers ce chemin et on obtient un dernier graphe d'écart (Cf. figure 6.19).

Il n'y a plus de chemin de s à p. Le flot est maximal de coût minimal (Cf. figure 6.20). Le coût de ce flot est : 3×3 + 2×7 + 2×14 + 2×26 = 103.

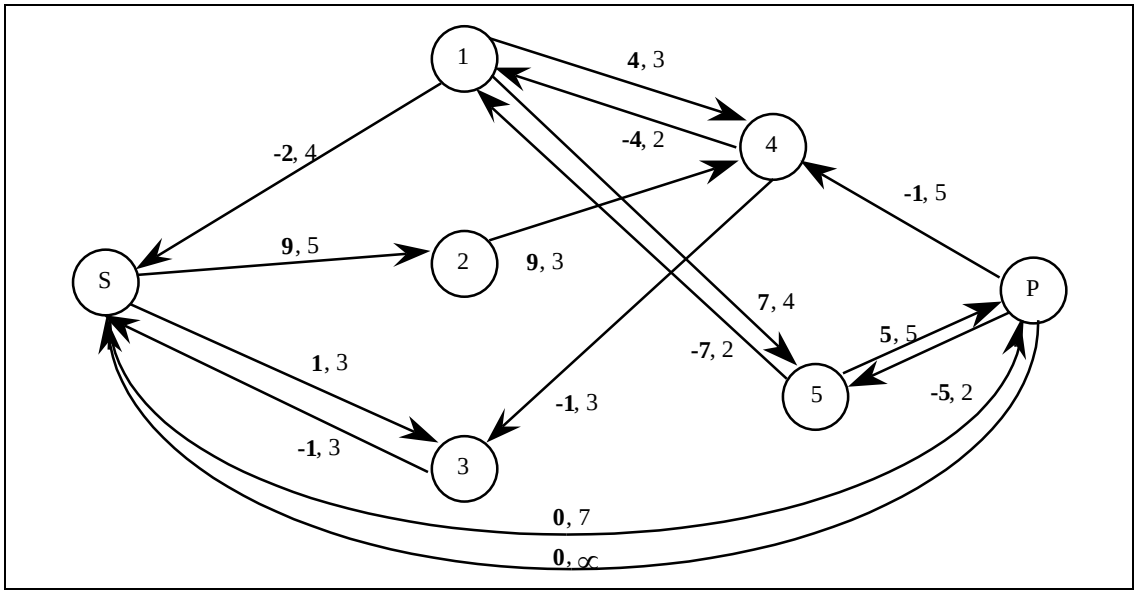


Figure 6.18 : quatrième graphe d'écart.

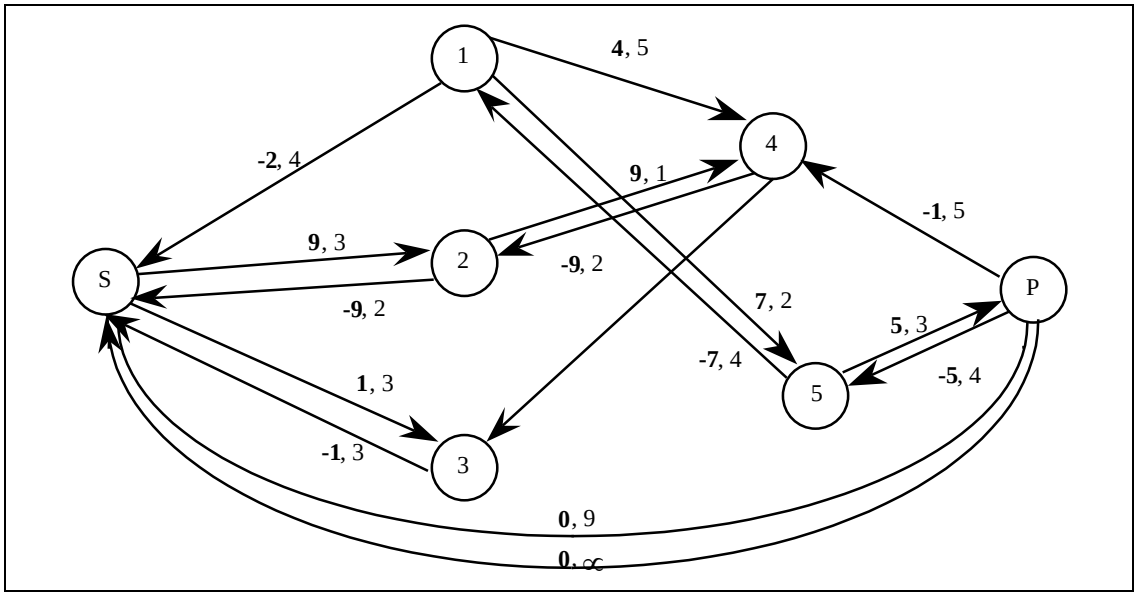


Figure 6.19 : dernier graphe d'écart.

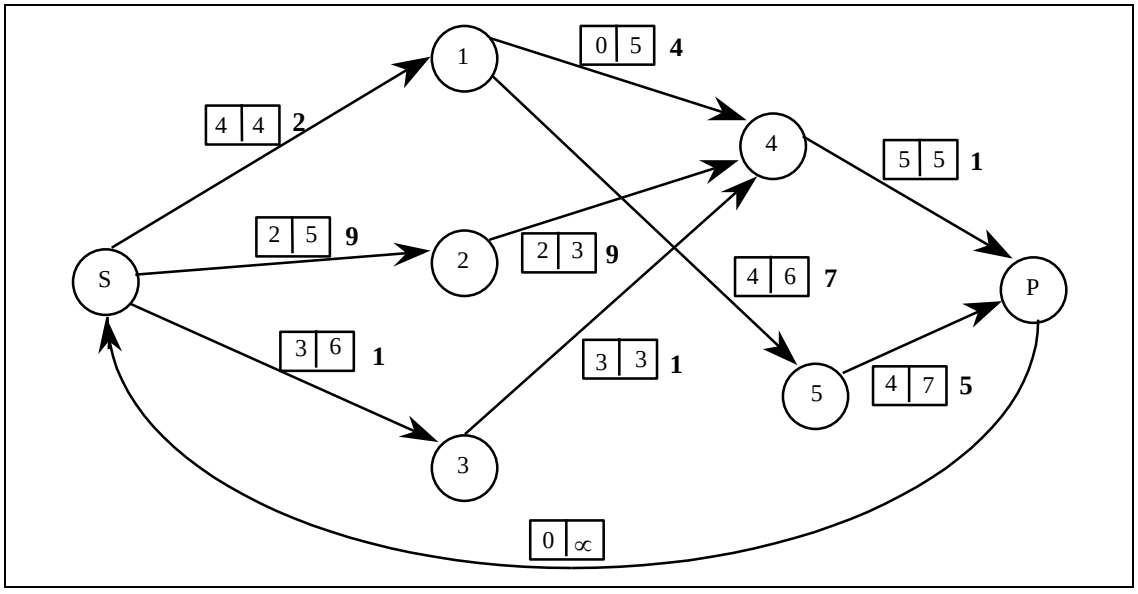


Figure 6.20 : flot maximal de coût minimal.

7. LES PROBLEMES DE FLOTS CANALISES A COUT MINIMAL :

7.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous considérons des généralisations du problème du flot maximal en traitant des problèmes de flots à coût minimal et des problèmes de flots canalisés. Un flot canalisé est un flot qui doit satisfaire outre les contraintes de KIRCHOFF et de capacités, des contraintes supplémentaires dites de bornes : à chaque arc (i, j) est associé une borne b_{ij} et le flux sur l'arc (i, j) doit être supérieur ou égal à b_{ij}. Un flot sera de coût minimal si une fonction linéaire des coûts de transport est minimisée.

L'outil de base reste la chaîne améliorante. Nous le simplifions en introduisant la notion de graphe d'écart qui permet de se ramener à la recherche de chemins améliorants. Nous expliquons comment chercher un flot canalisé et un flot de coût minimal.

7.2. Flot canalisé et graphe d'écart :

Il arrive qu'une borne inférieure b(u) entière du flux sur l'arc u ne soit pas nulle, auquel cas, le problème de la recherche d'un flot compatible (on dira canalisé) se pose. On rappelle que c(u) la capacité de l'arc u est une borne supérieure entière du flux sur l'arc u.

Définition :

> Un flot canalisé est une application f de U dans N (ensemble des entiers) satisfaisant les contraintes de Kirchoff et les contraintes de bornes et de capacités.

On cherche un flot f tel que pour tout u, $b(u) \leq f(u) \leq c(u)$. Le théorème d'Hoffman donne une condition d'existence d'un flot canalisé.

Théorème d'HOFFMAN :

Une C.N.S pour qu'il existe un flot canalisé dans le réseau G = (X, U, b, c) est que :

pour tout $Y \subseteq X$, la somme des bornes des arcs entrants dans Y est inférieure ou égale à la somme des capacités des arcs sortants de Y, c'est-à-dire :

$$\sum_{u \in U^-(Y)} b(u) \leq \sum_{u \in U^+(Y)} c(u)$$

Démonstration :

La condition est évidemment nécessaire. En effet, le flux entrant dans Y est égal au flux sortant de Y. Le flux entrant est supérieur à la somme des bornes et le flux sortant inférieur à la somme des capacités on a donc l'inégalité dès qu'il existe un flot.

La suffisance de la condition est assurée par l'algorithme de recherche d'un flot compatible que nous introduisons et justifions ci-dessous. Q.E.D.

Algorithme de recherche d'un flot compatible :

{Par la suite f_u est le flux sur l'arc u}

(I) Partir du flot f nul.

(II) Chercher un arc u tel que $f_u < b(u)$

- si un tel arc n'existe pas alors FIN 1;
- sinon poser s = extrémité terminale de u et p = extrémité initiale de u.

(III) Chercher une chaîne de s à p dont les arcs dans le sens + sont insaturés et les arcs dans le sens - ont un flux strictement supérieur à la borne; si ce n'est pas possible alors FIN 2.

(IV) Utiliser cette chaîne pour améliorer le flot en cherchant à satisfaire la contrainte de borne sur l'arc u et retourner en (ii).

Cet algorithme s'arrête, soit après avoir trouvé un flot compatible (FIN1), soit parce que la condition nécessaire du théorème n'est pas vérifiée (FIN2). Nous allons prouver ce résultat après avoir fait fonctionner l'algorithme sur l'exemple de la figure 7.2.

On trouve successivement les quatre chaînes améliorantes suivantes:

• pour s = x_3 et p = x_1, on a la chaîne (x_3, x_4, x_1) de capacité 2.

• pour s = x_3 et p = x_1, on a la chaîne (x_3, x_4, x_5, x_1) de capacité 2.

• pour s = x_2 et p = x_1, on a la chaîne (x_2, x_5, x_1) de capacité 3.

• pour s = x_3 et p = x_5, on a la chaîne (x_3, x_4, x_5) de capacité 1.

On a alors un flot compatible.

Validité de l'algorithme :

L'algorithme s'arrête. On ne peut pas boucler indéfiniment car l'ensemble des valeurs est fini et on est sûr de ne jamais retrouver le même flot entre deux étapes. En effet, $\sum_{u \in U} \max\{b_u - f_u, 0\}$ est strictement décroissant au cours de l'algorithme et minoré par 0.

Puisque l'on part du flot nul et que l'on respecte toujours les contraintes de capacités, on est sûr que pour tout u : fu ≤ c(u).

Si FIN1, alors on a obtenu un flot compatible.

Si FIN2, alors l'algorithme de marquage d'une chaîne de s à p est bloqué. Notons A l'ensemble des sommets marqués à la fin de cette phase.

On vérifie que le flot entrant dans A est strictement inférieur à la somme des bornes des arcs entrants dans A et est égal à la somme des capacités des arcs sortants de A (Cf. 7.1).

