Final RO03

Exercice 1. Cheminement. (5 points)
1. On considère le graphe G=(X,U) donné ci-dessous. Sur chaque arc u nous avons associé sa valeur v(u).

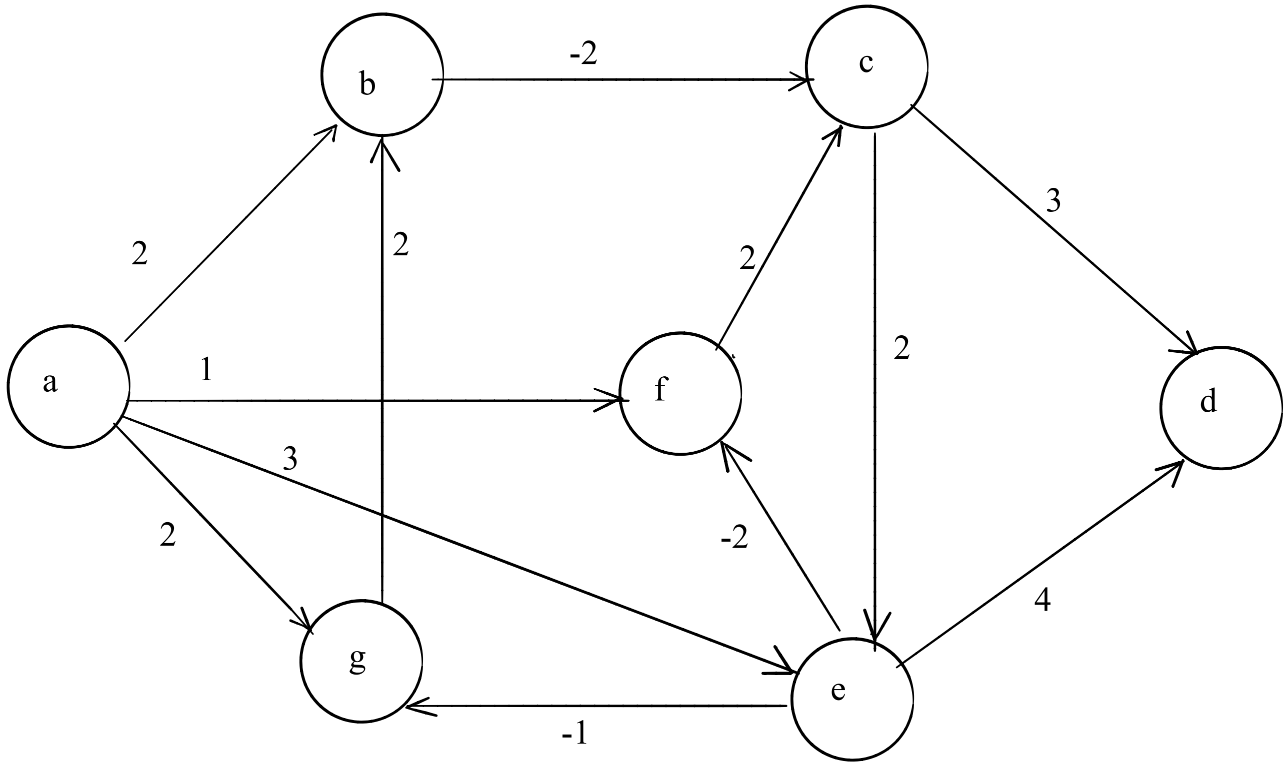


Fig. 1. Graphe G=(X,U)

Q1. Démontrer que le graphe admet des chemins de plus petite valeur du sommet a à tout autre sommet. Indication : utilisez le résultat d'un théorème vu en cours. Quel algorithme proposez vous pour calculer les chemins de valuation minimale du sommet a à tout autre sommet. Il n'est pas demandé d'appliquer l'algorithme. Indication : il y a deux circuits élémentaires.

Q2. Dans le tableau ci-dessous les valeurs Lambda(x) donnent les valeur des chemins de plus petite valuation de a à tout autre sommet dans le graphe G. Utiliser cette information pour déduire les arcs appartenant à l'arbre des chemins de plus petite valuation de a à tout autre sommet. Donner ces arcs. Justifier votre réponse.

