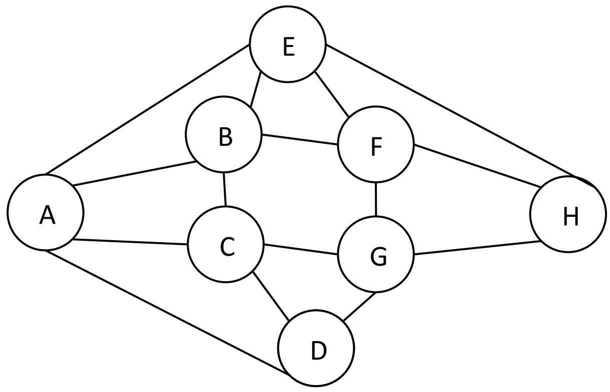
UV RO03, Médian, 2h, 9 mai 2017 - Polycopié, notes de cours et de Td autorisés.

Exercice 1 (3 points). On considère le graphe G ci-dessous.

a. Déterminer un stable de cardinal maximal et une clique maximale.
b. Déterminer une coloration de cardinal minimal.
c. Déterminer, s'ils existent, un chemin et un cycle eulérien. Justifier votre réponse.



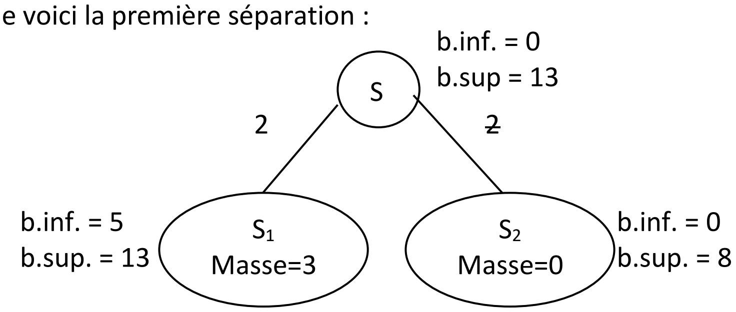
Exercice 2 (5 points).

On considère le problème du sac-à-dos. *Rappel : le problème du sac-à-dos consiste à remplir un sac-à-dos avec des aliments de sorte que l'on puisse maximiser la valeur nutritive du contenu du sac tout en respectant la masse maximale autorisée.* Les données d'une instance problème sont dans le tableau ci-dessous et la masse maximale autorisée est 7 kg. Dans ce problème, on ne dispose que d'une seule unité de chaque aliment.

Aliment	1	2	3	4
Masse (kg)	2	3	4	2
Valeur nutritive	2	5	3	3

Question. Pour résoudre le problème, utilisez une méthode arborescente, inspirée de la méthode de Little. La méthode consiste à construire un arbre binaire dont le critère de séparation est la présence ou non d'un aliment dans le sac. Considérez les aliments dans <u>l'ordre croissant</u> du rapport masse/valeur nutritive. Associez à chaque feuille de l'arbre obtenu des bornes inferieures ou supérieures, ou bien encore la valeur exacte, de la valeur nutritive que le sac peut contenir dans cette configuration.

A titre d'exemple voici la première séparation :



Complétez l'arbre et trouvez la configuration optimale de remplissage du sac.

Problème (12 points).

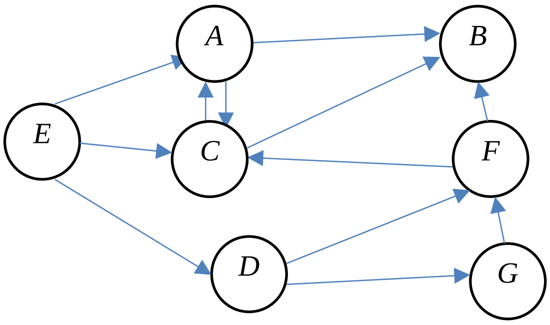
On considère un graphe orienté G=(X,U) ayant au moins un sommet sans successeur. Les sommets sans successeur seront dit « terminaux ». Le but du problème est d'étudier un algorithme qui colorie les sommets du graphe avec trois couleurs (rouge, vert et jaune). L'intérêt de ce coloriage est son utilisation pour étudier un jeu à deux joueurs qui peut être associé à un graphe.