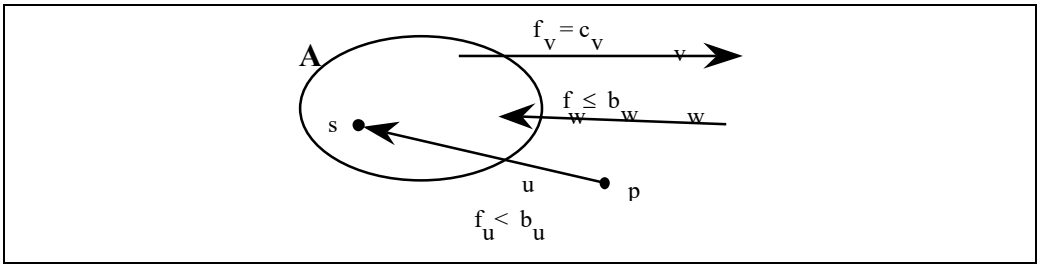


Figure 7.1 : cas de non-existence d'un flot compatible (FIN2)

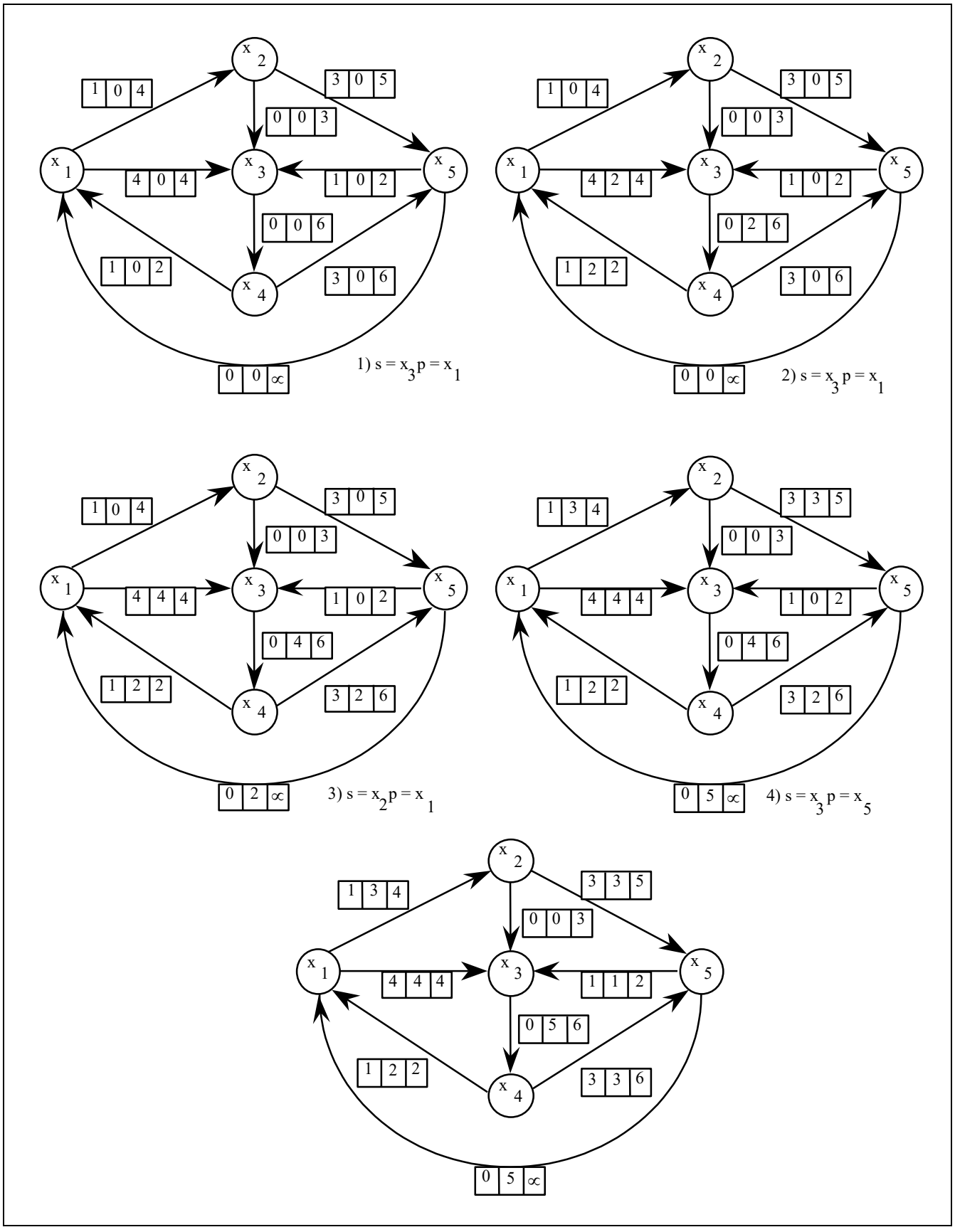


Figure 7.2 : application de l'algorithme.

7.3. Flot canalisé à coût minimal :

7.3.1. Décomposition d'un flot sur une base de circuits :

Proposition :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un flot f soit positif est qu'il existe une famille de circuits $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ et des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ entiers positifs tels que : $f = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + ... + \lambda_p\mu_p$.

Démonstration :

La condition est suffisante car chaque circuit peut être considéré comme un flot positif. Montrons que la condition est également nécessaire. En partant d'un arc de flux non nul, on peut trouver également un arc suivant, également de flux non nul, à cause de la condition de Kirchoff. En itérant on va repasser par un même sommet. On aura donc trouvé un circuit μ_1. Soit λ_1 la valeur minimale des flux sur ce circuit; $f - \lambda_1\mu_1$ est encore un flot positif et on peut donc lui appliquer le même raisonnement ce qui nous permet d'obtenir successivement toutes les composantes de f, car à chaque fois un nouvel arc de flux nul apparaît. Q.E.D.

7.3.2. Bijection d'écart :

Définition du graphe d'écart $G^e(f)$ (incluant les b_{ij}) :

Au couple formé d'un flot f et d'un réseau de transport G, on associe le graphe d'écart $G^e(f)=(X,U^e(f))$ défini par :

> **à tout arc (i, j) de G, correspond deux arcs : un arc (i, j) de $G^e(f)$ de capacité $c_{ij} - f_{ij}$ et un arc (j, i) de $G^e(f)$ de capacité $f_{ij} - b_{ij}$ (si la capacité d'un arc est nulle dans $G^e(f)$, on ne représente pas l'arc, car il est inutile).**

Soit f_0 un flot compatible et $G^e(f_0)$ le graphe d'écart associé. Soit φ un flot sur $G^e(f_0)$ on définit un nouveau flot f compatible sur G par la formule notée $f = f_0 \oplus \varphi$ telle que :

$$(f)_u = (f_0)_u + (\varphi)_{u+} - (\varphi)_{u-}$$

Le coût du flot f sur G est égal au coût du flot f_0 sur G plus le coût du flot φ sur le graphe d'écart.

On cherche à minimiser le coût de f où f est un flot compatible. La méthode que nous allons voir consiste à supprimer les circuits de coût strictement négatif dans le graphe d'écart. Elle est fondée sur le théorème d'optimalité que nous démontrons.

7.3.3. Théorème d'optimalité :

Théorème d'optimalité :

Un flot f_0 compatible est de coût minimal si et seulement si $G^e(f_0)$ ne contient pas de circuit de coût strictement négatif.

Démonstration

La condition est évidemment nécessaire. En effet, s'il existe un circuit de coût strictement négatif, ce circuit permet de construire un flot strictement meilleur, comme nous l'expliquons avec l'exemple ci-dessous. La condition est également suffisante. Soit un flot f_0 tel que $G^e(f_0)$ ne contient pas de circuit de coût strictement négatif et f un autre flot compatible; on a $f = f_0 \oplus \varphi$. φ se décompose sur une base de circuits de $G^e(f_0)$: $\varphi = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + ... + \lambda_p\mu_p$.
Alors : Coût(φ) = $\sum_{i\in[1,p]} \lambda_i$ Coût(μ_i) est positif car les coûts de tous les circuits du graphe d'écart sont positifs et les λ_i également. En utilisant Coût(f) = Coût(f_0) + Coût(φ) on a Coût(f) ≥ Coût(f_0) et donc f_0 est un flot compatible de coût minimal. Q.E.D.

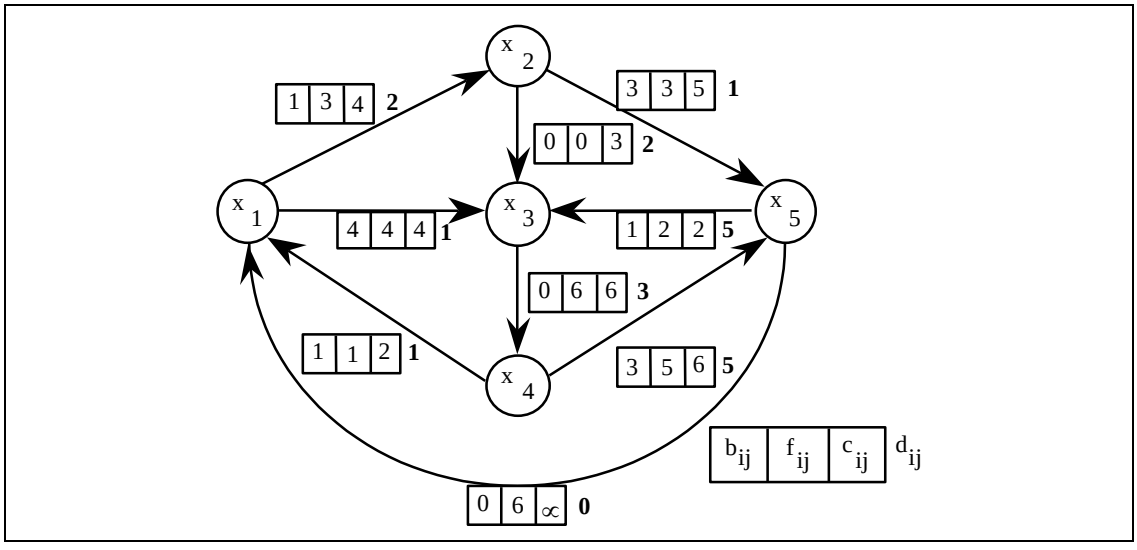
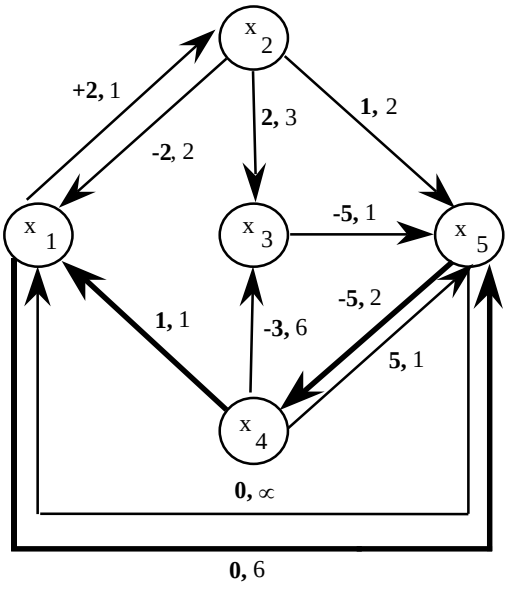
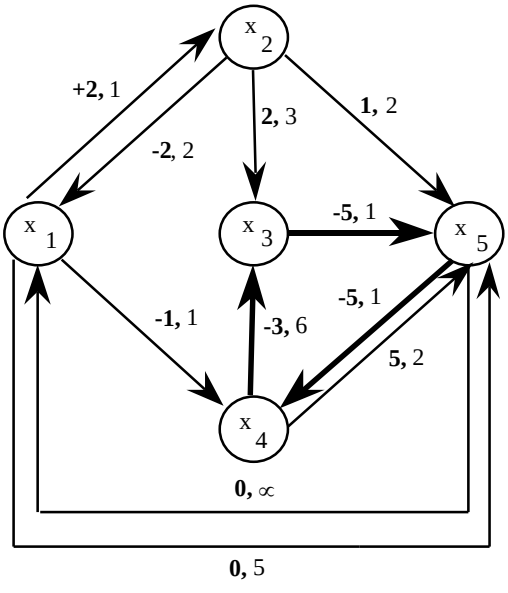


Figure 7.3 : problème de flot canalisé à coût minimal.