X	a	b	c	d	e	f	g
Lambda(X)	0	2	0	3	2	0	1

Q3. Y-a t il unicité des chemins ? Justifier.

Exercice 2. Algorithme de Roy sur un probleme de matching. (3 points)
Considérons un problème d'affectation comme celui étudié au TD 13. Il y a trois programmeurs A, B et C qui doivent réaliser trois programmes 1, 2 et 3. Chacun doit exécuter un seul programme et tout programme doit être exécuté par un seul programmeur. La Fig. 2 donne les coûts de réalisation pour chaque affectation possible de chaque programmeur à un programme et qui est représenté par un arc.
On souhaite utiliser l'algorithme de Roy pour résoudre ce problème.

Question 1. Donner les arcs et les capacités qu'il faudra rajouter sur la figure suivante pour obtenir un réseau de transport permettant de calculer une affectation de coût minimal. Appliquer l'algorithme de Roy. Rapporter les itérations successives, le couplage de coût minimum obtenu ainsi que le coût de ce couplage.

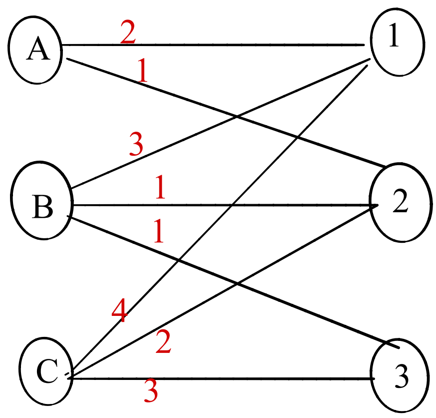


Fig. 2. Coûts des affectations

Exercice 3. Graphe d'écart et flots canalisés (5 points)
On considère le réseau de transport ci-dessous. Soit F0 un flot compatible et Ge(F0) le graphe d'écart correspondant donné ci-dessous avec seulement les notations des coûts associés.

Question 1. Identifier les valeur de F0 sur chaque arc. (2 points)

Question 2. Est-ce que F0 est de coût minimum ? Justifier votre réponse. Si besoin calculer un flot compatible de coût minimum. On n'oubliera pas de prendre en compte l'arc de retour.

