Examen médian RO03 - Mai 2021

Documents autorisés : Polycopié, notes de cours et de TD
Tout appareil électronique est interdit.

Rédigez vos réponses sur deux copies différentes : une pour chaque partie.

PARTIE I.

Exercice 1 (6 points):

On se propose de résoudre le cryptographe suivant :

$$\begin{array}{r} O\ U\ I \\ +\ O\ U\ I \\ \hline N\ O\ N \end{array}$$

Sachant que les lettres représentent des chiffres compris entre 0 et 9, que deux lettres différentes représentent deux chiffres différents, donner toutes les solutions avec O≠0 et N≠0 à l'aide d'une arborescence.

Conseil : écrire les équations déduites de l'opération de l'addition, déduire le domaine des retenus et séparer sur ces valeurs.

PARTIE II.

Problème.

Dans la suite G = (V,E) désigne un graphe non orienté sans boucle. Nous notons *n* le nombre de sommets et *m* le nombre d'arêtes.

Définitions

- Une **k-coloration** d'un graphe G est un étiquetage f des sommets de G avec les couleurs 1,2, 3,...,k (c'est-à-dire, f : V→{1,...,k}), telle que deux sommets adjacents sont de couleurs distinctes.
- Le **nombre chromatique** χ(G) est le nombre minimum k pour lequel G a une k-coloration.
- Une **coloration minimale** d'un graphe G est une χ(G)-coloration.

Question 1. Modélisation (2 points)

Il est donné ci-dessous un morceau de carte. On souhaite colorier cette carte avec le moins de couleurs possibles de manière à ce que deux régions pays qui ont une frontière commune soient de couleurs différentes. Montrer comment modéliser ce problème de coloriage via un graphe ? Proposer sur ce dernier une coloration minimale.

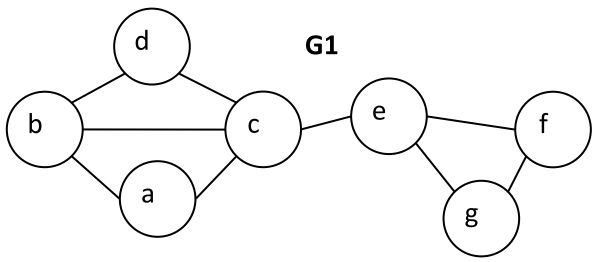
Question 2 : Algorithme GLOUTON (7 pts)

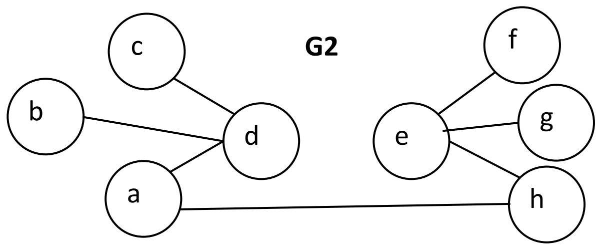
Le problème de la détermination d'une coloration minimale est NP-difficile. C'est pourquoi, on va se contenter d'une méthode heuristique : l'algorithme GLOUTON.

Algorithme GLOUTON {les couleurs sont ici représentées par les nombres 1, 2, 3, ...}

1. Lire le graphe.
2. Ordonner les sommets de G selon l'ordre décroissant des degrés.
3. Associer à G la coloration obtenue en colorant les sommets dans cet ordre : on affecte au sommet v_i la couleur de plus petit indice k non encore utilisée par ses sommets adjacents déjà colorés.

Rappel : Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs incidents en ce sommet.





a) Appliquer l'algorithme GLOUTON aux graphes G_1 et G_2.
b) GLOUTON est-il optimal pour G_1 ? pour G_2 ? Justifier.
c) GLOUTON est-il optimal pour tout graphe ? Est-ce surprenant ?
d) On se place dans le cas général et on suppose que le graphe G est représenté par la matrice associée. Quelle est alors la complexité de l'algorithme GLOUTON en fonction de n et/ou m ? Justifier pour chaque étape.
e) Proposer une meilleure structure de données. Quelle est alors la complexité résultante en fonction de n et/ou m ? Justifier.

Question 3 : Propriétés théoriques (5 pts)

a) Montrer rigoureusement que le nombre de couleurs utilisées par l'algorithme GLOUTON est inférieur ou égal à $\Delta(G)+1$, où $\Delta(G)$ est le plus grand degré d'un sommet de G.
b) En déduire que $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. Justifier votre réponse.
c) Soit V' un sous ensemble de V formant un stable de cardinal α. Démontrer que $\chi(G) \leq n - \alpha + 1$.
d) Proposer une méthode heuristique récurrente de coloration basée sur le point c).

*Rappel : un **stable** est un sous-ensemble de sommets du graphe tel que les éléments de ce sous-ensemble ne soient pas voisins.*

Exercice 1 (6 points):

On se propose de résoudre le cryptographe suivant :

```
   O U I
 + O U I
 _______
   N O N
```

Sachant que les lettres représentent des chiffres compris entre 0 et 9, que deux lettres différentes représentent deux chiffres différents, donner toutes les solutions avec O≠0 et N≠0 à l'aide d'une arborescence.