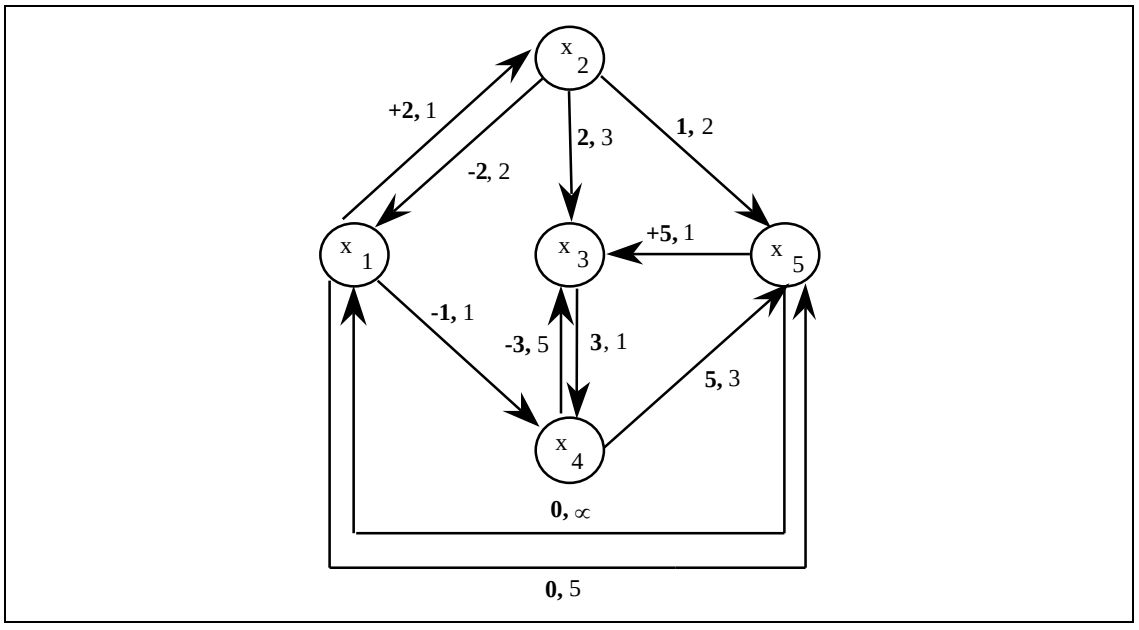
Sur la figure 7.3, on a un exemple de flot compatible. Nous allons utiliser le résultat précédent pour trouver un flot compatible de coût minimal. Sur la figure 7.4, on a le graphe d'écart associé. Ce graphe d'écart contient un circuit de coût strictement négatif : le circuit [x_5, x_4, x_1]. On fait alors passer un flux de 1 à travers ce circuit dans le graphe d'écart. Sur la figure 7.5, on a le graphe d'écart associé. Ce graphe d'écart contient un circuit de coût strictement négatif : le circuit [x_3, x_5, x_4]. On fait alors passer un flux de 1 à travers ce circuit dans le graphe d'écart. On obtient alors un dernier graphe d'écart dont tous les circuits sont de coûts positifs ou nuls (Cf. figure 7.6). En conséquence, le flot compatible résultant, qui est rapporté sur la figure 7.7 est un flot compatible de coût minimal.



7.4 : premier graphe d'écart.



7.5 : deuxième graphe d'écart.



7.6 : dernier graphe d'écart.

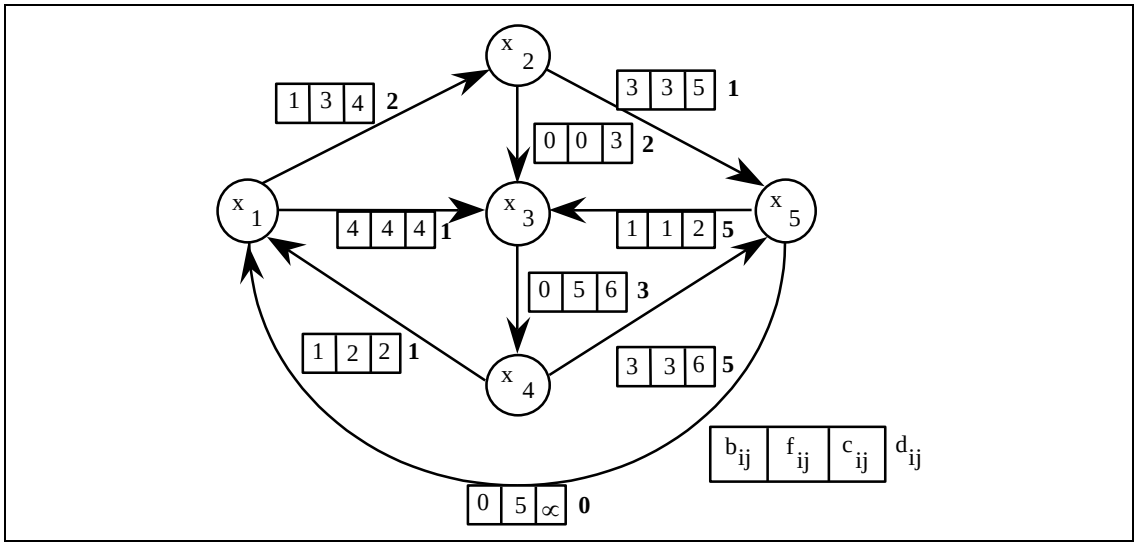


Figure 7.7 : flot canalisé de coût minimal.

7.3.4. Preuve de l'algorithme de ROY :

Nous terminons ce chapitre en utilisant le théorème d'optimalité pour démontrer la validité de l'algorithme de ROY.

<u>Proposition :</u> l'algorithme de ROY détermine un flot maximal de coût minimal.

<u>Démonstration :</u>

On montre par récurrence que tous les flots f_k construits au cours de l'algorithme de ROY sont de coût minimal parmi les flots de valeur v_k. Il en résultera que le dernier flot sera maximal à coût minimal.

La propriété est vraie pour $f_0 = 0$ qui est le flot de valeur nulle de coût minimal, supposons que f_k soit de coût minimal parmi les flots de valeur v_k on a $f_{k+1} = f_k \oplus \varepsilon\mu$ ou μ est un circuit de coût minimal passant par l'arc de retour dans le graphe d'écart $G^e(f_k)$ et ε la valeur maximale

admissible du flot. Soit f un flot quelconque de même valeur sur l'arc de retour que f_{k+1}. On sait que $f = f_k \oplus \varphi$ où φ est un flot sur le graphe d'écart $G^e(f_k)$. Appliquons le théorème de décomposition : $\varphi = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + ... + \lambda_p\mu_p$. En utilisant le fait que f_{k+1} et f ont mêmes composantes sur l'arc de retour on obtient :

$\sum_{i \in I} \lambda_i = \varepsilon$ où I est l'ensemble des circuits passant par l'arc de retour.

On en déduit :

Coût(f) = $\sum_{i \in [1,p]} \lambda_i$ Coût(μ_i) + Coût(f_k) ≥ $\sum_{i \in I} \lambda_i$ Coût(μ_i) + Coût(f_k) car tous les circuits ne passant pas par l'arc de retour sont de coût positif ou nul du fait que, par hypothèse de récurrence, f_k est de coût minimal parmi les flots de valeur v_k. En utilisant Coût(μ_i) ≥ Coût(μ) pour $i \in I$ et

$\sum_{i \in I} \lambda_i = \varepsilon$, on a : Coût($f$) ≥ ε Coût(μ) + Coût(f_k) = Coût(f_{k+1}). Ce qui démontre la minimalité du coût de f_{k+1} et le résultat par récurrence. D'où la validité de l'algorithme de ROY. Q.E.D.

7.4. Algorithme de graphe et programmation linéaire

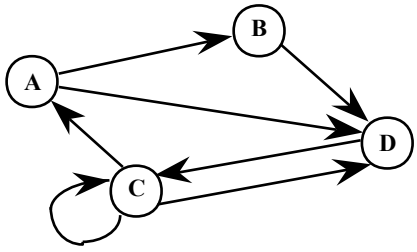
Le problème de flot à coût minimal peut être modélisé par le programme linéaire ci-dessous. Il en est de même pour des problèmes de cheminement et de couplage. Par exemple, chercher un chemin de s à p de cout minimal équivaut à chercher un flot de valeur 1 de s à p de coût minimal. On a vu pour le problème d'affectation, donc de couplage comment se ramener à un problème de flot. On pourrait donc apriori se contenter de solveur de programme linéaire pour tous ces problèmes, d'autant que la solution du programme linéaire en continue est entière. A posteriori les algorithmes spécifiques à chaque problème sont beaucoup plus efficaces ce qui justifie l'intérêt de leur étude.

$$\begin{array}{ll} & Min \sum_{(i,j) \in U} d_{i,j} f_{i,j} \\ (a) & \sum_{j \; succ \; i} f_{i,j} = \sum_{k \; prec \; i} f_{k,i}; \quad \forall i \in V \\ (b) & 0 \le f_{i,j} \le C_{i,j}; \quad \forall (i,j) \in U \end{array}$$

Travaux Dirigés

Exercice 1 :

Soit le graphe



1) Enumérer: U(A), U(B), $U^-(C)$, $U^+(D)$.

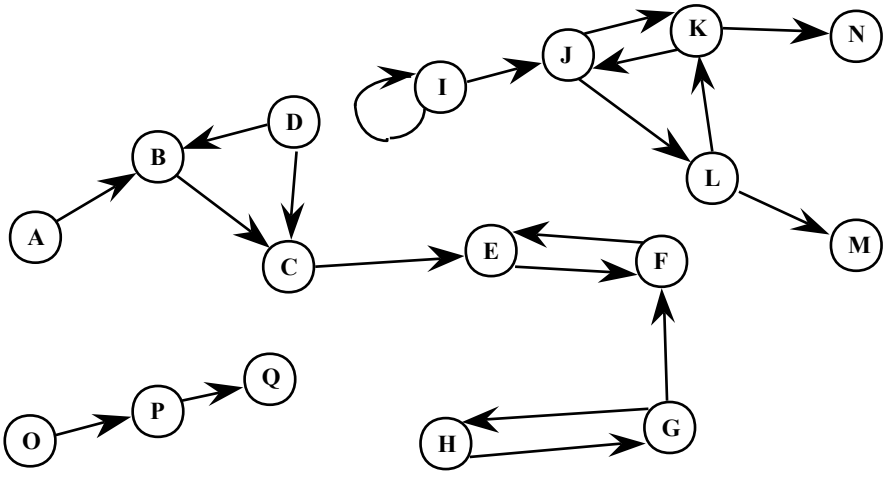
2) Calculer: $d^+(C)$, $d^-(C)$, d(C).

3) Rapporter un chemin simple mais pas élémentaire.

4) Rapporter un circuit Hamiltonien.

Exercice 2 :

On considère le graphe G=(X,U) ci-dessous. Rapporter des chaînes de B à G de longueur 7, 8, 9, 10 et 11. Déterminer ses composantes connexes, ses composantes fortement connexes ainsi que le graphe réduit.



Exercice 3 :

Montrer le lemme de KOENIG : on peut toujours extraire d'un chemin allant de i à j ($i \neq j$) un chemin élémentaire allant de i à j. Généraliser au cas i=j, puis à une chaine et un cycle.

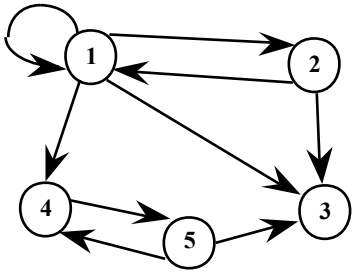
Exercice 4 :

Quelles méthodes proposez-vous pour coder un graphe en machine ?

Exercice 5

On propose deux méthodes pour coder un graphe G=(X,U) en machine : la matrice d'adjacence A et la file des successeurs de tableaux ALPHA1, ALPHA2 et BETA. La matrice associée est définie par $A=(a_{ij})$ avec $a_{ij}=1$ si l'arc (i,j) appartient à U et $a_{ij}=0$, sinon. La file des successeurs BETA est le tableau des successeurs, les successeurs du sommet I se trouvant entre les adresses ALPHA1(I) et ALPHA2(I) dans le tableau BETA, (en cours on avait un seul tableau ALPHA).

Rapporter les tableaux A, ALPHA1, ALPHA2 et BETA pour le graphe ci-dessous.



Ecrire un algorithme permettant de passer de la file des successeurs à la matrice associée. Quelle est la complexité de cet algorithme?

Ecrire un algorithme permettant de passer de la matrice associée à la file des successeurs. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

remarque:

On a en fait deux matrices associées car les valeurs peuvent être entières ou booléennes.

Exercice 6 :

Donner le nombre d'arêtes d'un graphe non orienté complet sans boucle de n sommets.

