RO03 - Médian Printemps 2015

21 Avril 2015

Exercice 1. Graphe (3 points)

On considère le graphe ci-dessous. Déterminer :

1. Une coloration minimale.
2. Un cycle hamiltonien.
3. Tous les couplages de cardinal maximal.

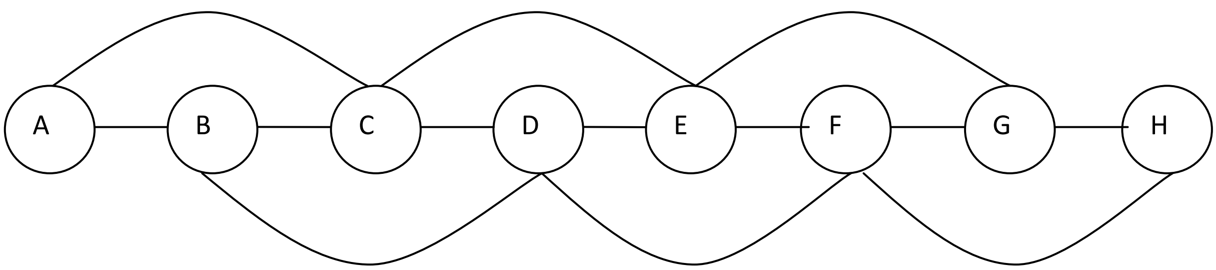

Figure 1. Graphe.

Solution :

1. 3 couleurs ;
2. A B D F H G E C A ;
3. {AB, CD, EF, GH} ; {AC, EG, HF, DB}, {AB, CE, DF, GH},

Exercice 2. Méthode arborescente (3 points)

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Max } 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\
&(2) \quad 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 \leq 4 \\
&(3) \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 2 \\
&(4) \quad 3x_1 - x_2 - x_4 \leq 2
\end{aligned}$$

avec x_i booléen ($i = 1..4$).

On déterminera toutes les solutions optimales à l'aide d'une arborescence. On séparera d'abord sur x_1, puis sur x_2, et si besoin continuez en séparant sur x_3 et x_4 (ordre imposé). Associer une évaluation à chaque sommet pour limiter le branchement.

Solution :

Notons avec V l'évaluation associée à un nœud

S0 (l'ensemble de toutes les solutions)

S1: X1=1 (V<=7)   S2: x1=0 : (V<=4)

S3: x2=1=>x3=0 et X4=0=>V=5 ;   s4 : x2=0=>x3=1 et x4=1 (V=4) ;

Problème : Couplage Stable (14 points)

On a *n* hommes et *n* femmes, et on veut construire *n* mariages de telle sorte que les mariages soient stables deux à deux. Plus précisément, un ensemble de *n* mariages (appelé aussi couplage), est dit « stable » s'il n'y a pas d'homme *h* et de femme *f*, tel que ***h* préfère *f* à sa propre partenaire et *f* préfère *h* à son propre partenaire**. En effet, s'il y avait par exemple deux couples *(x,b)* et *(y,a),* tels que *x* préfère *a* à *b* et *a* préfère *x* à *y*, alors *x* et *a* se rejoindraient…

Le but du problème est d'étudier un algorithme qui a pour objet de construire un couplage stable. On va vous demander de faire tourner cet algorithme sur un exemple, d'étudier sa complexité et de prouver sa validité.

Dans la suite on supposera idéalement que l'on a autant d'hommes que de femmes (c'est-a-dire *n* hommes et *n* femmes), et que chaque personne fait un classement total des personnes de l'autre sexe selon son ordre (décroissant) de préférence.

Algorithme couplage stable

<u>Entrée</u>

Un ensemble de *n* hommes et un ensemble de *n* femmes.
2*n* listes de préférences des femmes et des hommes.

<u>Sortie :</u>

Un couplage stable

Itération :

(a) Chaque homme fait une proposition de mariage à la première femme de sa liste qui ne l'a pas rejeté.
(b) Si chaque femme a exactement une proposition, écrire le couplage. Il est stable. **FIN**.

(c) Sinon, chaque femme ayant plusieurs propositions les rejette toutes à l'exception de celle qui est la meilleure par rapport à sa propre liste de préférence, à laquelle elle répond « peut-être »

(d) Itérer en (a).

Question 1. Expérimentation de l'algorithme (4 points).

A- Appliquer l'algorithme pour les 8 listes de préférences suivantes :

Ensemble des hommes (x, y, z, w)

x : a > b > c > d

y : a > c > b > d

z : c > d > a > b

w : c > b > a > d

Ensemble des femmes {a, b, c, d}

a : z > x > y > w

b: y > w > x > z

c : w> x > y > z

d : x > y > z > w

Rapporter les itérations successives en décrivant à chaque itération le couplage partiel proposé et la liste des rejets successifs.

Solution : (xa) (yb) (zd) (wc)

B- Appliquer l'algorithme en échangeant le rôle des hommes et des femmes.

Solution : (az) (by) (cw) (dx)

Expliquer sur cet exemple que les habitudes sociales favorisent les hommes !... ce qu'on peut démontrer en toute généralité !

Clairement la solution obtenue quand on commence par les souhaits des femmes donne une solution favorisant les femmes.

Question 2 : Evaluation de l'algorithme (3 points)

A- Quelle structure de données proposez-vous d'utiliser pour cet algorithme ? On veillera à proposer des structures efficaces.

Réponse : pile ou file donnant les préférences d'un homme ou femme (donc 2N structures) et un tableau « proposition ».

