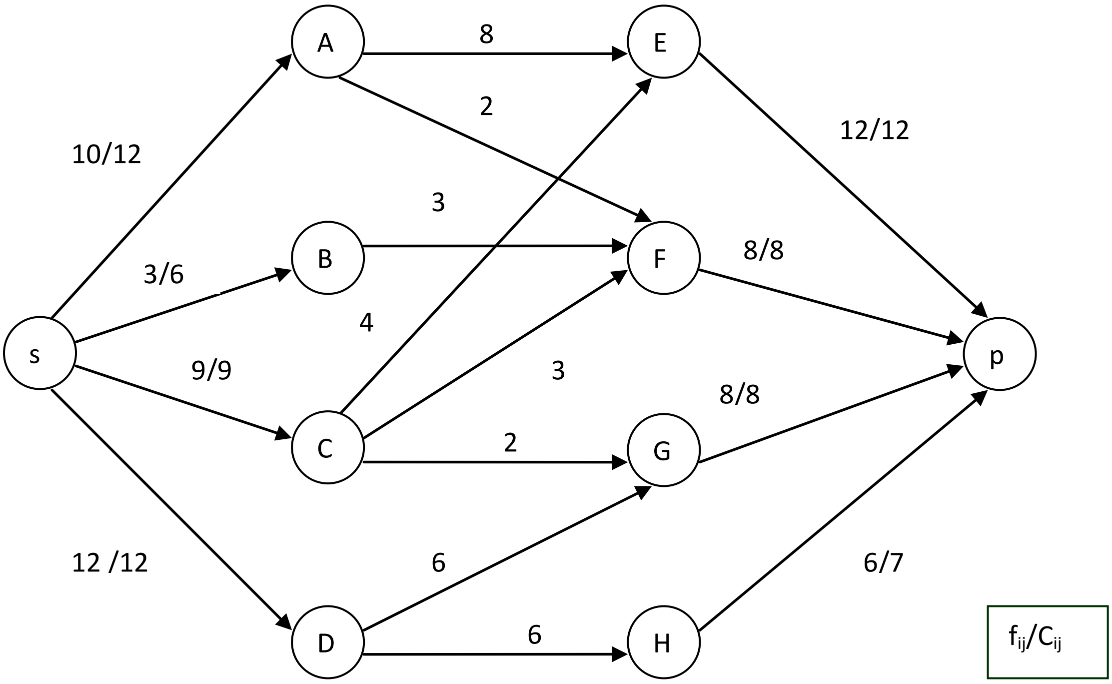
Final RO03, **Printemps 2015**

Exercice 1. Les flots (3 points)



Réseau de transport et flot (les capacités des arcs du milieu sont supposées infinies).

1) Le flot donné ci-dessus est-il complet ? Justifier.
2) Calculer le flot optimal et donner une coupe minimale.

Le problème des P-centres

Soit G=(V, E, v) un graphe non orienté, valué par des nombres entiers strictement positifs (v : E-> N*). Dans le problème des P-centres, il s'agit de placer P centres sur le graphe, de façon à minimiser la distance de couverture maximale : pour une distance *d* de couverture choisie, un centre couvre tous les sommets qui sont à une distance d'au plus *d* à lui-même. Dans le problème pratique, chaque centre correspond à un dépôt, chaque nœud (donc sommets) du graphe satisfait la demande en se fournissant au centre (dépôts) le plus proche. On distingue le problème des P-centres absolus, où les centres peuvent se trouver sur une arête, et le problème des P-centres aux nœuds où les centres doivent se trouver en des nœuds.

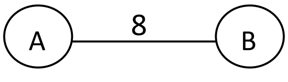


Figure 1. Exemple 1

Ainsi dans le problème du 1-centre absolu, et pour le graphe de deux sommets A, B et d'arête [A, B] valuée par 8, la solution optimale consiste à placer le centre au milieu de l'arête [A, B] ; la distance de couverture est alors de égale à 4. Pour le même graphe, la solution optimale du 1-centre aux nœuds est l'un des deux nœuds A ou B, et la valeur de la solution est 8. Pour l'arbre ci-dessous, la solution optimale du 1-centre absolu, consiste à placer le centre sur l'arête [C, A] de 6 unités et donc de 2 unités de A ; la valeur de solution est 13. La solution optimale du 1-centre aux nœuds est le nœud A pour une valeur de 15.