Conseil : écrire les équations déduites de l'opération de l'addition, déduire le domaine des retenus et séparer sur ces valeurs.

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 2I &= 10r_1 + N \\ 2U + r_1 &= 10r_2 + O \\ 2O + r_2 &= \cancel{10r_3} + N \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_3 = 0$$

$r_1, r_2 \in \{0, 1\}$

$\Rightarrow r_2 = 0$ car N est paire.

$r_3 = 0$

$r_1 = 0$: Impossible car $2I = N$, $2O = N$ $\Rightarrow I = O$!!

$r_1 = 1$; $4U + 2 = N$ $\Rightarrow U \in \{0, 1\}$

- $U = 0$: $O = 1$, $N = 2$, $I = 6$
- $U = 1$: $O = 3$, $N = 6$, $I = 8$

Verification :

$$\begin{array}{r} 106 \\ 106 \\ \hline 212 \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r} 318 \\ 318 \\ \hline 636 \end{array} \checkmark$$

Problème.

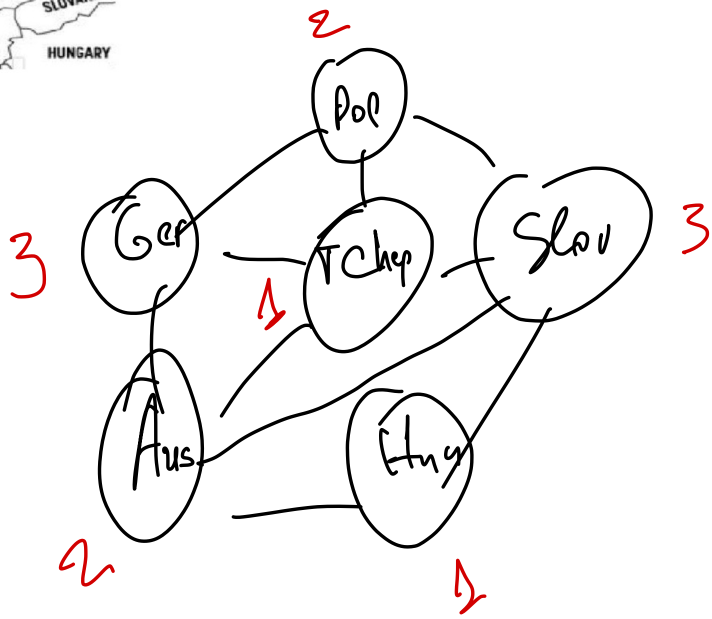
Dans la suite G = (V,E) désigne un graphe non orienté sans boucle. Nous notons *n* le nombre de sommets et *m* le nombre d'arêtes.

Définitions

- Une **k-coloration** d'un graphe G est un étiquetage f des sommets de G avec les couleurs 1,2, 3,...,k (c'est-à-dire, f : V→{1,...,k}), telle que deux sommets adjacents sont de couleurs distinctes.
- Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ est le nombre minimum k pour lequel G a une k-coloration.
- Une **coloration minimale** d'un graphe G est une $\chi(G)$-coloration.

Question 1. Modélisation (2 points)

Il est donné ci-dessous un morceau de carte. On souhaite colorier cette carte avec le moins de couleurs possibles de manière à ce que deux régions pays qui ont une frontière commune soient de couleurs différentes. Montrer comment modéliser ce problème de coloriage via un graphe ? Proposer sur ce dernier une coloration minimale.



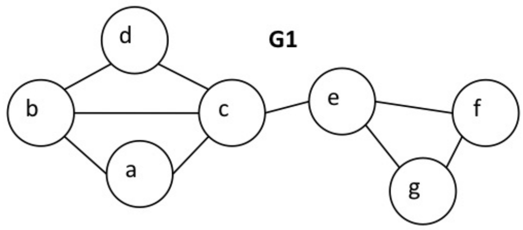
Question 2 : Algorithme GLOUTON (7 pts)

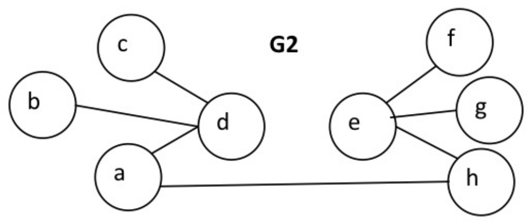
Le problème de la détermination d'une coloration minimale est NP-difficile. C'est pourquoi, on va se contenter d'une méthode heuristique : l'algorithme GLOUTON.

