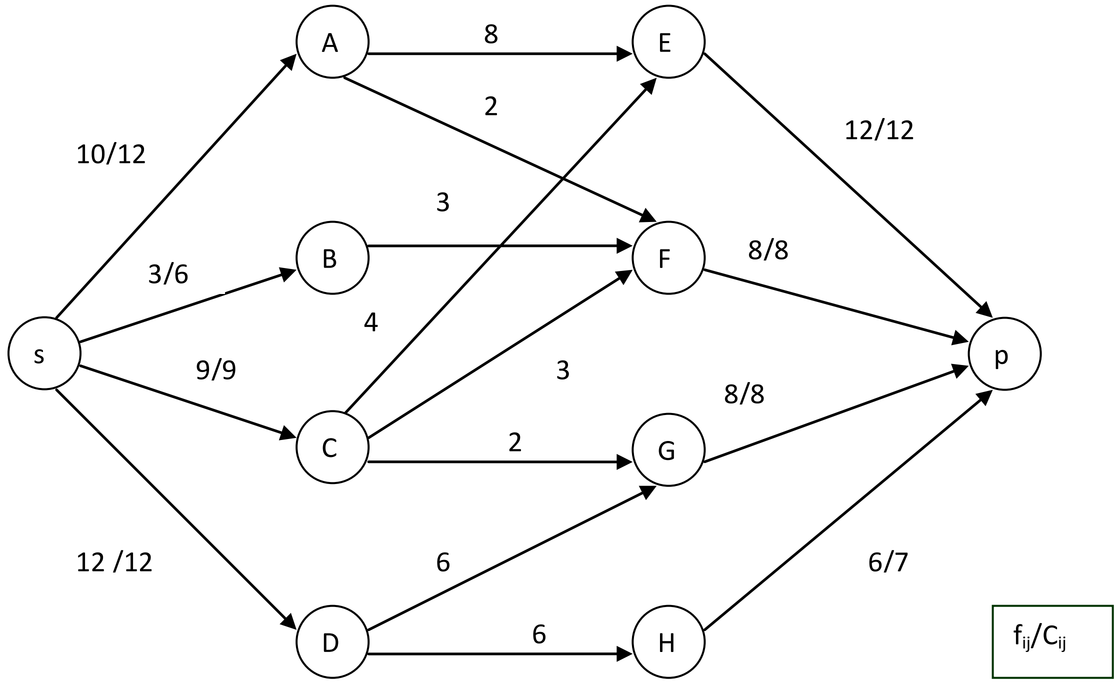
Final RO03, **Printemps 2015**

Exercice 1. Les flots (3 points)



Réseau de transport et flot (les capacités des arcs du milieu sont supposées infinies).

1) Le flot donné ci-dessus est-il complet ? Justifier.
   Le flot est complet. Cela se vérifie en faisant tourner l'algo de flot complet ou en remarquant que tous chemin ayant des arcs non saturés allant de S à p passerait par (H,P) car les autres arcs rentrant dans P sont saturés. Or même cela n'est pas possible car le seul chemin utilisant l'arc (H,P) est saturé en l'arc (S,D).

2) Calculer le flot optimal et donner une coupe minimale.
   Une chaine améliorant serait : [s->A->F<-C->G<_D->H->P] de flot = 1.

Le problème des P-centres

Soit G=(V, E, v) un graphe non orienté, valué par des nombres entiers strictement positifs (v : E-> N*). Dans le problème des P-centres, il s'agit de placer P centres sur le graphe, de façon à minimiser la distance de couverture maximale : pour une distance *d* de couverture choisie, un centre couvre tous les sommets qui sont à une distance d'au plus *d* à lui-même. Dans le problème pratique, chaque centre correspond à un dépôt, chaque nœud (donc sommets) du graphe satisfait la demande en se fournissant au centre (dépôts) le plus proche. On distingue le problème des P-centres absolus, où les centres peuvent se trouver sur une arête, et le problème des P-centres aux nœuds où les centres doivent se trouver en des nœuds.