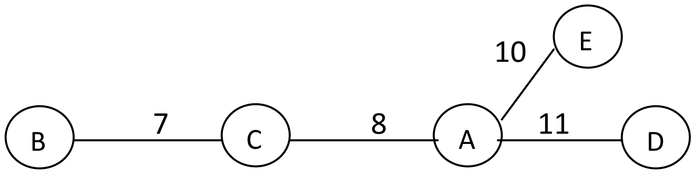


Figure 2. Exemple 2

PARTIE A. Le problème des P-centres absolus

Question 1. (2 points).

Sur les figures ci-dessous, on a rapporté les positions optimales pour P=1, P=2, P=3, P=4 et P=5 (utilisant les positions α, β, γ, δ et ε) pour le graphe ci-joint :

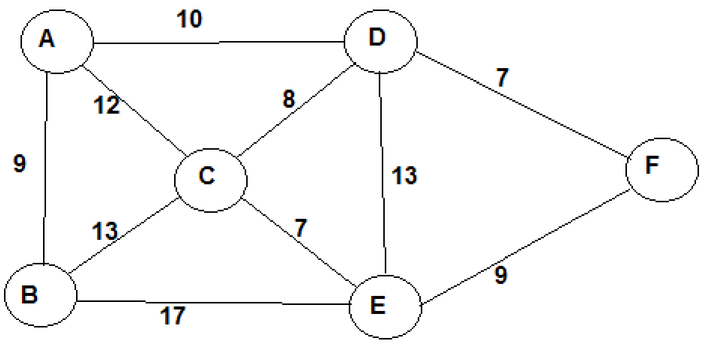


Figure 3. Le graphe

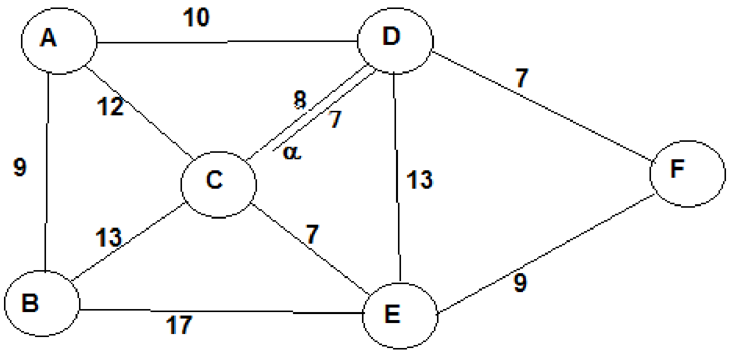


Figure 4. P=1

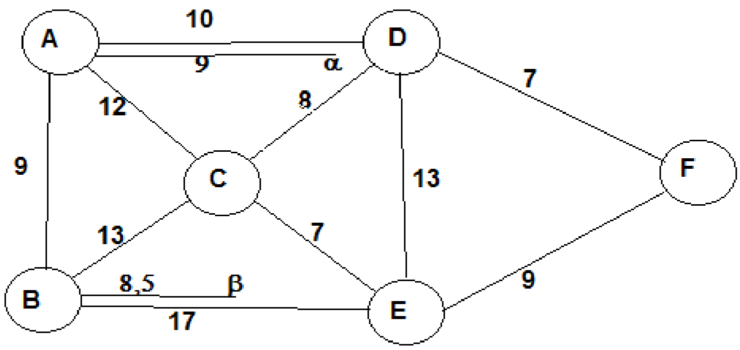


Figure 5. P=2

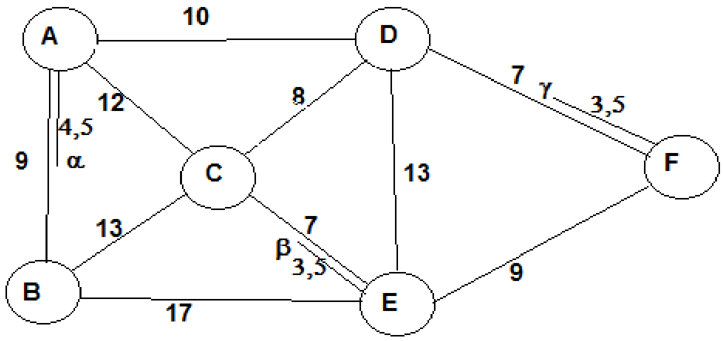


Figure 6. P=3

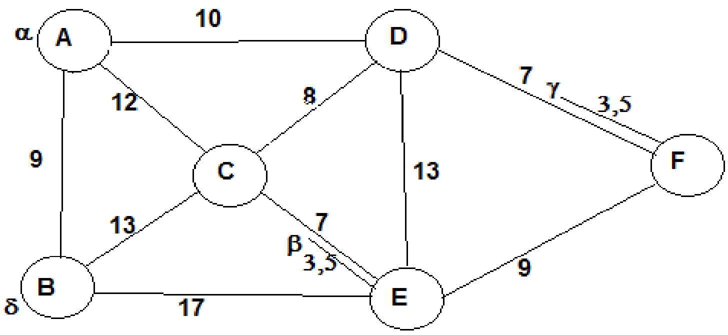


Figure 7. P=4

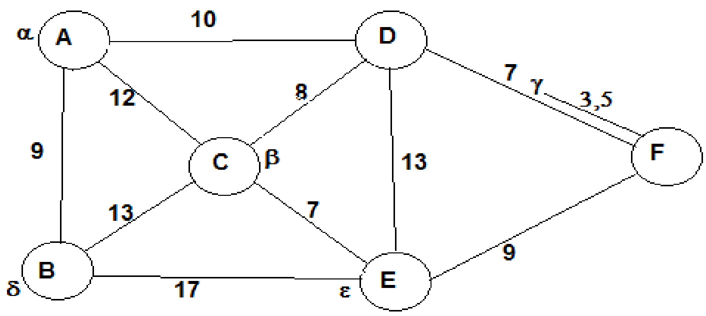


Figure 8. P=5

a) Rapporter pour chaque valeur de P, la valeur optimale de la distance de couverture.
b) Pour P=2, à quel centre sont rattachés les sommets A, B, C, D, E et F ?

Question 2. Le cas d'un arbre et du 1-centre absolu (7 points)
Pour déterminer 1-centre absolu, on va utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme 1-centre absolu
Etape 1 : choisir arbitrairement un sommet v_0 de l'arbre et trouver le sommet v_1 le plus éloigné de v_0.