Exercice 7 :

Expliquer pourquoi si G=(X,E) est un graphe non orienté sans boucle, la somme des degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

Correction exercice 5 :

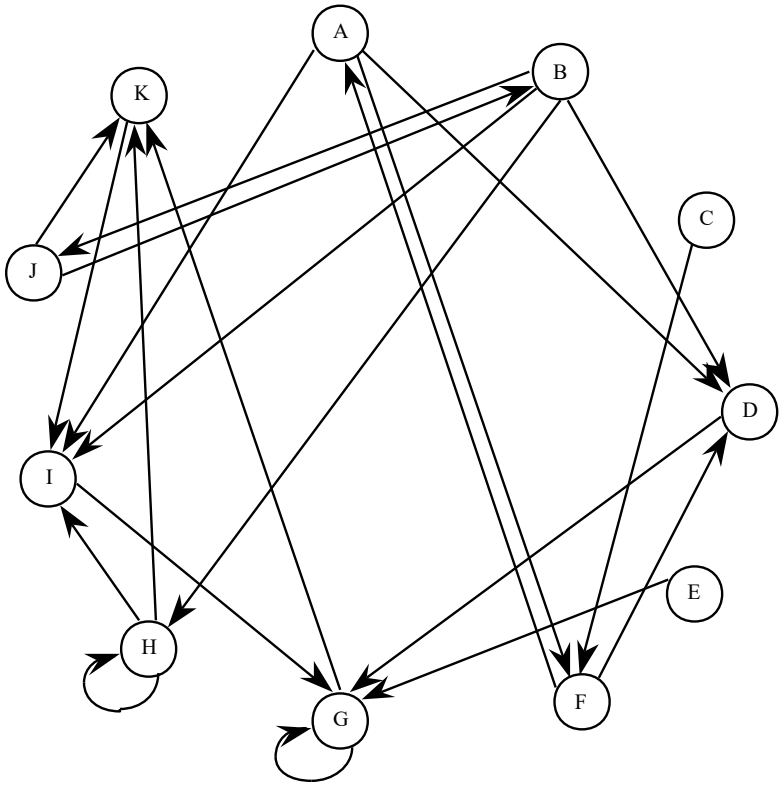
```
{ file des successeurs vers matrice d'adjacence }
for i := 1 to N do
for j := 1 to N do
A[i,j] := 0;
for i := 1 to N do
begin
j1 := ALPHA1[i];
j2 := ALPHA2[i];
if ( j1 <> 0 ) then
    begin
        for j := j1 to j2 do
            A[i, BETA[j]] := 1;
    end;
end;

{ matrice d'adjacence vers file des successeurs }

indi := 1;
for i :=1 to N do
begin
    j1 := 0;
    j2 := 0;
    for j := 1to N do
        if A[i,j] = 1 then
            begin
                if j1 = 0 then j1 := indi;
                BETA[indi] := j;
                j2 := indi;
                indi := indi + 1;
            end;
    ALPHA1[i] := j1;
    ALPHA2[i] := j2;
end;
```

Fermeture transitive d'un graphe G=(X,U) orienté et composantes fortement connexes.

On considère le graphe suivant :



<u>Définition 1 :</u> Soit i un sommet de G. On appelle fermeture transitive directe de i, l'ensemble des sommets j de G tels que : (i=j) ou (il existe un chemin de i à j), j est alors un descendant de i.

<u>Question 0 :</u> rapporter la matrice associée à ce graphe.

<u>Question 1:</u> <u>détermination des successeurs d'un sommet</u>

On note $\Gamma(i)$ l'ensemble des successeurs du sommet i. Ecrire les successeurs des sommets du graphe ci-dessus.

Quelle est la complexité de la recherche des successeurs d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

<u>Question 2 : calcul des descendants d'un sommet</u>

On note $\widehat{\Gamma}(i)$ l'ensemble des descendants de i (i est considéré comme descendant d'ordre 0 de lui même), et $\Gamma^k(i)= \Gamma(\Gamma^{k-1}(i))$ l'ensemble des successeurs de i à l'ordre k.

Montrer que : $\widehat{\Gamma}(i) = \{i\} + \Gamma(i)+ \Gamma^2(i) +\Gamma^3(i)+...+ \Gamma^{n-1}(i)$.

On suppose que le graphe est codé par la matrice associée. Ecrire les descendants du sommet A du graphe ci-dessus ?

Quelle est la complexité, en utilisant cette méthode, de la recherche des descendants d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Question 3 : calcul des descendants d'un sommet

Soit j un descendant de i. On dit que j est à distance k de i si k est la longueur du plus court chemin entre i et j, on va dire que j appartient à $D^k(i)$.

Montrer que : $\widehat{\Gamma}(i) = \{i\} + D^1(i) + D^2(i) + \ldots + D^k(i) + \ldots + D^{n-1}(i)$.

Procedure "Descendants de (i)"

Début

$D^0(i) = \{i\}, \widehat{\Gamma}(i) = \{i\}$;

Pour k = 1 à n-1 faire

$D^k(i) = \Gamma(D^{k-1}(i)) - \widehat{\Gamma}(i)$;

$\widehat{\Gamma}(i) = \widehat{\Gamma}(i) + D^k(i)$;

Fin pour;

Fin.

Quelle est la complexité, en utilisant cette méthode, de la recherche des descendants d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Définition 2 : On appelle fermeture transitive inverse de i, l'ensemble des sommets j de G tels que (i=j) ou (il existe un chemin de j à i) j est alors un ascendant de i.

Question 4 : Détermination des prédécesseurs d'un sommet

On note $\Gamma^{-1}(i)$ l'ensemble des prédécesseurs du sommet i.

Ecrire les prédécesseurs des sommets du graphe ci-dessus.

Question 5 : Détermination des ascendants d'un sommet

Proposer une méthode analogue à la précédente pour calculer les ascendants d'un sommet i. Quelle est sa complexité ?

Question 6 :

Que représente l'ensemble des sommets qui sont à la fois descendants et ascendants du sommet i ?

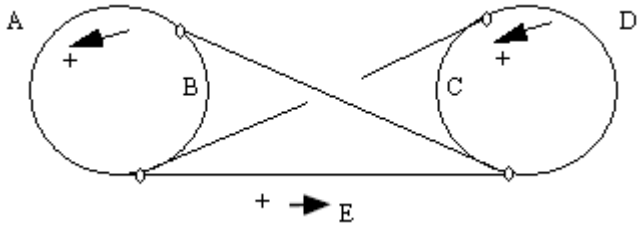
Question 7 :

Proposer un algorithme basé sur les questions précédentes pour chercher l'ensemble des composantes fortement connexes d'un graphe. Quelle est sa complexité (cette méthode s'appelle la méthode de MALGRANGE) ? Appliquer cette méthode à l'exemple précédent en utilisant la matrice écrite. On distinguera, en appliquant l'algorithme, les descendants (resp. ascendants) d'ordre 1, d'ordre 2, ... etc.

Question 8 :

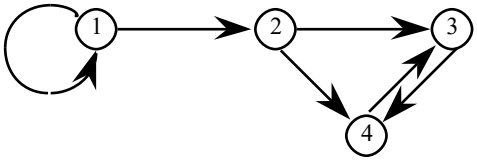
Dessiner le graphe réduit, le graphe initial est-il planaire ?

Exercice 1 : Soit un train électrique dont le circuit est le suivant :



Chaque aiguillage a 2 ou 3 positions. On a remarqué qu'au bout d'un certain temps, quel que soit l'état initial, le tronçon E n'est jamais emprunté par le train. Expliquer cela à l'aide d'un graphe à 10 sommets.

Exercice 2 : Soit G = (X,U), un graphe orienté et B la matrice d'adjacence sommet-sommet associée à G. On prendra comme exemple le graphe suivant :



2.0 : Calculer B, B^2, B^3, B^4, (I+B), $(I+B)^2$, $(I+B)^3$, $(I+B)^4$, pour l'exemple ci-dessus, où la matrice B est booléenne (on utilisera les opérations booléennes).

On se place maintenant dans le cas général.

2.1 : Si B^k est le produit matriciel Booléen de B par B^{k-1}, montrer que:

$\{B^k\}_{ij} = 1$ s'il existe un chemin de k arcs entre i et j et 0 sinon.

2.2 : On pose :

$$\widehat{B}_k = I + B + B^2 + \ldots\ldots + B^k.$$

Montrer que :

$\{\widehat{B}_k\}_{ij} = 1$ s'il existe un chemin de k arcs au plus entre i et j et 0 sinon.

Montrer que l'on peut définir $\widehat{B} = \lim \widehat{B}_k$ pour k tend vers $\propto$.

2.3 : On pose de même $\widehat{C}_k = I + C + C^2 + \ldots\ldots + C^k$ où $C = B^T$. Montrer que la limite $\widehat{C}$ existe et que :

$\{\widehat{C}\}_{ij} = 1$ s'il existe un chemin entre j et i et 0 sinon.

2.4 : Déduire de ce qui précède une méthode pour décomposer G en composantes fortement connexes. Evaluer la complexité de cette méthode après avoir rappelé la complexité de la multiplication de deux matrices carrées.

2.5 : Proposer une méthode pour chercher les composantes connexes du graphe en transformant le graphe de départ.

2.6 : On se propose d'améliorer cette méthode.

Démontrer l'identité $(I+B)^k = I + B + B^2 + ... + B^k$.

Montrer que la suite $\{B(1) = I+B,\ B(k)=(B(k-1))^2$ pour $k>1\}$ converge vers $\widehat{B}$ en un nombre fini d'étapes que l'on évaluera.

En déduire un meilleur algorithme que celui obtenu en 2.4. On en précisera l'ordre.

2.7 : Que se passe-t-il si l'on remplace le produit Booléen par le produit usuel ?

<u>Exercice 3 :</u>

Un graphe dont tous les sommets sont de même degré est dit régulier. Quelles sont les graphes non orientés réguliers de degré 1 ? de degré 2 ?

<u>Exercice 4 :</u> Combien y a-t-il des graphes orientés à quatre sommets ?

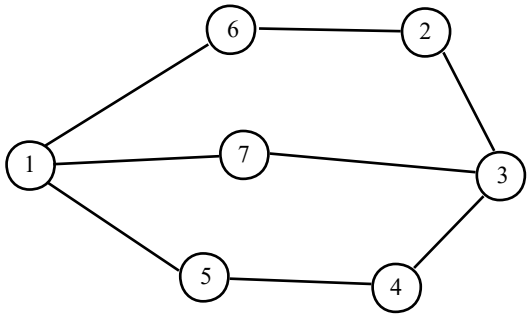
Problème Graphe Biparti et bicoloration:

On rappelle qu'un graphe G=(X,U) est biparti si toutes ses arêtes ont une extrémité dans un sous-ensemble X_1 et l'autre extrémité dans $X-X_1$. L'algorithme BIPAR(G) a pour objet de tester si un graphe G connexe est biparti.

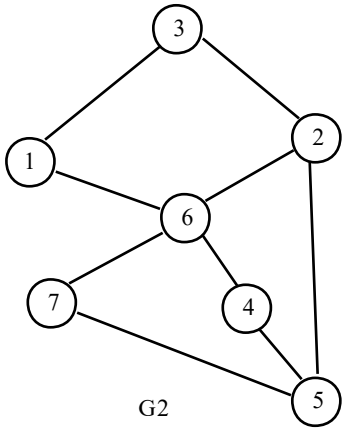
Algorithme BIPAR(G) :

```
{-1- Initialisations}
Lire un graphe connexe G=(X,U); {initialement aucun sommet n'est coloré}
colorer le sommet 1 en rouge;
initialiser le booléen BIPARTI à VRAI.

{-2- Examen des sommets colorés}
Tant qu'il existe un sommet i coloré et non examiné faire
Début
    Si i est rouge alors
        pour chaque voisin j de i faire
            Début
                si j est rouge alors BIPARTI=FAUX
                si j est non coloré alors colorer j en vert
            Fin
    sinon { i est vert alors }
        pour chaque voisin j de i faire
            Début
                si j est  vert alors BIPARTI=FAUX
                si j est non coloré alors colorer j en rouge
            Fin
Fin
{-3- Sortie de l'algorithme}
Si BIPARTI = VRAI alors écrire "G est biparti", sinon écrire "G n'est pas biparti"..
```



G1



G2

Question 1: Faire tourner l'algorithme sur les graphes G_1 et G_2. On rapportera les couleurs pour chaque itération de la boucle.

Question 2: On code le graphe G=(X,U) par la matrice A associée, c'est-à-dire : si (i,j) est une arête du graphe alors $a_{ij} = a_{ji} = 1$, sinon $a_{ij} = 0$.

(a) Quels tableaux supplémentaires sont-ils nécessaires pour BIPAR(G) ?

(b) Quelle est la complexité résultante de l'algorithme ? Justifier.

Question 3: Proposer de façon explicite une meilleure structure de données. Que devient la complexité ? Justifier.

Question 4: (Cette question est indépendante de l'algorithme)

Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il est bicolorable.

Question 5: (Cette question est indépendante de l'algorithme)

Montrer qu'un graphe biparti ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Question 6: Quelles sont les propriétés des sommets colorés en rouge et en vert au cours de l'algorithme? Justifier. Où intervient la connexité ?

Question 7: Montrer la validité de l'algorithme. En déduire la réciproque de la question 5 dans le cas connexe.