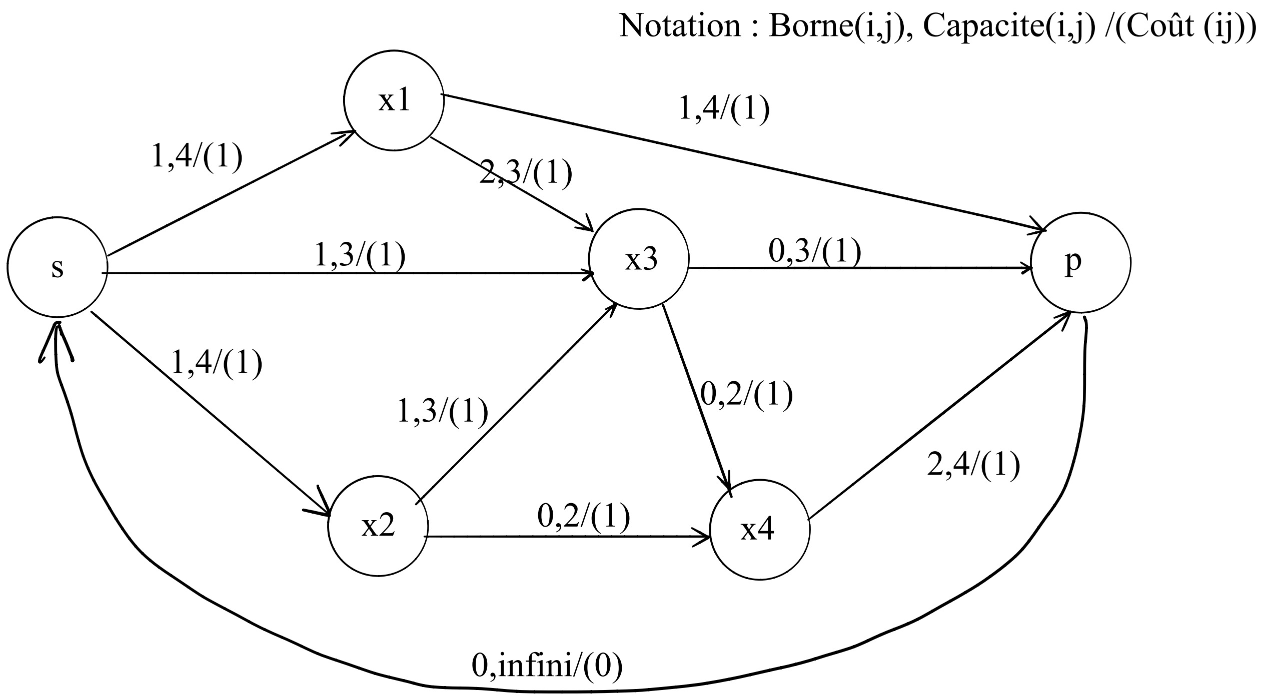


Fig. 3. Réseau de transport

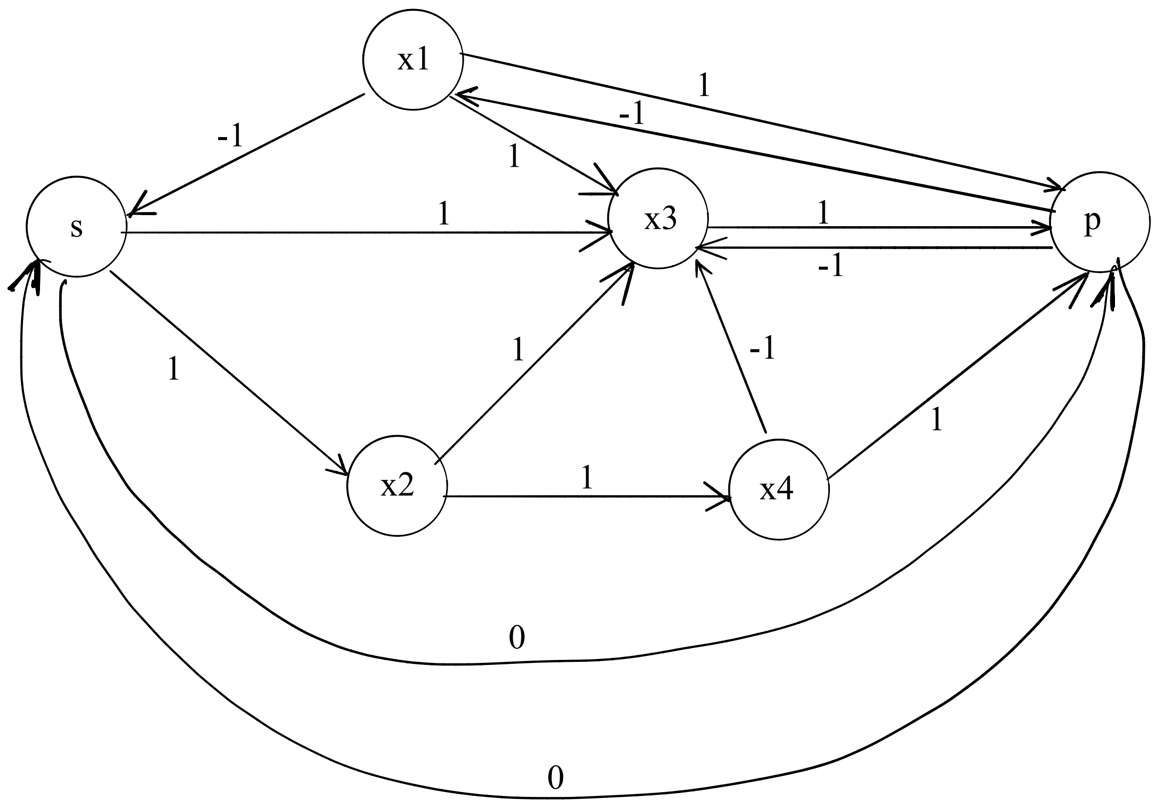
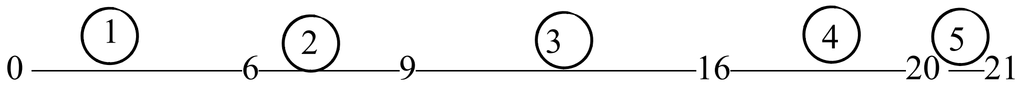