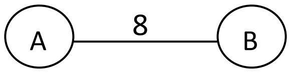


Figure 1. Exemple 1

Ainsi dans le problème du 1-centre absolu, et pour le graphe de deux sommets A, B et d'arête [A, B] valuée par 8, la solution optimale consiste à placer le centre au milieu de l'arête [A, B] ; la distance de couverture est alors de égale à 4. Pour le même graphe, la solution optimale du 1-centre aux nœuds est l'un des deux nœuds A ou B, et la valeur de la solution est 8. Pour l'arbre ci-dessous, la solution optimale du 1-centre absolu, consiste à placer le centre sur l'arête [C, A] de 6 unités et donc de 2 unités de A ; la valeur de solution est 13. La solution optimale du 1-centre aux nœuds est le nœud A pour une valeur de 15.

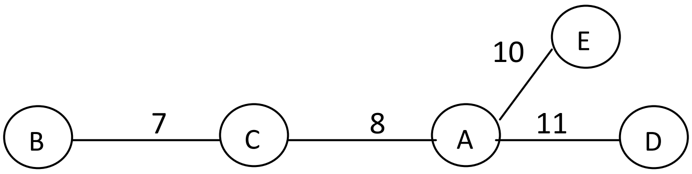


Figure 2. Exemple 2

PARTIE A. Le problème des P-centres absolus

Question 1. (2 points).

Sur les figures ci-dessous, on a rapporté les positions optimales pour P=1, P=2, P=3, P=4 et P=5 (utilisant les positions α, β, γ, δ et ε) pour le graphe ci-joint :