Question 8: Comment proposez-vous de modifier l'algorithme pour tester si un graphe quelconque, c'est-à-dire non nécessairement connexe est biparti?

Question 9: Le problème de coloration minimale d'un graphe quelconque est NP-difficile. Existe-il un algorithme de complexité polynomiale permettant de le résoudre ?

Exercice 1 :

Montrez qu'un graphe est un arbre si et seulement si il existe une chaîne élémentaire et une seule entre chaque paire de sommets.

Exercice 2 :

Soit G un graphe non orienté à n sommets et m arêtes. Les arêtes de G sont notées u_1, u_2 .. u_m. G_i= (V, E_i), est le graphe formé des arêtes u_1, u_2 .. u_i. On pose G_0= (V, Φ).

Question 1. Quel est le nombre de composantes connexes de G_0.

Question 2. On note $C(G_i)$ le nombre de composantes connexes de G_i. Montrer que

$C(G_i) = C(G_{i-1})$ ou $C(G_i) = C(G_{i-1}) - 1$.

Question 3. Interpréter le cas $C(G_i) = C(G_{i-1})$, puis le cas $C(G_i) = C(G_{i-1}) - 1$.

Question 4. Montrer qu'un graphe connexe a au moins n-1 arêtes.

Question 5. Montrer qu'un graphe sans cycle a au plus n-1 arêtes.

Recherche en profondeur d'abord dans un graphe

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer avec une faible complexité les descendants d'un sommet i_0. Initialement n(i) est le nombre de successeurs de i. On initialise également p(i)=0 pour i différent de i_0 et $p(i_0)=i_0$.

Au cours de l'exploration, on associe à chaque sommet i, un nombre p(i) $\in$ [0,n] et on dit que **le sommet i est atteint** quand p(i) est strictement positif (p(i) est alors le sommet ayant permis d'atteindre le sommet i) et que le sommet i est **non atteint** si p(i) est nul.

Un sommet atteint se trouvera, par convention, dans l'un des deux états suivants : **ouvert**, quand n(i) est strictement positif, **fermé** quand n(i) est nul.

Algorithme :

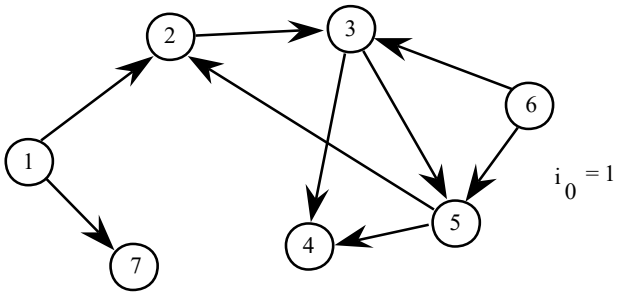
```
Début
   Pour i =1 à n faire {les sommets sont numérotés de 1 à n.}
      Début
         p(i) := 0;
         n(i) := d+(i);
      Fin
   p(i0) := i0;
   i := i0;
   Tant que (n(i0) + ABS(i-i0)) > 0 faire /*ABS(x) est la valeur absolue de x */
      Début
         Si n(i) différent de 0 alors {le sommet  i est ouvert}
            Début
               Sélectionner parmi les successeurs de i le sommet j venant en position n(i)
               n(i) := n(i)-1;
               Si p(j)=0 alors {le sommet j est non atteint}
                  Début
                     p(j) := i; {le sommet j devient atteint}
                     i := j;
                  Fin
            Fin
         sinon {le sommet i est fermé car on a examiné tous ses successeurs}
            i := p(i)
      Fin
Fin
```

Première partie: étude de l'algorithme

Question 1 : On admettra provisoirement que la restriction de la fonction p à $X-i_0-\{i/p(i)=0\}$ définit une arborescence partielle de racine i_0 à tout instant de l'algorithme. Si p(i) est différent de 0, p(i) est le père de i. Rappelons qu'une telle fonction père définit une arborescence si le graphe associé à sa restriction est connexe.

On demande de faire tourner l'algorithme sur le graphe ci-dessous en traçant autant d'arborescences obtenues en cours d'algorithme que d'exécutions de la boucle tant que avec les conventions suivantes :

- initialement, l'arborescence est réduite à sa racine $i_0 = 1$;
- quand on sélectionne un sommet j avec p(j)=0, on ajoute l'arc "plein" (i,j) à l'arborescence;
- quand on ferme le sommet i, on met en pointillé ou en rouge l'arc (p(i),i).



Question 2 : Expliquer intuitivement ce que l'on fait dans la boucle Tant Que. Interpréter le test : $(n(i_0) + ABS(i-i_0)) > 0$.

Question 3

A quoi correspondent dans la boucle Tant que les cas n(i) différent de 0 et n(i) égal 0 ?

Question 4

Combien de fois exécute-t-on la boucle Tant que pour l'exemple ci-dessus ? Combien de fois au pire dans le cas général ? Pour le démontrer on distinguera les cas n(i) différent de 0 et n(i) = 0.

Deuxième partie : preuve de l'algorithme.

Question 1: Montrer qu'en cours d'algorithme on construit une arborescence de racine i_0.

Question 2: Montrer que la restriction de cette arborescence aux arcs pleins est une arborescence, réduite à un chemin, dont i est le sommet pendant (cette arborescence est dite arborescence courante) et i_0 le sommet initial.

Question 3: Montrer que tout sommet atteint est descendant de i_0.

Question 4: A quelle condition un sommet est-il retiré de l'arborescence courante ?

Question 5: Que devient l'arborescence courante à la fin de l'algorithme ?

Question 6: Montrer en utilisant le fait que les n(i) décroissent en restant positifs ou nuls, et que l'algorithme ne se bloque jamais en distinguant les cas $i=i_0$ et $i \neq i_0$. Déduire que l'algorithme se termine.

Question 7: Montrer que tout sommet descendant de i_0 est atteint à la fin de l'algorithme.

Question 8 : Montrer que l'algorithme détermine les descendants de i_0.

Troisième partie : complexité de l'algorithme

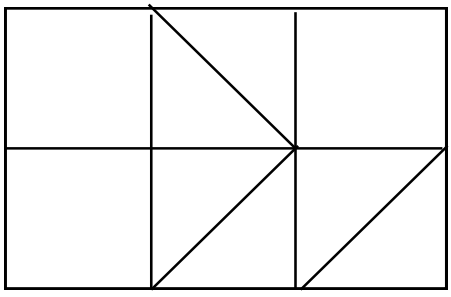
Question 1: Quel codage du graphe proposez-vous?

Question 2: Evaluer la complexité globale de l'algorithme en justifiant votre réponse.

Quatrième partie: extensions.

On a donc démontré que cet algorithme permet de déterminer les descendants d'un sommet i_0. Quelle méthode proposez-vous pour déterminer les composantes connexes d'un graphe? Ecrire un tel algorithme utilisant comme sous-programme l'algorithme précédent. Evaluer sa complexité.

Exercice 1 : Déterminer une chaîne eulérienne dans le graphe suivant :



Exercice 2 : Méthode arborescente :

Cinq personnes de nationalités différentes habitent les cinq premières maisons d'une rue, toutes sur le même trottoir (numérotées de 1 à 5).

Elles exercent cinq professions différentes et ont chacune une boisson et un animal favori tous différents. Les cinq habitations sont de cinq couleurs différentes.

1 : L'anglais habite la maison rouge.
2 : L'espagnol possède un chien.
3 : Le japonais est peintre.
4 : L'italien boit du thé.
5 : Le norvégien habite la première maison à gauche.
6 : Le propriétaire de la maison verte boit du café.
7 : Cette maison verte est immédiatement à droite de la blanche.
8 : Le sculpteur élève des escargots.
9 : Le diplomate habite la maison jaune.
10 : On boit du lait dans la maison du milieu.
11 : Le norvégien habite à coté de la maison bleue.
12 : Le violoniste boit des jus de fruits.
13 : Le renard est dans une maison voisine du médecin.
14 : Le cheval, à côté de celle du diplomate.

Qui élève le zèbre et qui boit de l'eau ?
(Attribué à Lewis Carrol)

Exercice 3 :

Résoudre le problème de décodage suivant :

```
   F O R T Y
+      T E N
+      T E N
_____________
   S I X T Y
```

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que F, T et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Exercice1: On se propose de résoudre le problème de décodage suivant :

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que M et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Exercice 2: Méthode de Little :(extrait de ROSEAUX)

Un représentant de commerce doit se rendre de la ville A où il réside dans quatre autres villes pour visiter les magasins clients de la marque qu'il représente. Il désire passer une et une seule demi-journée chez chacun de ses clients et revenir à sa ville de départ A. La durée du trajet entre deux villes I et J est mesurée en demi-journées et dépend de la circulation routière dans le sens IJ et JI. Le tableau donnant ces durées n'est donc pas symétrique.

$T = (t_{ij}) =$

	A	B	C	D	E
A	$\propto$	2	1	3	4
B	1	$\propto$	6	5	7
C	4	3	$\propto$	8	2
D	5	7	4	$\propto$	1
E	2	3	5	2	$\propto$

Calculer le trajet de durée minimale passant une et une seule fois par chaque ville.

PROBLEME: étude du noyau d'un graphe orienté.

Définition:

Un sous-ensemble K de l'ensemble X des sommets d'un graphe orienté G=(X, U) est dit noyau de G si:

1. K est un stable de G, c'est-à-dire : aucun couple de sommets de K n'est lié par un arc.

2. tout sommet à l'extérieur de K est extrémité initiale d'un arc dont l'extrémité terminale est dans K

Discussion:

Certains graphes n'ont pas de noyau. D'autres graphes ont plusieurs noyaux. Le but principal de ce problème est de montrer qu'un graphe sans circuit a exactement un noyau et d'utiliser cette notion pour étudier des jeux.

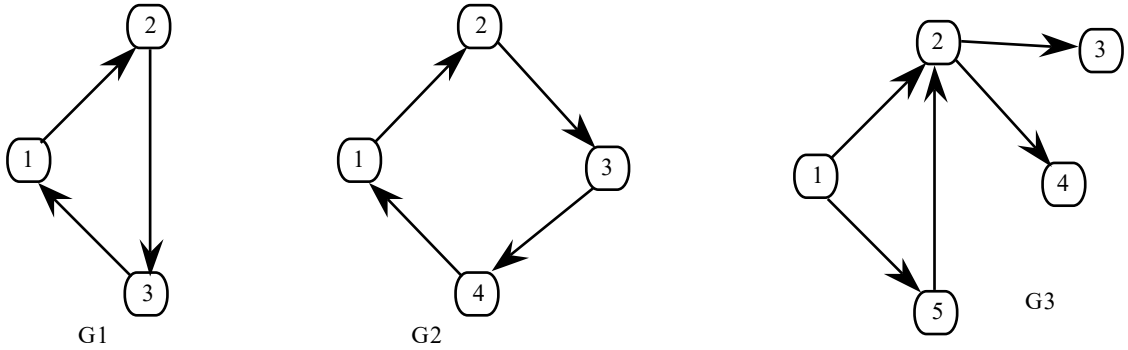
Question 0 : propriété caractéristique

Montrer que K est un noyau si et seulement si :

- tout sommet dans K a ses successeurs en dehors de K,
- tout sommet en dehors de K a au moins un de ses successeurs dans K.

Question 1: pour se familiariser avec la notion de noyau.

Déterminer tous les noyaux (s'il en existe) des graphes G_1, G_2 et G_3.

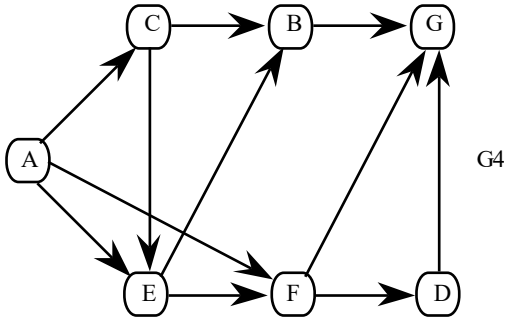


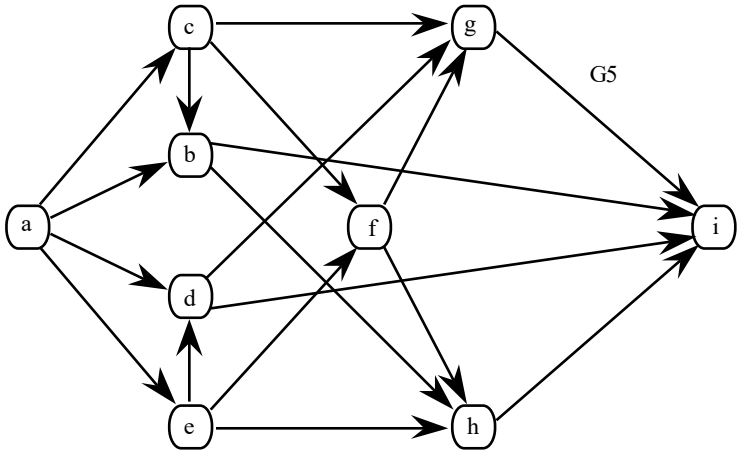
Question 2: étude théorique des graphes sans circuit.

