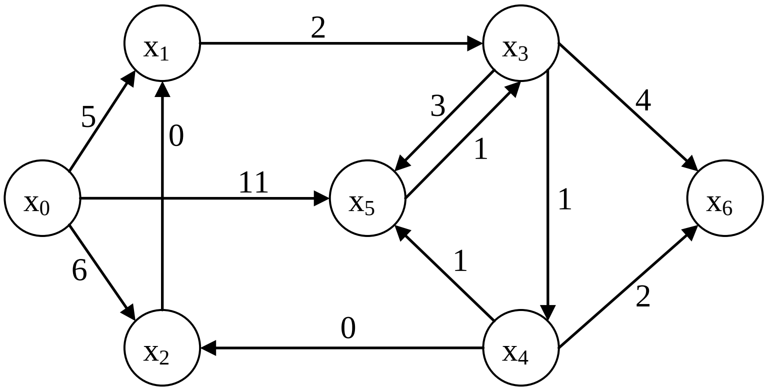
<u>Exercice 1</u> : <u>Algorithme de Dijkstra</u> (3 points)

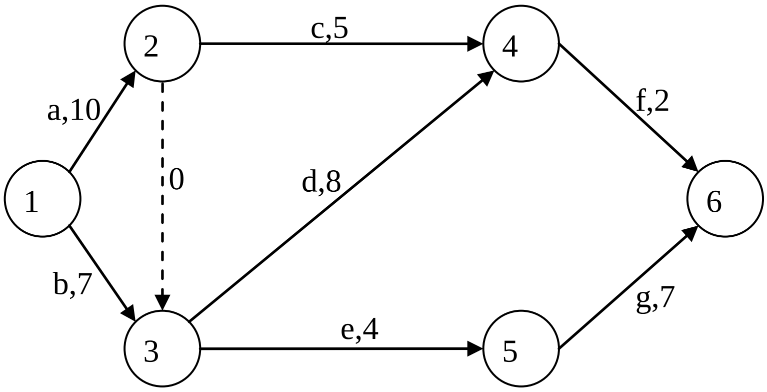
Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe ci-contre.

On rapportera le tableau de Dijkstra et l'arborescence de chemins minimaux qui lui correspond.



<u>Exercice 2</u> : <u>Ordonnancement</u> (4 points)

Le graphe ci-contre rapporte un graphe PERT simplifié décrivant les contraintes de précédence entre les 7 tâches a,b,c,d,e,f et g. L'arc(2,3) représente un arc fictif.



-1- Quel est sur le graphe PERT, l'intérêt de l'arc fictif ? Est-il indispensable ?

-2- Dessiner le graphe potentiel-tâches associé à ce graphe PERT.

-3- Calculer sur ce graphe les dates au plus tôt et les dates au plus tard.

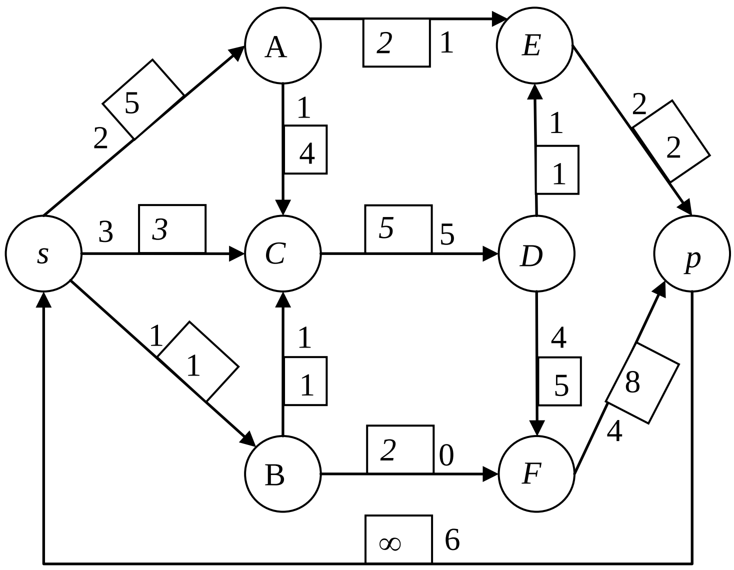
-4- Rapporter tous les chemins critiques de ce graphe.

<u>Exercice 3</u> : <u>Algorithme de Ford- Fulkerson</u> (4 points)

-1- Le flot ci-contre est-il complet ? Justifier.

-2- Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson en partant du flot ci-contre : on recopiera le graphe à chaque itération de l'algorithme, et on rapportera la ou les chaînes améliorantes obtenues et les marquages successifs.

-3- Déterminer une coupe minimale.



Problème : **Recherche d'un transversal minimal dans un biparti** (9 points)

Deux ensembles disjoints de machines $M_1 = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ et $M_2 = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ permettent de réaliser des opérations différentes. À chaque opération O est associé un et un seul couple (i, j) signifiant que O peut être réalisé par la machine A_i ou par la machine B_j.

On cherche à résoudre le problème suivant : trouver, parmi les sous-ensembles de machines inclus dans $M_1 \cup M_2$ qui permettent de réaliser toutes les opérations, un ensemble de cardinal minimal.

On s'appuiera sur l'exemple suivant :
$M_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ et $M_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.
Les opérations à réaliser sont $O_1 = (1,1)$, $O_2 = (1,4)$, $O_3 = (2,2)$, $O_4 = (3,2)$, $O_5 = (3,3)$, $O_6 = (4,1)$, $O_7 = (5,1)$, $O_8 = (5,2)$, $O_9 = (5,3)$, $O_{10} = (5, 3)$.

Question 1 (1 points)

On appelle transversal d'un graphe un ensemble de sommets rencontrant toutes les arêtes du graphe.

Montrer que le problème de l'exemple se ramène à la recherche d'un transversal de cardinal minimal dans un graphe biparti que l'on dessinera. Généraliser au cas général.

Question 2 (3 points)

On associe au graphe biparti un réseau de transport en ajoutant une source s, un puits p, des arcs (s,i) ($A_i \in M_1$) de capacité 1, des arcs (j,p) ($B_j \in M_2$) de capacité 1. Les arcs (i,j) du graphe initial sont de capacité infinie.

Dessiner le réseau de transport de l'exemple, calculer un flot maximal et une coupe minimale.

Question 3 (3 points)

Soit $A \subseteq M_1$ et $B \subseteq M_2$. Montrer les équivalences entre (1) et (2), puis entre (2) et (3) :

(1) $B \cup (M_1 - A)$ est un transversal

(2) $U^+(A) \subseteq B$

(3) $s \cup A \cup B$ est une coupe de capacité finie du réseau de transport.

Question 4 (2 points)

Quelle relation y-a-t-il entre les coupes de capacité finie et les transversaux du graphe biparti ? Entre leurs capacités ?

En déduire une méthode pour calculer un transversal de cardinal minimal. Appliquer cette méthode à l'exemple.

Quel problème vu au début du cours de RO03 reconnaissez-vous ? En déduire la complexité de cette méthode ?