Fig. 4. Graphe d'écart Ge(F0) (valuation correspondant aux coûts)

Ordonnancement 7 points

Partie I. On considère le problème d’ordonnancement dans lequel il faudra déterminer un ordre d’exécution des tâches sur une machine en optimisant un critère. Les tâches s’exécutent alors dans cet ordre et consécutivement. Par exemple, étant donné un ensemble de $n=5$ tâches, de durées $P1=6$, $P2=3$, $P3=7$, $P4=4$, $P5=1$, et supposant que ces tâches s’exécutent dans l’ordre 1,2, 3, 4, 5, on a l’ordonnancement suivant:



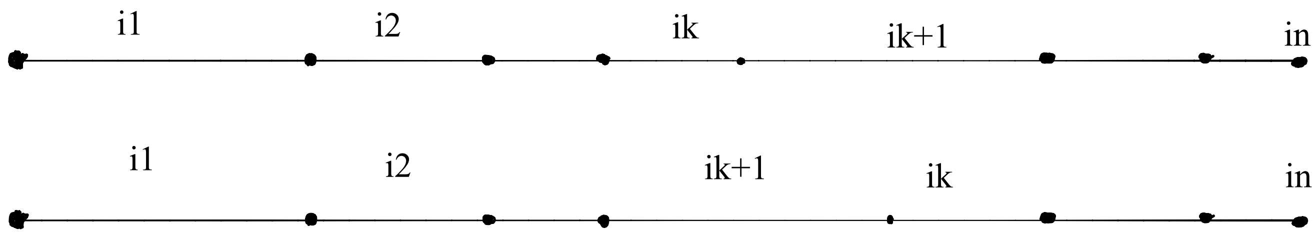
Si on note avec Ci la date d’achèvement de la tâche i, $C1=6$, $C2=9$, $C3=16$, $C4=20$, $C5=21$. Le critère que nous considérons ici est celui de minimisation de la somme des dates d’achèvement.

Plus généralement, si on a n tâches de durées $Pi1, Pi2,...,Pin$ qui s’exécutent dans l’ordre $i1,i2, ..., in$, on a l’ordonnacement avec $Cik= Pi1+ Pi2+,...,+Pik$. Le critère est : minimiser la somme des Cik.

Q1. Justifier brièvement : $Ci1 +Ci2 +...+Cin = n*Pi1+(n-1)*Pi2+...+Pin$. Montrer qu’on obtient un ordonnancement optimal en appliquant la règle : « ordonner les tâches dans le sens des Pi croissants ». (2 points)

Q2. Donner l’ordonnancement optimal pour l’exemple précédent et la valeur de la somme des Ci. Comparez au coût initial que vous calculerez. (1 point)

Partie II. Minimisation du plus grand retard.
On associe en outre aux n tâches des dates d’échéances $D1, D2, ..., Dn$. On dit que la tâche i est en retard si $Ci > Di$, son retard Ti est alors $Ci - Di$. Par définition si $Ci<= Di$, alors son retard est nul. Donc, $Ti = max(0, Ci-Di)$.
On veut minimiser $Tmax = max Ti (i=1..n)$.
Q1. On considère un ordre quelconque $i1, i2, ..., in$ et deux tâches consecutives $ik, ik+1$ dans cet ordre. On se propose de comparer cet ordre O et celui O’ obtenu en permutant les deux taches consecutives ik et $ik+1$. On note avec $T’i$ le retard de la tâche i dans l’ordre O’.



Comparer Ti et $T’i$ pour i different de ik et $ik+1$. (1 point)

Q2. On suppose que $Dik > Dik+1$. Comparer $max(Tik, Tik+1)$ à $max(T’ik, T’ik+1)$. (1 point)

Q3. Déduire une règle générale et la justifier. (1 point)

Q4. Appliquer cette règle à l’exemple de la Partie I avec $D1=12$, $D2=7$, $D3=21$, $D4=5$ et $D5=10$.