Etape 2 : calculer le sommet v_2 le plus éloigné de v_1.
Etape 3 : le centre absolu se trouve au milieu de la chaine allant de v_1 à v_2.

a) Appliquer l'algorithme à l'arbre ci-dessous en prenant v_0 = A. on rapportera v_1, v_2 et la position du centre optimal X*.

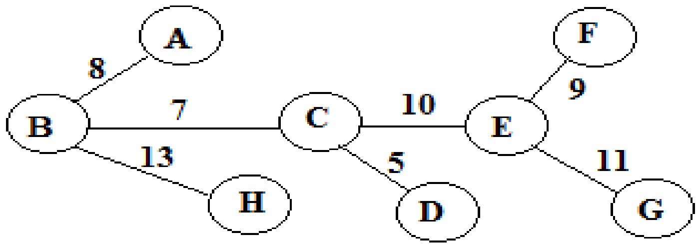


Figure 9. Un arbre

b) Donner l'idée d'un algorithme pour chercher les distances d'un sommet à tous les autres sommets d'un arbre, en utilisant la file des successeurs (chaque arête [i,j] est dédoublée). Quelle est la complexité O(f(n)) de votre algorithme ?
c) Exprimer en fonction de O(f(n)) la complexité de l'algorithme « 1-centre absolu ».
d) Preuve de l'algorithme.
On va raisonner par l'absurde en supposant qu'un sommet v_3 soit strictement plus loin du centre X*, calculé par l'algorithme que les sommets v_1 et v_2. On vous demande de conclure sur les deux cas suivants :

Cas 1 : v_3 est plus proche de v_2 que de v_1. Sur la figure v_4 est le point d'intersection des chaines allant de v_1 à v_2 et de v_3 à v_2. Montrer que le cas 1 est impossible en comparant les distances de v_1 à v_3 et v_1 à v_2.