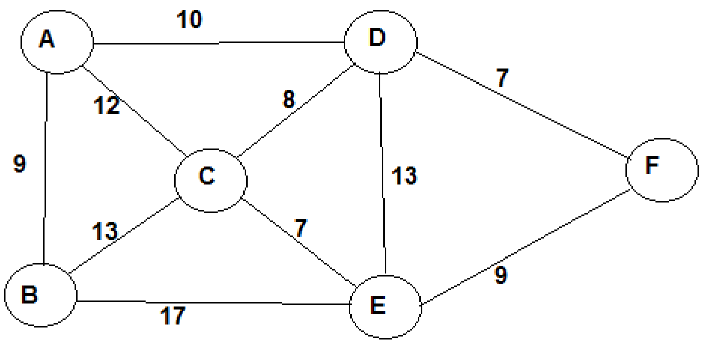


Figure 3. Le graphe

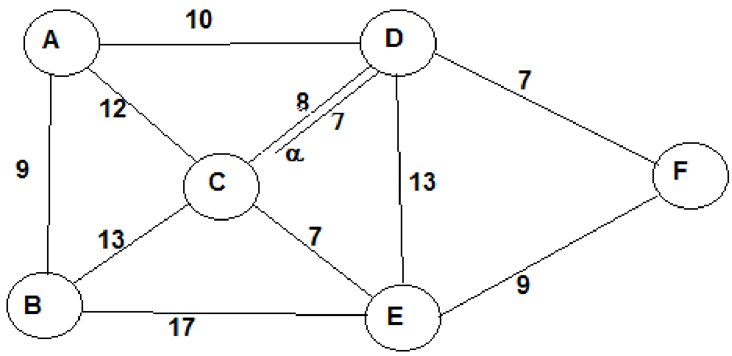


Figure 4. P=1

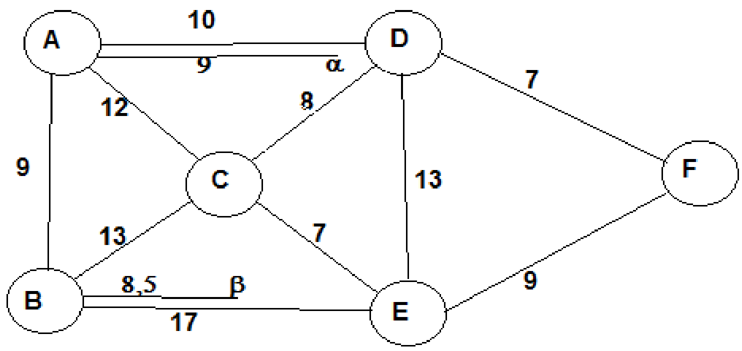


Figure 5. P=2

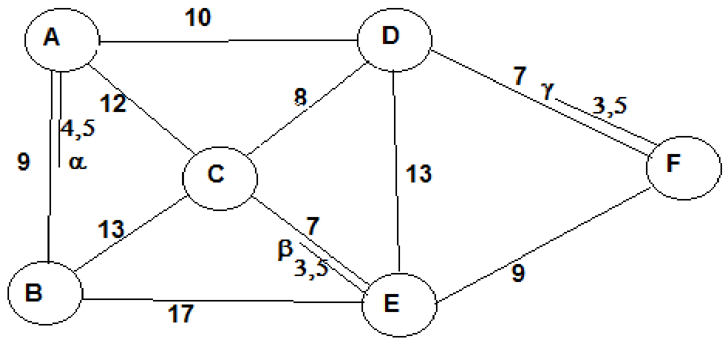


Figure 6. P=3

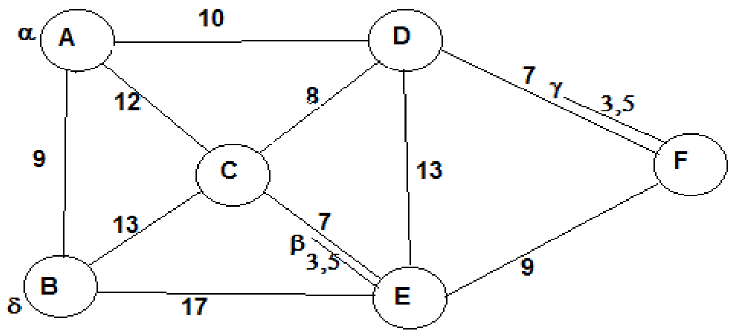


Figure 7. P=4

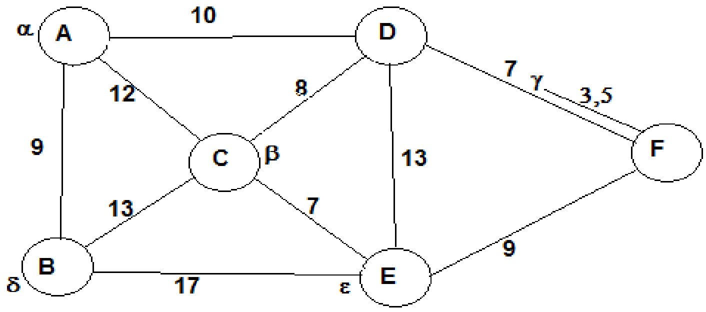


Figure 8. P=5

a) Rapporter pour chaque valeur de P, la valeur optimale de la distance de couverture.
Réponse : Pour P=1 : 14 ; P=2 : 9, P=3 : 4,5 ; P=3 : 3,5, P=4 : 3,5

b) Pour P=2, à quel centre sont rattachés les sommets A, B, C, D, E et F ?
Réponse : B, E sont rattachés à beta et le reste à alpha.

Question 2. Le cas d'un arbre et du 1-centre absolu (7 points)

Pour déterminer 1-centre absolu, on va utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme 1-centre absolu

Etape 1 : choisir arbitrairement un sommet v_0 de l'arbre et trouver le sommet v_1 le plus éloigné de v_0.

Etape 2 : calculer le sommet v_2 le plus éloigné de v_1.