On se propose de montrer qu'un graphe sans circuit a exactement un noyau. Pour cela, on étudie l'algorithme NOYAU.

```
NOYAU
DEBUT
   Lire G=(X,U) un graphe orienté sans circuit;
   Initialement aucun sommet n'est coloré;
   Numéroter les sommets de G selon une numérotation inverse: si (i,j) ∈ U, alors i est strictement plus
   grand que j (en particulier, le sommet 1 est un sommet sans successeur);
   Colorer en rouge le sommet 1;
   Pour I:=2,N faire
   DEBUT
   Si un des successeurs de I est rouge, colorer I en vert
   Sinon colorer I en rouge
   FIN
   Le noyau est l'ensemble des sommets rouges
FIN
```

A) Faire tourner l'algorithme sur les graphes G_4 et G_5 ci-dessous.
On rapportera les couleurs finales.



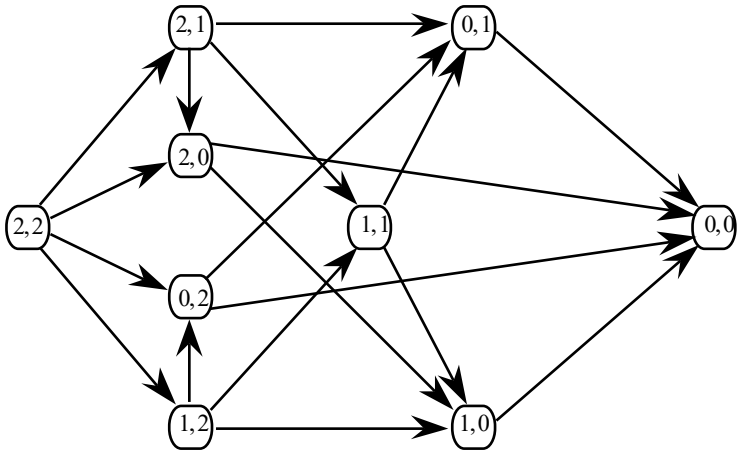


B) Montrer qu'en cours d'algorithme :
-tout sommet vert a au moins un successeur rouge ;
-tout sommet rouge n'a pas de successeur rouge.
En déduire que les sommets rouges forment un noyau de G.
C) Montrer que l'algorithme se termine et qu'alors tous les sommets sont colorés.
D) Montrer l'unicité du noyau.
E) Donner les tableaux principaux qui permettent de coder le plus efficacement cette procédure. On justifiera succinctement et on rapportera la complexité résultante de l'algorithme.

Question 3: application aux jeux

Dans le jeu de NIM, on a deux piles de jetons, chacun des joueurs joue chacun son tour et prend n'importe quel nombre de jetons de l'une des deux piles. **Le joueur qui prend le dernier jeton gagne, l'autre perd.** Ainsi la position (0,0) pour le joueur atteignant cette position est gagnante. Le jeu complet est décrit par un graphe orienté dont les sommets correspondent à l'état du jeu et les arcs aux "coups" des joueurs. Ici chaque état du jeu est décrit par une paire d'entiers (x,y) qui indique le nombre de jetons dans la première pile et la deuxième pile, respectivement.

Par exemple, si l'état initial de la pile est (2,2), le graphe du jeu est le suivant:



La question importante pour ce jeu est: quand un joueur est-il certain de gagner et comment doit-il jouer?

Nous allons d'abord tenter de répondre à cette question pour des piles de taille initiale 2, puis on généralisera.

Une position sera dite gagnante si le joueur venant d'atteindre cette position gagne quelle que soit la façon de jouer de son adversaire sous réserve que lui-même joue bien dans la suite du jeu (c'est donc à son adversaire de jouer).

Une position sera dite perdante si le joueur ayant atteint cette position va perdre si son adversaire joue bien.

A) Quelles sont les positions gagnantes pour le cas particulier? Quelles sont les positions perdantes? Si B commence, qui va gagner?

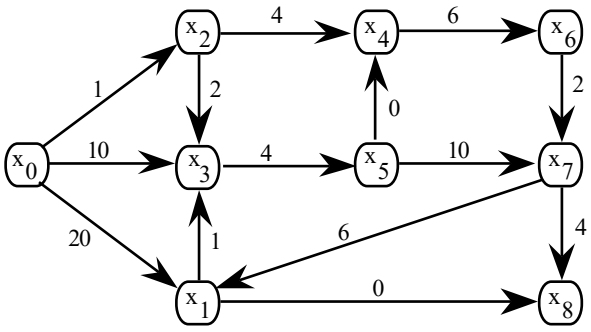
B) Pour un jeu de NIM en position de départ (k_1, k_2) et si B commence à jouer, à quelle condition sur k_1 et k_2, A va-t-il gagner ? Formuler en français une stratégie gagnante. Que pouvez-vous dire si on généralise à trois piles ?

C) Le jeu de NIM est un jeu à deux joueurs, sans hasard, avec information parfaite (chacun des joueurs connaît avant de jouer l'état du jeu), à espace d'états fini et dont le graphe d'états associé est sans circuit. Montrer, de façon générale, que si le graphe d'états d'un jeu à deux joueurs est sans circuit, fini, et a un seul état final gagnant pour celui qui l'atteint, et si les deux joueurs jouent parfaitement, on peut prédire à l'avance qui gagnera à l'aide de la notion de noyau. Justifier complètement.

D) Où se situe en général la difficulté pour un tel jeu ?

E) Pourquoi la méthode précédente ne s'applique pas même théoriquement au jeu d'échecs ou au jeu de dames ? Justifier votre réponse. Qu'y-a-t-il de différent ? Quelle idée cela vous donne pour ces jeux ?

Exercice



On cherche les valeurs des chemins minimaux issus de x_0.

Les algorithmes de DIJKSTRA et BELLMAN sont-ils applicables? Justifier.

Appliquer le ou les algorithmes utilisables.

On rapportera éventuellement les valeurs successives des λ_i (si DIJKSTRA est utilisable) et la numérotation si elle existe, ainsi qu'une arborescence de chemins minimaux issus de x_0. Y-a-t-il unicité des chemins minimaux? Justifier.

PROBLEME : ALGORITHME DE DIJKSTRA MODIFIE

On considère un graphe valué G=(X,U,v) où la valuation v est entière de signe quelconque et où 1 est racine de G. Nous allons étudier l'algorithme suivant:

Algorithme de DIJKSTRA modifié

Début

A) Application de l'algorithme de Dijkstra;

Debut

Poser S:={1}; λ_1 :=0; λ_i:=v(1,i) et père(i) = 1 si (1,i) $\in$ U et λ_i:= $\propto$ sinon;

Tant que S $\neq$ X faire

Début

Choisir i $\in$ X-S tel que λ_i soit minimal;

Poser S:=S U {i};

Pour j $\in$ (X-S) $\cap$ U^+(i) faire λ_j:=Min(λ_j ,λ_i+v(i,j)) et père(j) = i;

Fin; *{Attention : lisez bien cette partie de l'algorithme, j$\in$X-S}*

Fin;

B) Détermination de l'arborescence de racine 1 associée :

On rappelle que cette arborescence (définie par la fonction père()) est obtenue en retenant, pour chaque j, l'arc (i,j) ayant permis de fixer λ_j. Les arcs de cette arborescence A seront dits marqués.

C) Test des d_j :

Début

Chercher un arc (i,j) non marqué tel que λ_j-λ_i>v(i,j);

Si un tel arc n'existe pas alors FIN1;

Si un tel arc rajouté à l'arborescence crée un circuit alors FIN2;

Si un tel arc rajouté à l'arborescence crée un cycle qui n'est pas un circuit, aller en D) ;

Fin;

D) Modification de l'arborescence :

Début

Enlever de A l'arc marqué d'extrémité terminale j et ajouter à A l'arc(i,j) et poser père(j)=i;

Pour j et tous ses descendants dans A diminuer les λ de la quantité $\delta=\lambda_j-\lambda_i-v(i,j)$;

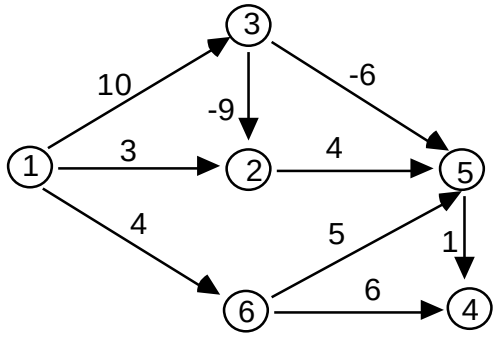
Aller en C);

Fin;

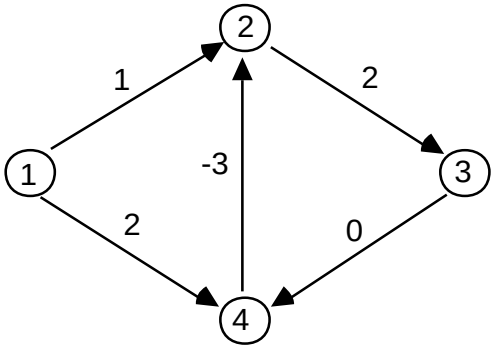
Fin.

QUESTIONS

1) Appliquer l'algorithme au graphe G_1 ci-dessous.



2) Appliquer l'algorithme au graphe G_2 ci-dessous.



3) On rappelle qu'une arborescence de racine 1 peut être définie par une fonction père de X-{1} -> X, telle que 1 soit ascendant de tous les sommets. On admettra qu'à la fin de A) : tous les sommets ont un potentiel fini, et que l'ensemble des arcs ayant permis de fixer le potentiel, donc satisfaisant $\lambda_j-\lambda_i= v(i,j)$, définissent une arborescence de racine 1. Montrer que l'arborescence A a la propriété suivante : " λ_i *est la valeur du chemin de l'arborescence A allant de 1 à i* ".

4) Montrer qu'à chaque fois qu'on passe par D), on redéfinit une nouvelle arborescence de racine 1 ayant les mêmes propriétés.

5) Expliciter FIN2.

6) Montrer qu'en l'absence de circuit absorbant, l'algorithme se termine en FIN1 après un nombre fini d'étapes et qu'alors λ_i est la valeur minimale d'un chemin allant de 1 à i. En déduire sa validité. Est-il polynomial ? Et s'il y avait des circuits absorbants ?

Exercice 1 : ORDONNANCEMENT

Un projet comporte sept tâches a,b,c,d,e,f,g. Pour chaque tâche, le tableau ci-dessous rapporte sa durée et les tâches préalables.

1) Dessiner le graphe potentiel-tâches et calculer les dates au plus tôt, les dates au plus tard et le chemin critique.

2) Dessiner un graphe PERT simplifié avec un minimum d'arcs fictifs.

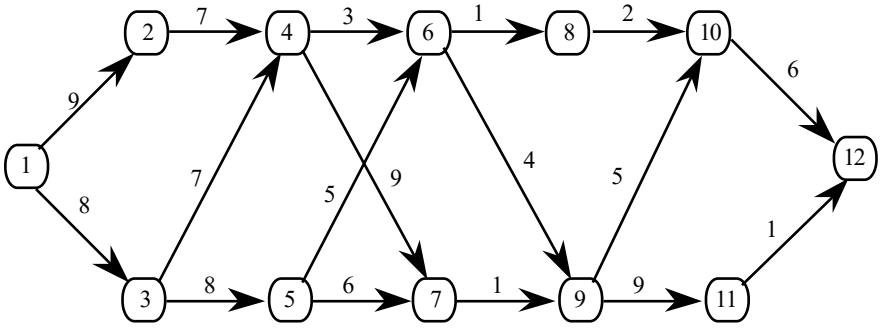
tâches	durées	tâches préalables
a	4	
b	3	
c	6	a et b
d	2	b
e	8	
f	7	c, d et e
g	1	c

Exercice 2 : L'itinéraire de Michel STROGOFF (d'après ROSEAUX)

Partant de MOSCOU, Michel STROGOFF, courrier du tsar, devait rejoindre IRKOUTSK. Avant de partir, il avait consulté une voyante qui lui avait dit entre autres choses:

"après KAZAN méfiez-vous du ciel, à OMSK attention aux tartares, dans TOMSK attention aux yeux, après TOMSK méfiez-vous de l'eau et, surtout prenez garde partout à un grand brun avec des bottes noires".