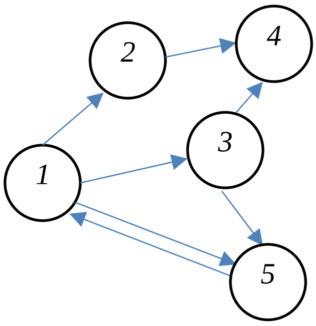
Algorithme TRICOLORATION

{Initialement aucun sommet n'est coloré.}

1) Colorier en rouge tous les sommets sans successeur.
2) Examiner un par un tous les sommets non coloriés.
    - Colorier en vert tout sommet ayant au moins un successeur rouge.
    - Colorier en rouge tout sommet dont tous les successeurs sont coloriés en verts.
3) Itérer 2) tant qu'un sommet a été colorié en 2).
4) Colorier en jaune les sommets non coloriés.

Question 1. Application
Appliquer l'algorithme TRICOLORATION aux deux graphes ci-dessous.
On rapportera le coloriage obtenu pour chaque graphe en associant à chaque sommet sa couleur et l'ordre de coloration. P.ex. si le sommet B est le premier sommet coloré (en rouge) on lui associera (Rouge, 1), si C est le deuxième sommet coloré (en vert) on lui associera (Vert, 2).





Question 2. Complexité.
On suppose le graphe codé par la matrice associée. Evaluez la complexité de l'algorithme dans ce cas. Que devient la complexité si on code le graphe avec les files de successeurs ?

Question 3. Terminaison.
Expliquer pourquoi l'algorithme se termine.

<u>Définition.</u>
On appelle « assez bonne numération » une numération d'un graphe TRICOLORE en rouge, vert et jaune telle que :

a) Les successeurs d'un sommet rouge ont tous un numéro plus petit que le numéro du sommet rouge.
b) Tous sommet vert a un sommet successeur rouge de plus petit numéro.
c) Un sommet jaune n'a pas de successeurs rouges et a au moins un successeur jaune.

Question 4. « Assez bonne numérotation ».
Montrer que l'ordre dans lequel on colorie les sommets dans TRICOLORATION définit une « assez bonne numérotation ».

Question 5. Unicité de la TRICOLORATION
Il y a une forme d'indéterminisme dans l'algorithme dans la mesure où on ne précise pas dans quel ordre les sommets sont examinés en 2). On se propose de comparer deux exécutions possibles de l'algorithme, la première sera dite de <u>référence</u> et la deuxième une <u>alternative</u>.
On veut montrer que l'alternative conduit à la même coloration que celle obtenue par l'exécution de référence.
Dans l'exécution de référence, on a coloré les n sommets dans l'ordre i_1, i_2, ..i_n, i_1 étant le premier sommet coloré, i_2 le deuxième sommet coloré et ainsi de suite.
On va supposer que la coloration alternative est différente et obtenir une contradiction. On notera i_r le plus petit r tel que la coloration alternative est identique pour i_1, i_2, .. i_{r-1} et différente pour i_r. Montrer que cela est impossible en examinant les trois colorations possibles pour i_r.
En déduire l'identité des deux colorations.

Question 6. Politique d'un jeu
On associe au graphe un jeu à deux joueurs en choisissant un sommet (= état) initial de ce graphe – les sommets terminaux sont des sommets gagnants pour le joueur qui atteint un tel état.
Le jeu consiste pour le joueur qui débute à se placer à l'état initial. Il choisit alors d'aller à un de ses successeurs. Il gagne si le successeur est un état terminal sinon c'est à l'autre joueur de jouer à partir de ce successeur. On itère jusqu'à ce qu'un des deux atteint un état terminal ou si les joueurs sont fatigués de jouer.
Expliquer quelle est la bonne politique de chacun des joueurs, s'ils se trouvent dans un état vert ? Y-a-t il une bonne politique s'il se trouve dans un état rouge, jaune ? Peut-on parler d'états gagnants, perdants et nuls ? Justifier.

Question 7. Cette modélisation s'applique-t-elle au jeu de Nime vus en TD ? Au jeu de dames ? D'échec ?

Quelle est la difficulté de ces jeux ?

Question 8. À quelle condition, cette modélisation est applicable à un jeu ? Quand ne serait-elle pas applicable ?