<u>Algorithme GLOUTON</u> {les couleurs sont ici représentées par les nombres 1, 2, 3, ...}

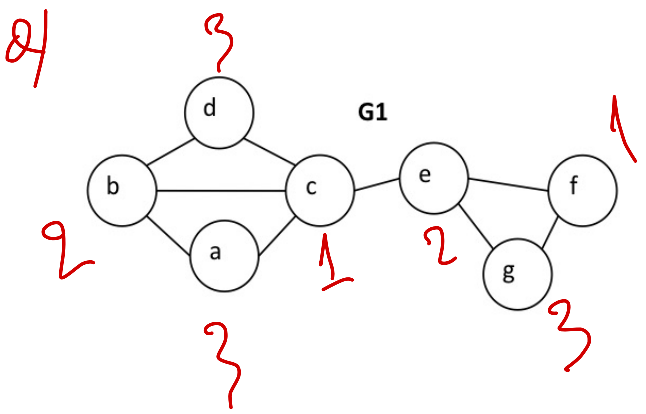
1. Lire le graphe.
2. Ordonner les sommets de G selon l'ordre décroissant des degrés.
3. Associer à G la coloration obtenue en colorant les sommets dans cet ordre : on affecte au sommet v_i la couleur de plus petit indice k non encore utilisée par ses sommets adjacents déjà colorés.

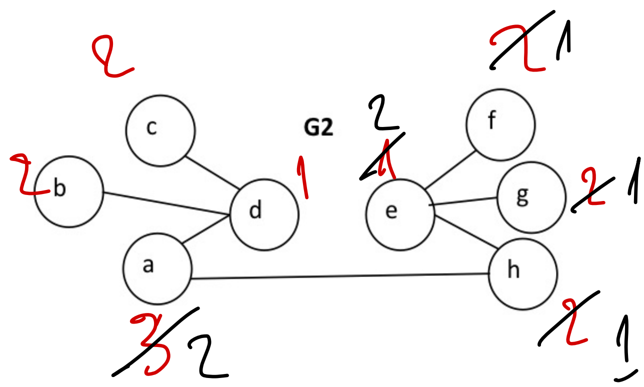
Rappel : Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs incidents en ce sommet.





a) Appliquer l'algorithme GLOUTON aux graphes G_1 et G_2.
b) GLOUTON est-il optimal pour G_1 ? pour G_2 ? Justifier.
c) GLOUTON est-il optimal pour tout graphe ? Est-ce surprenant ?
d) On se place dans le cas général et on suppose que le graphe G est représenté par la matrice associée. Quelle est alors la complexité de l'algorithme GLOUTON en fonction de n et/ou m ? Justifier pour chaque étape.
e) Proposer une meilleure structure de données. Quelle est alors la complexité résultante en fonction de n et/ou m ? Justifier.





b) L'algorithme est bien optimal pour G1 mais pas pour G2 qui peut se colorer en deux couleurs, (voir la coloration en noir sur G2).

c) Etant que le problème de coloration minimale est NP-complet, on ne peut pas attendre qu'un algorithme heuristique de comlexité polynomiale puisse trouver la solution optimale à chaque fois.

d)
phase 1) On^2,
phase 2 : Onlog(n) + O (n^2);
phase 3: O(n^2) donc O(n^2).
e) alpha/beta: phase 1) O(n+m),
phase 2 : Onlog(n);
phase 3: O(m); donc O(max (nlog(n),m))

Question 3 : Propriétés théoriques (5 pts)

a) Montrer rigoureusement que le nombre de couleurs utilisées par l'algorithme GLOUTON est inférieur ou égal à $\Delta(G)+1$, où $\Delta(G)$ est le plus grand degré d'un sommet de G.
b) En déduire que $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. Justifier votre réponse.
c) Soit V' un sous ensemble de V formant un stable de cardinal α. Démontrer que $\chi(G) \leq n - \alpha + 1$.
d) Proposer une méthode heuristique récurrente de coloration basée sur le point c).

*Rappel : un **stable** est un sous-ensemble de sommets du graphe tel que les éléments de ce sous-ensemble ne soient pas voisins.*

a) On note d'abord que l'algorithme garantit une coloration valide du graphe. Selon l'algorithme, à chaque iteration on examine les couleurs des sommets adjacents et on donne au sommet courant la plus petite couleur non utilisée. Etant qu'il y a au plus delta(G) sommets voisins, (au pire avec des couleurs différentes), la couleur donnée au sommet courant est dans l'ensemble (1, 2, ..., delta(G) +1). En effet il suffit de parcourir cet ensemble depuis k=1 et incrémenter jusqu'à ce que la couleur k (non utilisée) puisse être affectée au sommet courant v. On constate que cette valeur « k » ne pourra pas dépasser delta(v)+1 <= delta(G)+1. Ainsi à chaque itération on utilisera une des couleurs appartenant l'ensemble (1, 2, ..., delta(G)+1), ce qui démontre la propriété.

b) Immédiat : car l'heuristique donne une borne supérieure...

c) Si on donne à tous les sommets du stable la meme couleur et à tous les autres sommets des couleurs différentes, alors il est clair que la formule est vérifiée.

d) Il suffit d'appliquer de façon récurrente la procedure de chercher un stable, de donner la même couleur aux sommets du stable, et ensuite considerer le sous-graph obtenu par la suppression des noeuds et des arcs adjacents des sommets du stable. Continuer ensuite de la même façon avec le nouveau graph jusqu'à ce qu'on obtient un graphe vide. On obtiendra ainsi une borne supérieure du nombre chromatique égal au nombre d'iterations de l'algorithme ci-dessus: à chaque itération on donnera une nouvelle couleur.