Etape 3 : le centre absolu se trouve au milieu de la chaine allant de v_1 à v_2.

a) Appliquer l'algorithme à l'arbre ci-dessous en prenant v_0 = A. on rapportera v_1, v_2 et la position du centre optimal X*.

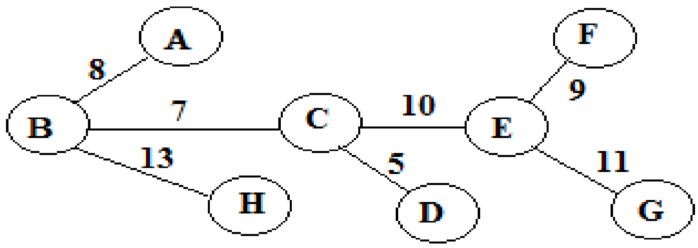


Figure 9. Un arbre

Réponse : En appliquant l'algo. on trouvera V1=G, V2=H et X sur l'arête (C,E) a une distance de 0,5 de C.*

b) Donner l'idée d'un algorithme pour chercher les distances d'un sommet à tous les autres sommets d'un arbre, en utilisant la file des successeurs (chaque arête [i,j] est dédoublée). Quelle est la complexité O(f(n)) de votre algorithme ?

Réponse : il s'agit d'un algo simple de parcours comme suit :

Partant d'un sommet v0 ; \lamda 0 = 0, le reste = infini ; v0 est atteint.

Tant qu'il existe des sommets atteints non examinés, faire :

-soit i un sommet atteint non examiné :

tous ses successeurs j non atteint seront notés comme atteints et seront évalués avec \lambda + valeur de l'arc (i,j); (le sommet i devient examiné).

Complexité de la méthode est en o(n) car il y a en tous n sommets et seulement n-1 arcs dans le graphe (c'est un arbre).

c) Exprimer en fonction de O(f(n)) la complexité de l'algorithme « 1-centre absolu ».
La complexité est aussi O(f(n))=O(n).

d) Preuve de l'algorithme.
On va raisonner par l'absurde en supposant qu'un sommet v_3 soit strictement plus loin du centre X, calculé par l'algorithme que les sommets v_1 et v_2. On vous demande de conclure sur les deux cas suivants :*

Cas 1 : v_3 est plus proche de v_2 que de v_1. Sur la figure v_4 est le point d'intersection des chaines allant de v_1 à v_2 et de v_3 à v_2. Montrer que le cas 1 est impossible en comparant les distances de v_1 à v_3 et v_1 à v_2.

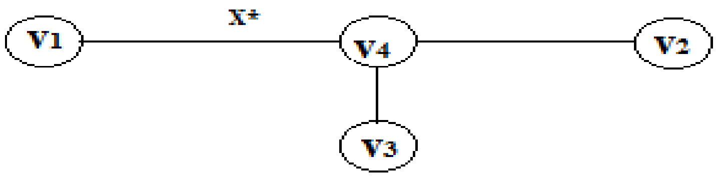


Figure 10. Preuve (cas 1)

Réponse : (V3, X) > (V2, X) => (V3,V4) > (V3, V2) => (V1,V3) > (V1,V2). Cette dernière relation est en contradiction avec le déroulement de l'algorithme.

Cas 2 : v_3 est plus proche de v_1 que de v_2. On note v_5 le point d'intersection des chaines allant de v_0 à v_1 et v_1 à v_2. Montrer que v_5 est plus proche de v_2 que de v_1.

On a donc le schéma suivant :

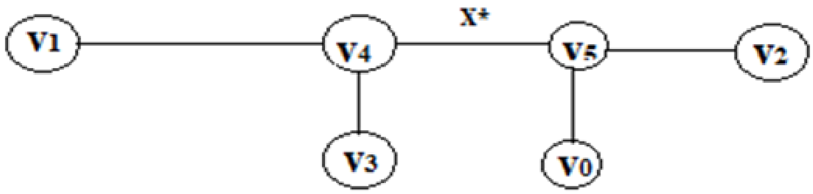


Figure 11. Preuve (cas 2)

Détecter la contradiction.