STROGOFF avait alors reporté sur une carte pour chaque liaison entre deux villes ses "chances" de réussite : ces chances étaient exprimées par un nombre compris entre 1 et 10 (mesurant le nombre de chances sur 10 de succès). Ignorant le calcul des probabilités, il avait alors choisi son itinéraire en maximisant la somme globale des chances.



Les numéros des villes sont les suivants: MOSCOU(1), KAZAN(2), PENZA(3), PERM(4), OUFA(5), TOBOLSK(6), NOVO-SAIMSK(7), TARA(8), OMSK(9), TOMSK(10), SEMIPALATINSK(11), IRKOUTSK(12).

1. Déterminer l'itinéraire de Michel STROGOFF.

2. Quelle était alors sous l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires "chances de succès", la probabilité pour que STROGOFF réussisse?

3. Quel aurait été son itinéraire s'il avait connu les principes du calcul des probabilités?

Exercice 3 : UN PROBLEME D'INVESTISSEMENT

1)Un exemple.

On dispose de 6 millions à investir dans 3 régions. Le tableau suivant donne les bénéfices résultant des sommes investies.

Déterminer la politique d'investissement optimale entre les trois régions à l'aide d'une méthode de "programmation dynamique". L'idée est d'associer à la donnée un graphe en niveaux. Le niveau 0 ne contient que le sommet (0,0), (car aucune somme n'a encore été investie). Le niveau 1 contient les sommets (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), qui correspondent aux sommes investies dans la région 1. Le niveau i contient les sommets (i,0), (i,1), (i,2), (i,3), (i,4), (i,5), (i,6), qui correspondent aux sommes investies dans les régions 1..i, (i = 2, 3). On introduit les arcs entre les niveaux i et i+1, valués par les sommes investies dans la région i+1. Le dernier sommet est (3,6). Il s'agit de chercher un chemin de valeur maximale dans ce graphe.

	Région I	Région II	Région III
1 million	0,2	0,1	0,4
2 millions	0,5	0,2	0,5
3 millions	0,9	0,8	0,6
4 millions	1	1	0,7

2)Le cas général.

Plus généralement on dispose de *B* millions à investir dans *n* régions. On pose $f_i(y)$ le bénéfice optimal pour un investissement cumulé d'une somme y dans les régions 1, 2, .., i. On a $f_0(0)= 0$. Donner une formule de récurrence reliant f_i à f_{i-1} pour i de 1 à n.

Quelle est en fonction de *n* et de *B* la complexité de la méthode de programmation dynamique ?

Quelle est la complexité d'énumération de toutes les solutions possibles ?

LE PROBLEME DU SAC A DOS (d'après ROSEAUX)

Un randonneur, partant pour une longue excursion, détermine avec soin le contenu de son sac à dos. Compte tenu des équipements indispensables déjà chargés, le poids total de nourriture emportée ne devra pas excéder 16 kilogrammes. Il dispose, en quantités limitées, de trois types d'aliments, de valeurs nutritives variables, dont les poids unitaires sont différents. Les aliments sont conditionnés par unités non fractionnables.

Aliments	I	II	III
poids unitaires en kilo	7	5	2
quantités disponibles	4	3	4
valeurs nutritives	15	10	4

Le randonneur choisit la quantité de chaque aliment à emporter, de façon à maximiser la valeur nutritive totale, tout en tenant compte de la limite de 16 Kg qu'il s'est fixée.

Il va utiliser la "programmation dynamique" pour résoudre ce problème dit du "Knapsack" ou sac à dos. D'une manière générale, soit :

n, le nombre d'aliments différents;

p_i le poids unitaire de l'aliment i ($i \in [1,n]$);

q_i le nombre d'unités disponibles de l'aliment i ($i \in [1,n]$);

c_i la valeur nutritive de l'aliment i ($i \in [1,n]$);

x_i la quantité de l'aliment i emportée en nombre d'unités ($i \in [1,n]$) (ce sont les inconnues);

et P le poids maximal de nourriture qu'il peut emporter.

1) Donner une formalisation du problème en tant que programme linéaire en nombre entiers.

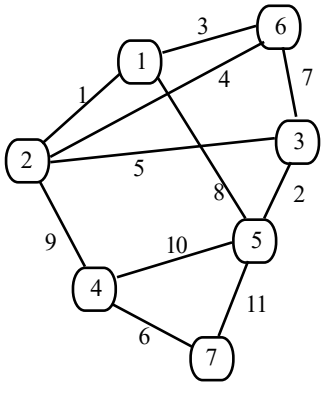
2) Tracer le graphe des décisions associé au problème, construit de façon analogue à l'exercice de TD précédent sur le problème de l'investissement.

3) Résoudre numériquement.

4) En notant $f_i(Q)$ la valeur nutritive maximale du sac à dos chargé optimalement avec uniquement les i premiers produits, et de poids total Q (Q inférieur ou égal à P). Donner les formules d'optimisation séquentielle, c'est-à-dire des formules reliant la fonction f_i à la fonction f_{i-1}.

5) Evaluer la complexité de la méthode en fonction de n et de P et expliquer son intérêt en la comparant à une méthode énumérative.

PROBLEME: ALGORITHME DE KRUSKAL:



L'algorithme de KRUSKAL permet de déterminer un arbre couvrant de coût minimal d'un graphe

valué **connexe** G=(X,U, V) à N sommets et M arêtes. **Il consiste à partir d'un graphe réduit à ses sommets isolés, puis à ajouter pas à pas les arêtes en coûts croissants sous réserve que l'arête ajoutée ne crée pas de cycle.**

On supposera que les coûts sont tous distincts.

KRUSKAL

{par convention l'arête e_L s'écrira e_L =[I,J] avec I strictement plus petit que J}

```
Début
    Indicer les arêtes en ordre de coûts croissants: v(e1) ≤ v(e2) ≤ ... ≤v(eM)
    Pour H:=1..N faire  CONNEXE(H):=H;
    K:=1; {le graphe partiel est initialement vide}
    Pour L:=1..M faire
      Début
          soit eL=[I,J];
          Si  (CONNEXE(I) différent de CONNEXE(J)) alors
          Début
             AUXI:=CONNEXE(J); fK:=[I,J]; { fK  est mis dans le graphe partiel}; K:=K+1;
             Pour H:=1..N faire
             Si (CONNEXE(H)=AUXI) alors CONNEXE(H):=CONNEXE(I)
          Fin
      Fin
Fin
```

Question 1: Faire tourner l'algorithme sur le graphe ci-dessus: on dessinera les graphes partiels successifs et les onze valeurs successives du tableau CONNEXE obtenu avant chaque itération de la boucle externe.

Question 2: Evaluer en fonction de N et M la complexité de l'algorithme. On pourra distinguer deux types d'itérations dans la grande boucle.

Question 3 (cette question est indépendante de l'algorithme)

On rappelle que l'on est dans le cas où tous les coûts sont distincts.

On va démontrer le théorème suivant :

« L'arbre de cout minimal d'un graph connexe existe et il est formé des arêtes de cout minimal des cocycles de G. »

a) Soit A un arbre couvrant de coût minimal et ω(Y) un cocycle de G. Montrer par l'absurde que A rencontre ω(Y) en son arête de coût minimal. Un arbre de coût minimal existe puisque le graphe est connexe.

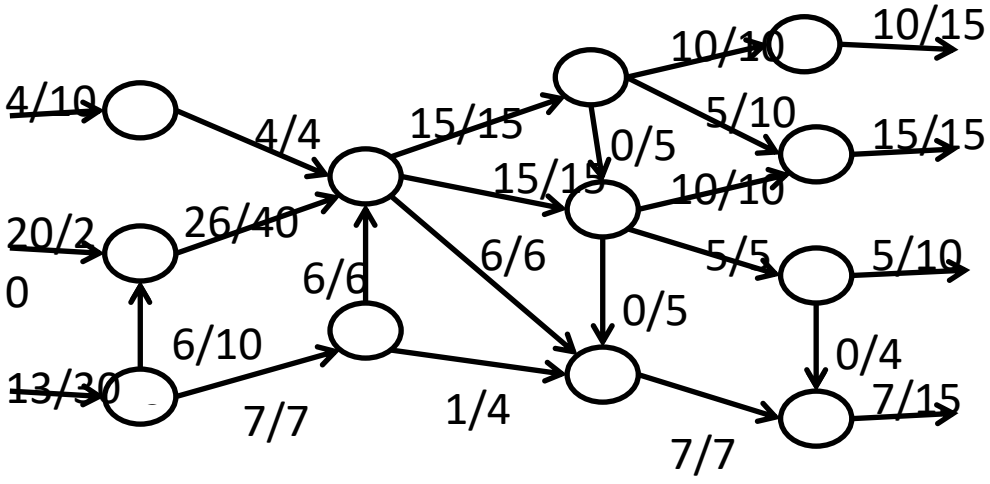
b) Réciproque : Soit A un arbre couvrant de coût minimal et [i,j] une arête de A, montrer que [i,j] est l'arête de coût minimal d'un cocycle de G que l'on identifiera.

c) En déduire une méthode pour construire un arbre de coût minimal.

Question 4: Montrer que l'algorithme détermine l'arbre couvrant de coût minimal. On montrera qu'à chaque itération l'algorithme choisit l'arête minimale d'un cocycle de G. Que ferait l'algorithme si le graphe n'était pas connexe ?

PROBLEME DE CIRCULATION URBAINE :

Le réseau routier que doit entretenir la ville de Fulkerson City est schématisé ci-dessous (la notation f_{ij}/C_{ij} donné un flot initial (f_{ij}) et le débit maximal en voitures par heure (C_{ij})).



1) Soit N le nombre maximum de voitures pouvant circuler par heure à travers ce réseau.

1.1) Calculer N. On partira du flot donné ci-dessus. Est-il complet ? Justifier votre réponse. Puis on appliquera l'algorithme de Ford Fulkerson.

1.2) Caractériser les voies que l'on peut créer de façon à augmenter N. De combien peut-on augmenter N ?

2) Les édiles locaux souhaitent améliorer la circulation en augmentant le nombre N grâce à la création de nouvelles voies. Dans la zone urbaine, seuls sont matériellement possibles la création d'une voie HK et l'élargissement de la rue EG jusqu'alors réservée aux piétons. Le choix devra donc se faire entre :

a) créer HK;

b) élargir EG;

c) créer HK et élargir EG.

2.1) Si la politique a) est choisie, quelle capacité maximum doit-on prévoir pour la voie HK ? Dans ce cas, de combien augmente N ?

2.2) Si la politique b) est choisie, quelle autre voie est-on amené à créer si l'on veut augmenter N ?

2.3) Evaluer N dans le cas c).

2) PROBLEME : SECOND PLUS COURT:

Le but de ce problème est de déterminer un second plus court chemin entre les sommets 0 et n-1 d'un graphe G=(X,U,v) positivement valué et sans circuit. Soit $\gamma(0,n-1)$ un plus court chemin de 0 à n-1. Un second plus court chemin de 0 à n-1 est un chemin de valeur minimale parmi l'ensemble des chemins de 0 à n-1 qui diffèrent de $\gamma(0,n-1)$ par au moins un arc. Un tel chemin existe s'il y a , au moins , deux chemins de 0 à n-1 dans G , ce que nous supposerons dans la suite.

On se propose de montrer que **second**, fourni par l'algorithme suivant, définit un second plus court chemin de 0 à n-1.

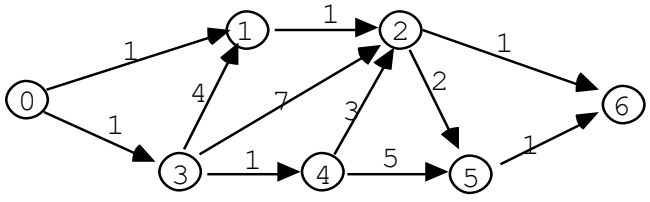
Algorithme second plus court :
début

1) Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour obtenir l'arborescence A des plus courts chemins allant de 0 à i et les potentiels $\lambda(i)$ de 0 à i pour tous les sommets i de G.
   (N.B.: On notera $\gamma(r,s)$ le chemin , s'il existe , de r à s dans A)
2) Déterminer $\gamma(0,n-1)=(y_0=0,y_1,\ldots,y_p=n-1)$.
3) Poser valeur:=$+\infty$;
   Pour j:=1 jusqu'a p faire
      pour tout $k \in (U^-(y_j) - \{y_{j-1}\})$ faire
      début
         $\alpha := \lambda(k) + v(k,y_j) + (\lambda(n-1) - \lambda(y_j))$;
         si α<valeur alors
         début
            valeur := α ; $pivot_1$:= k ; $pivot_2$:= y_j ;
         fin;
      fin;
4) **Second** := $\gamma(0,pivot_1) + (pivot_1,pivot_2) + \gamma(pivot_2,n-1)$.

fin.