- On pourra calculer et stocker un tableau pour chaque femme qui donne le niveau de préférence pour chaque homme. Si on regarde l'exemple ci-dessus, T_a[z]=1, …, T_a[w]=4 ; et ainsi de suite.

B- Quelle est la complexité résultant d'une itération de l'algorithme, détaillez clairement votre calcul de complexité.

Une itération nécessite

- Pour un homme choisir la femme dans sa liste coute o(1), donc o(n) au total.
- pour une femme il nécessite au pire O(kf * n) ou kf = nombre d'hommes candidates pour la femme. Or, puisqu'il y aura en tout n propositions à chaque itération et un homme ne peut figurer que dans une seule liste (donc il sera examiné une seule fois

avec une complexité o(n)), ca donne globalement une complexité de $O(n^2)$. Si on prenne en compte la structure supplémentaire évoquée au point A, l'examen de la proposition faite à une femme ne coutera que o(kf) ; donc la complexité globale d'une itération reviendrait a O(n).

C- Combien y-a-t-il au maximum d'itérations ? Justifier. En déduire une évaluation de la complexité globale de l'algorithme. Justifier.

Réponse : au pire il y aura n^2 itérations, en effet deux ensembles de propositions sont différentes par au moins une proposition et les propositions faites par un homme ne peuvent suivre que l'ordre décroissant de ses préférences. Puisque il ne peut y a voir que n*n différentes ensembles de propositions cela donne $O(n^2)$ itérations au pire. Donc $O(n^4)$ ou $O(n^3)$ en fonction des structures utilisées.

Question 3. Preuve de l'algorithme (4 points)

A- Montrer que chaque femme ayant dit « peut-être » à un homme a une proposition au moins aussi bonne à l'itération suivante. Notons F_k l'ensemble des femmes à l'itération *k* ayant au moins une proposition. Quelle est la propriété des F_k ?

Fk est non-décroissant. En effet, une femme qui a dit peut-être aura toujours cette même proposition (et éventuellement d'autres), et une femme n'ayant pas reçu auparavant une proposition pourrait en avoir une nouvelle. Donc, Fk est non-décroissant.

B- Montrer qu'un homme ne peut pas être rejeté par toutes les femmes et en déduire que le nombre de propositions reste égale à *n*.

Réponse : un homme ne peut pas être rejeté par toutes les femmes car sinon cela veut dire que toutes les femmes ont reçu une meilleure proposition (et pour chaque femme il y a un homme différent qui fait la proposition), ce qui n'est pas possible car il y a exactement n hommes et n femmes. A chaque itération tout homme qui n'a pas reçu de « peut-être » peut faire une proposition de mariage : donc à chaque itération il y aura exactement n propositions de mariage et a chaque itération il y a aura au moins une proposition différente des celles faites auparavant.

Montrer que l'algorithme se termine.

L'algorithme se termine car comme dit ci-dessus dans chaque itération il y a aura au moins une proposition différente des celles faites auparavant. De plus, il est impossible de refaire les mêmes propositions faites lors d'une itération dans le passé car un homme refusé dans le passé ne reviendra plus jamais faire à nouveau la même proposition. Puisque a chaque itération il a au moins un homme qui fait une proposition avec choix de préférence dégradé, cela va se terminer puisque le nombre de préférences pour chacun est fini, et cela donnera en tout au pire n^2 itérations.

Montrer que l'algorithme construit un couplage stable.

Réponse. A la fin de l'algo, les propositions ayant retenus un peut-être pour chaque homme donne un couplage stable car sinon il y a aurait un homme qui a fait une proposition ayant été rejetée (tandis qu'elle aurait du être acceptée avec peut-être) ce qui n'est pas possible.

Question 4. Amélioration de l'algorithme (2 points)

A- Améliorer l'algorithme en utilisant la piste suivante : à chaque itération on ne modifie le choix que d'un seul homme en faisant pour celui-ci des propositions jusqu'à ce qu'il obtienne un « peut-être » …Expliciter clairement cet algorithme.

Voici la boucle principale modifiée :

Initialisation:

- Chaque homme fait une proposition de mariage à la première femme de sa liste.
- Chaque femme ayant plusieurs propositions les rejette toutes à l'exception de celle qui est la meilleure par rapport à sa propre liste de préférence, à laquelle elle répond « peut-être »

Itération

- Si chaque femme a exactement une proposition, écrire le couplage. Il est stable. **FIN**.

Tant qu'il existe un homme h qui n'a pas reçu de peut-être faire :

- Vérifier si la femme préférée dans la continuation de la liste d'homme dit « peut-être », faire jusque cela soit vrai.

B- Déterminer la complexité de ce nouvel algorithme. Réponse : il y aura au pire n^2 itérations et chaque itération couterait au pire O(n), donc cela donnerait $O(n^3)$. Si on aurait utilisé le tableau supplémentaire de préférences évoquée a la question A, pour chaque homme il y aurait au pire O(n) opérations en tout (pour l'ensemble des itérations), ce qui donnerait $O(n^2)$ au total.

Question subsidiaire (1 point)

Prouver qu'il existe toujours un couplage stable pour toute instance du problème.

Nécessairement il existe un couplage stable car à partir d'un couplage initial on pourrait l'améliorer en « switchant » on obtiendra une meilleure solution et cela jusqu'à ce qu'on n'améliore plus la solution courante. La dernière solution obtenue est nécessairement un couplage stable.