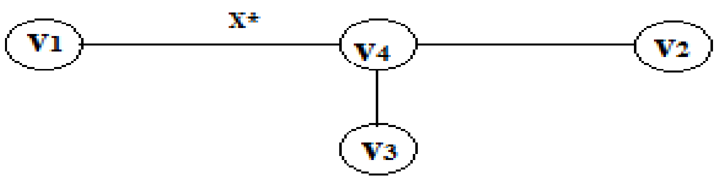


Figure 10. Preuve (cas 1)

Cas 2 : v_3 est plus proche de v_1 que de v_2. On note v_5 le point d'intersection des chaines allant de v_0 à v_1 et v_1 à v_2. Montrer que v_5 est plus proche de v_2 que de v_1.

On a donc le schéma suivant :

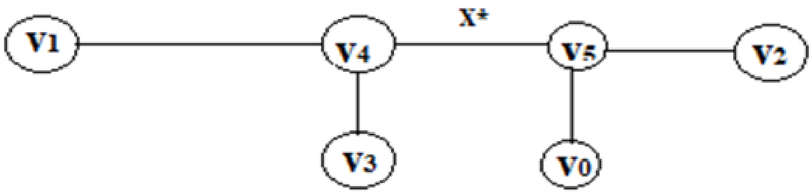


Figure 11. Preuve (cas 2)

Détecter la contradiction.
En déduire l'optimalité de l'algorithme

Question 3. Le cas d'un arbre et du problème des 2-centres absolus (3 points)

Algorithme 2-centres absolus
Etape 1 : utiliser l'algorithme « 1-centre absolu ».
Etape 2 : Enlever de l'arbre l'arête contenant le 1-centre absolu. Cela divise l'arbre en deux sous-arbres.
Etape 3 : appliquer l'algorithme pour le 1-centre absolu à chacun des sous-arbres. Cela constitue une solution du problème des 2-centres absolus.

a) Appliquer l'algorithme à l'arbre donné dans la Figure 9.
b) Quelle est la complexité de cette méthode ?

PARTIE B. Le problème des P-centres aux nœuds

Question 4 : Modélisation du cas général (2 points)

Entrée

d_{ij} = distance du nœud i au centre j.

P = le nombre de centres

Variables de décision

x_i = 1 si un centre est installé au nœud i et à sinon ;

y_{ij} = 1 si le nœud j est servi par le centre i et 0 sinon.

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{Min } z & & \\
\sum_i y_{i,j} = 1; & & \forall j & (a) \\
\sum_i x_i = P; & & & (b) \\
y_{i,j} \leq x_i, & & \forall i, \quad \forall j & (c) \\
\sum_i d_{i,j} y_{i,j} \leq z, & & \forall j, & (d) \\
x_i \in \{0,1\} & & \forall i & (e) \\
y_{i,j} \in \{0,1\} & & \forall i, \forall j, & (f) \\
z \geq 0; & & & (g)
\end{array}
$$

Interpréter les contraintes (a), (b), (c), (d), (e), (f) et (g). (Une phrase pour chaque contrainte).

Question 5 : Un algorithme pour le cas d'un graphe quelconque (3 points).

Etape 1 : calculer tous les d_{ij}. (d_{ij} correspond a la distance du nœud i au nœud j).

Etape 2 : énumérer toutes les combinaisons de P centres parmi n et retenir la meilleure.

a) Sachant qu'il y a $O(n^P)$ combinaisons possibles, quelle est la complexité de cet algorithme ?
b) Est-il réaliste d'appliquer cet algorithme pour toute valeur de P comprise entre 1 et n ? Justifier votre réponse.
c) Le problème de P-centres aux nœuds est NP-difficile, est-ce contradictoire avec a) ou b) ? Pourquoi ?