QUESTIONS :

1) Appliquer l'algorithme au graphe G suivant :



N.B. : On rapportera successivement:

- le tableau de Dijkstra présenté en cours;
- l'arborescence A;
- le chemin $\gamma(0,n-1)$;
- les différentes valeurs de α;
- **second.**

Vérifier que **second** est bien un second plus court chemin dans G.

2) Etude de la complexité en fonction de n et m:

On suppose que le graphe est codé par la file des successeurs et des prédécesseurs.

2.1) Quelles sont les complexités des phases 1, 2, 3 et 4 de l'algorithme ?

En déduire la complexité totale.

2.2) Quelle amélioration peut-on proposer pour diminuer cette complexité ?

3) Preuve de l'algorithme :

On note **premier** = $\gamma(0,n-1) = (y_0=0,y_1,\ldots,y_p=n-1)$ le plus court chemin obtenu dans la phase 1) de l'algorithme et **deuxième** = $(z_0=0,z_1,\ldots,z_q=n-1)$ un second plus court chemin de 0 à n-1.

3.1) Montrer qu'il existe un entier r tel que $y_p=z_q$, $y_{p-1}=z_{q-1}$,..., $y_{p-r}=z_{q-r}$ et $y_{p-r-1}\neq z_{q-r-1}$.

3.2) Quelle est la propriété remarquable du chemin $(z_0=0,z_1,\ldots,z_{q-r-1})$?

3.3) En déduire la validité de l'algorithme.

PROBLEME D'AFFECTATION :

On veut affecter six programmes a,b,c,d,e,f à six programmeurs A,B,C,D,E,F en minimisant la somme des temps de travail et de façon à ce qu'un programmeur fasse exactement un programme. Le tableau ci-dessous rapporte les différents temps de travail. Pour résoudre ce problème d'affectation, on va appliquer l'algorithme hongrois qui permet plus généralement d'affecter n individus à n travaux en minimisant la somme des coûts d'affectation.

	a	b	c	d	e	f
A	14	6	18	16	63	15
B	41	78	44	73	70	25
C	44	81	36	80	80	78
D	46	74	5	25	83	3
E	72	32	55	51	3	81
F	69	76	12	99	83	30

1) Montrer qu'on ne change pas la solution du problème en soustrayant ou ajoutant une valeur numérique δ à tous les éléments d'une rangée (ligne ou colonne). Seule la valeur de la solution est modifiée.

Le faire sur l'exemple en soustrayant le plus petit élément de chaque rangée en commençant par les lignes et en terminant par les colonnes, (l'intérêt est de faire apparaître des zéros).

2) On associe au nouveau tableau un graphe biparti reliant les programmeurs aux programmes quand le coût réduit (obtenu après soustraction des minima en lignes et en colonnes) vaut 0. Les arcs du graphe biparti sont dits admissibles.

On introduit aussi un réseau de transport en reliant la source s aux programmeurs par des arcs de capacité 1, le puits p aux programmes par des arcs de capacité 1. Les arcs admissibles sont de capacité infinie.

a) Construire le réseau de transport.

b) Calculer un flot maximal sur ce réseau et en déduire un couplage maximal de coût nul.

c) Le marquage de Ford-Fulkerson à l'optimum permet de marquer les lignes X* de X et les colonnes Y* de Y.

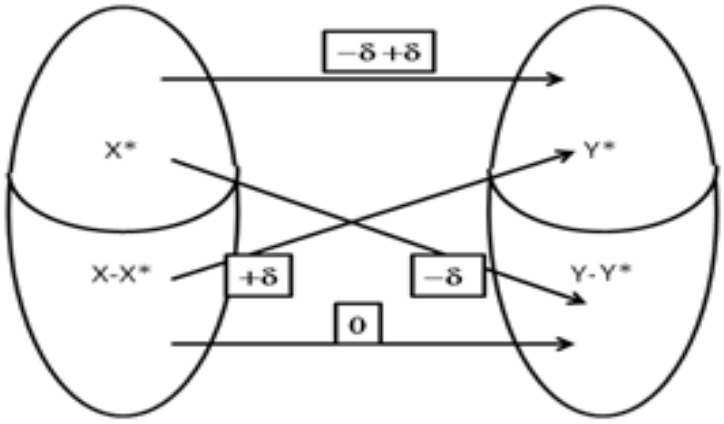
Vérifier sur l'exemple qu'il n'y a pas d'arc admissible entre X* et Y-Y*.

Vérifier sur l'exemple que les arcs entre X-X* et Y* ont un flux nul.

Justifier les deux propriétés.

d) Soit δ le plus petit coût réduit d'affectation d'un programmeur de X* à un programme de Y-Y*. Calculer δ. Ajouter δ aux colonnes de Y* et soustraire δ aux lignes de X*. Pourquoi ces opérations sont-elles licites ?

e) Montrer que la procédure pratique suivante permet de calculer la nouvelle matrice.



Procédure pratique.

-rayer toute ligne non marquée ;

-rayer toute colonne marquée ;

-soit δ le plus petit élément non rayé ;

-retrancher δ aux éléments non rayés ;

-ajouter δ aux éléments rayés deux fois.

f) On obtient une nouvelle matrice de coûts. Vérifier que les arcs de flux non nuls restent admissibles. Quelle est la propriété des arcs qui étaient admissibles et qui ne le sont plus ?

Quelle est la propriété des arcs devenus admissibles? Quelle est la capacité de l'ancienne coupe minimale ? Montrer que le nouveau marquage contient le précédent ?

g) Calculer le nouveau flot maximal ?

3) Validité de la méthode Hongroise.

On itère autant de fois que nécessaire la procédure pratique et le calcul du flot :

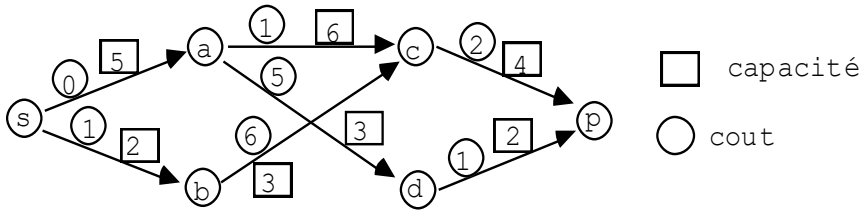
-le faire;

-à quelle condition s'arrête-t-on ?

-en déduire l'optimalité de la méthode.

EXERCICE : Algorithme de ROY:

Appliquer l'algorithme de Roy pour déterminer un flot maximal de coût minimal dans le graphe suivant.

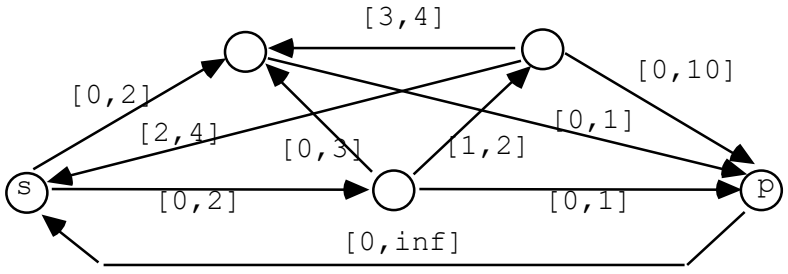


On dessinera les graphes d'écart intermédiaires et on précisera les chaînes améliorantes successives utilisées. Calculer le coût du flot obtenu.

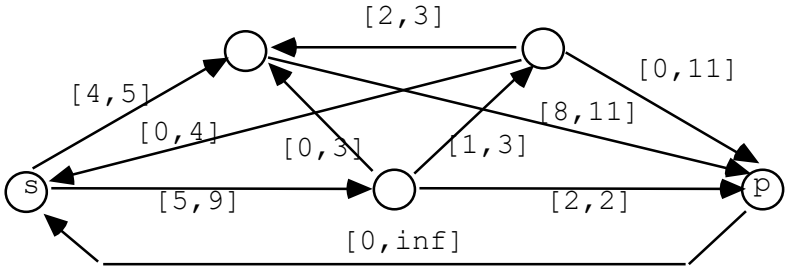
PROBLEMES DE FLOTS

Exercice 1 : flot canalisé

Construire un flot de valeur maximale sur l'arc ps, lorsqu'il existe, dans les réseaux suivants (les capacités min et max sont indiquées par $[b_{ij}, c_{ij}]$).



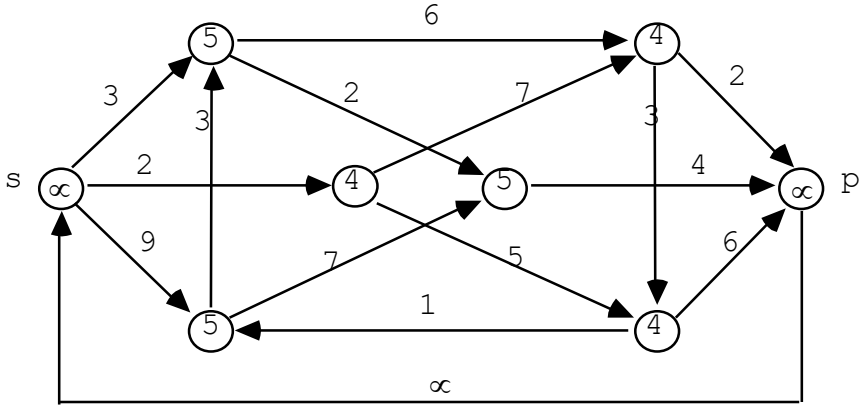
Réseau n°1



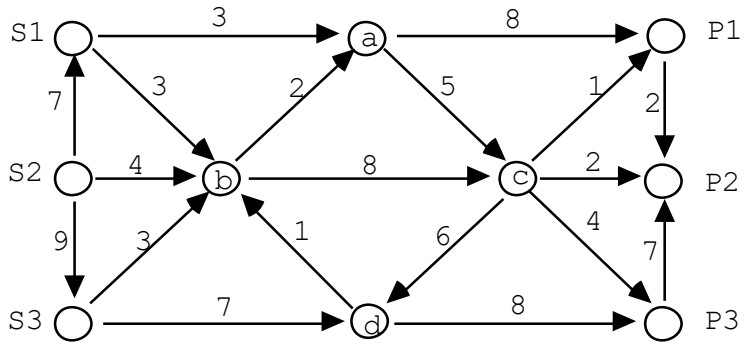
Réseau n°2

Exercice 2 : flot maximal

Considérons le réseau suivant dont , non seulement les arcs sont munis de capacité , mais aussi les sommets. Trouver un flot de valeur maximale sur ce réseau en expliquant votre méthode.



Exercice 3 : satisfaction de demandes



Dans ce réseau, les sommets S1, S2, S3 sont des dépôts qui disposent respectivement des quantités 5, 10, 5 d'un même produit. Les sommets P1, P2, P3 sont des clients dont les demandes sont respectivement : 5, 10, 5. Ces demandes peuvent-elles toutes être satisfaites à travers ce réseau ?

PROGRAMMES DE TRANSPORT.

On dispose de a_1, a_2,...,a_n unités dans des dépôts 1,2,...,n. On veut transporter ces unités vers des destinations 1,2,...,m où se manifestent des demandes b_1,b_2,...,b_m, avec : $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} bj$

La méthode appliquée au problème d'affectation se généralise. On fait apparaître des zéros en lignes et en colonnes. On introduit la notion d'arcs admissibles et on trace un réseau de transport sur lequel on recherche un flot maximum. On calcule ensuite un δ pour modifier ce réseau de façon à finalement obtenir, après un certain nombre d'itérations de la procédure pratique, un flot satisfaisant toutes les demandes et qui est de coût minimal.

On demande d'appliquer cette méthode au problème suivant. On a trois dépôts où sont disponibles respectivement 3, 4, 7 hélicoptères et on doit répartir ces hélicoptères sur quatre sites où se manifestent respectivement des demandes de 1, 3, 5, 5 hélicoptères. Les coûts unitaires de transport sont donnés dans le tableau suivant. Déterminer la solution optimale.

2	4	3	2	4
6	2	6	4	3
5	6	7	7	7
1	3	5	5	