En déduire l'optimalité de l'algorithme
Réponse : (V0, V1) > (V0, V2) => (V5, V2) > (V5, V1) : cela explique le schéma donné dans la figure 11. Ensuite : (V3,X) > V1,X) => (V3,V4) > (V1,V4) => (V0,V1) < (V0,V3), ce qui est en contradiction avec le déroulement de l'algorithme. On déduit que l'algo est optimal car les deux sous-bas couvrent toutes les possibilités.

Question 3. Le cas d'un arbre et du problème des 2-centres absolus (3 points)

Algorithme 2-centres absolus

Etape 1 : utiliser l'algorithme « 1-centre absolu ».

Etape 2 : Enlever de l'arbre l'arête contenant le 1-centre absolu. Cela divise l'arbre en deux sous-arbres.

Etape 3 : appliquer l'algorithme pour le 1-centre absolu à chacun des sous-arbres.

Cela constitue une solution du problème des 2-centres absolus.

a) Appliquer l'algorithme à l'arbre donné dans la Figure 9.
   On sépare le graph en deux parties et on trouvera un centre sur (E,G) et l'autre sur (B,H)
b) Quelle est la complexité de cette méthode ?
   O(n).

PARTIE B. Le problème des P-centres aux nœuds

Question 4 : Modélisation du cas général (2 points)

Entrée
d_{ij} = distance du nœud i au centre j.
P = le nombre de centres

Variables de décision

x_i = 1 si un centre est installé au nœud i et à 0 sinon ;
y_{ij} = 1 si le nœud j est servi par le centre i et 0 sinon.

Min z

$$
\begin{array}{llll}
\sum_i y_{i,j} = 1; & \forall j & (a) \\
\sum_i x_i = P; & & (b) \\
y_{i,j} \le x_i, & \forall i, \quad \forall j & (c) \\
\sum_i d_{i,j} y_{i,j} \le z, & \forall j, & (d) \\
x_i \in \{0,1\} & \forall i & (e) \\
y_{i,j} \in \{0,1\} & \forall i, \forall j, & (f) \\
z \ge 0; & & (g)
\end{array}
$$

Interpréter les contraintes (a), (b), (c), (d), (e), (f) et (g). (Une phrase pour chaque contrainte).
Réponse : (a) : un seul centre i servira un nœud j.
(b) : il y a aura exactement P centres.
(c) : on nez peut pas servir le nœud j depuis i seulement si un centre est placé dans le nœud i.
(d) le terme gauche donne la distance de couverture pour le nœud j. le terme droit (z) donne la valeur de couverture à minimiser.

Question 5 : Un algorithme pour le cas d'un graphe quelconque (3 points).

Etape 1 : calculer tous les d_{ij}. (d_{ij} correspond a la distance du nœud i au nœud j).
Complexité O(n^3)

Etape 2 : énumérer toutes les combinaisons de P centres parmi n et retenir la meilleure.

a) Sachant qu'il y a $O(n^P)$ combinaisons possibles, quelle est la complexité de cet algorithme ?

   *Cela donnera $O(Pn^{P+1})$ car pour chaque configuration il y a uara p*n operations pour calculer la distance de couverture.*

b) Est-il réaliste d'appliquer cet algorithme pour toute valeur de P comprise entre 1 et n ? Justifier votre réponse.

   Appliquer cela pour tout P entre 1 et n donnerait une complexité de $O(2^n)$

c) Le problème de P-centres aux nœuds est NP-difficile, est-ce contradictoire avec a) ou b) ? Pourquoi ?

   Non, ce n'est pas contradictoire car a et b donnent des complexités clairement non polynomiales…