RO03 – Médian – Printemps 2023

Polycopié, notes de cours et de Td correspondant à maximum 4 feuilles manuscrites recto-verso - sont permis. Aucun matériel informatique, y compris calculatrice ou traducteur électronique, n'est admis.
Durée : 90 minutes

Exercice. (6 points)
Résoudre le problème de décodage suivant :

$$\begin{array}{cccccc} & N & E & U & F \\ + & & & U & N \\ + & & & U & N \\ \hline & O & N & Z & E \end{array}$$

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que O et N ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Problème : Etude de l'algorithme GLOUTON

Soit S un ensemble fini et I une famille de sous-ensembles de S définie par une propriété donnée (des exemples de telles propriétés sont données dans les parties suivantes du sujet). On dit que I est une famille de sous-ensembles indépendants si les conditions (M0) et (M1) sont vérifiées :

(M_0) : l'ensemble vide est indépendant,
(M_1) : tous sous-ensemble d'un ensemble indépendant est indépendant.

On note c une valuation de S à valeurs entières positives ou nulles.
On se propose de calculer un ensemble indépendant de valeur maximale et on étudie pour cela l'algorithme GLOUTON. Cet algorithme permettra dans certains cas de calculer une solution optimale, dans les autres cas une solution heuristique.

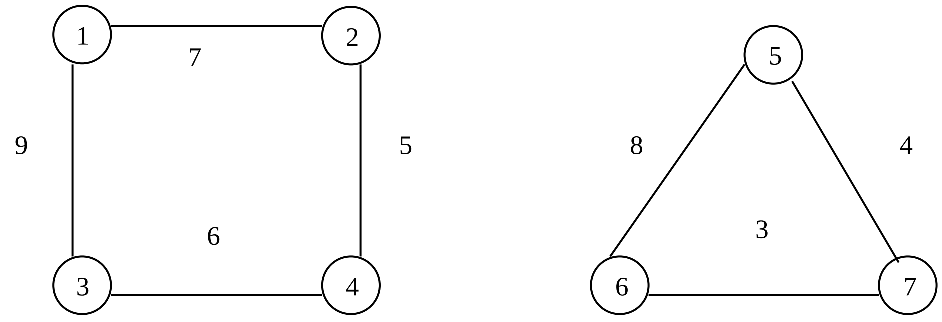
<u>Algorithme GLOUTON :</u>

Poser J = ϕ (ϕ est l'ensemble vide) ;
Classez les éléments de S en ordre de valeurs décroissantes :
S = { $e_1, e_2, e_3, \ldots e_N$ }, avec $c(e_1) \geq c(e_2) \geq c(e_3) \ldots \geq c(e_N)$.
Pour j =1 à N
  Remplacer J par $J \cup \{e_j\}$ si $J \cup \{e_j\}$ est indépendant.

PARTIE I : QUELQUES CAS PARTICULIERS (6 points)

A. Le problème de la forêt maximale

Soit G = (V, E, c) un graphe non orienté valué positivement. On pose S = E (ensemble des arêtes), et on dit que J est un ensemble indépendant si (V, J) est un graphe sans cycle.
a) Justifiez brièvement les conditions (M_0) et (M_1).
b) Appliquez l'algorithme GLOUTON au graphe G_1 ci-dessous, en rapportant la liste des arêtes choisies successivement par l'algorithme. Comptez le nombre d'arêtes choisies.



Graphe G_1

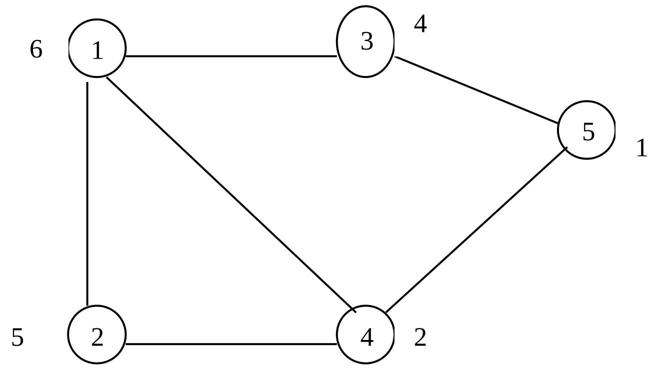
c) Calculez la forêt de valeur maximale pour G_1. Comparez à la solution précédente.

B. Le problème du stable de valeur maximale.

Soit G = (V, E) un graphe non orienté dont les sommets sont valués positivement par c. On pose S = V (ensemble des sommets), et on dit que J est un ensemble indépendant si c'est un stable du graphe G.

a) Justifiez brièvement les conditions (M_0) et (M_1).

b) Appliquez l'algorithme GLOUTON au graphe G_2 ci-dessous, en rapportant la liste des sommets choisis successivement par l'algorithme.



Graphe G_2

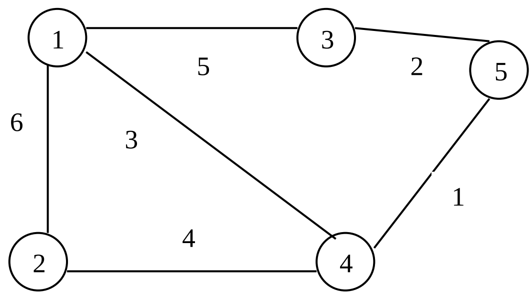
c) Calculez un stable de valeur maximale et comparez avec la solution calculée en b.

C. Le problème du couplage de valeur maximale

Soit G = (V, E, c) un graphe non orienté valué positivement. On pose S = E (ensemble des arêtes), et on dit que J est un ensemble indépendant s'il forme un couplage de G.

a) Justifiez brièvement les conditions (M_0) et (M_1).

b) Appliquez l'algorithme GLOUTON au graphe G_3 ci-dessous, en rapportant la liste des arêtes choisies successivement par l'algorithme.



Graphe G_3

c) Calculez un couplage de valeur maximale pour G_3. Comparez à la solution calculée en b.

PARTIE II : ETUDE DE LA COMPLEXITE DE L'ALGORITHME GLOUTON ET EXTENTION (8 points)

On suppose que S est un ensemble de N éléments, et que c est codé à l'aide d'un tableau. On suppose en outre qu'une procédure permet de tester en O(f(N)), si un sous-ensemble J de S est indépendant (N=n ou N=m selon les exemples, où n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes d'un graphe).

a) Quelle est la complexité de l'algorithme GLOUTON en fonction de N et de f(N) ? Justifiez votre réponse.
b) Décrivez brièvement un algorithme de test de l'ensemble indépendant pour le problème du stable de valeur maximale. Evaluez la complexité de l'algorithme GLOUTON en fonction de n, si le graphe est codé par la matrice associée ?
c) Décrivez brièvement un algorithme de test de l'ensemble indépendant pour le problème du couplage de valeur maximale. Proposez la meilleure méthode de codage pour ce type de problème (elle peut être différente de la matrice A ou des files α,β), et déduire la complexité de l'algorithme GLOUTON en fonction de n et de m ?
d) En supposant qu'une méthode pour tester si un graphe a un cycle coûte O(n), quelle est la complexité de l'algorithme GLOUTON en fonction de n et de m, pour le problème de la forêt maximale ?
e) Soit G = (V, E, c) un graphe orienté valué positivement par la fonction coût c. Proposez une heuristique pour le problème de l'arbre couvrant de coût minimum utilisant l'algorithme GLOUTON. En supposant qu'une méthode pour tester si un graphe a un cycle coûte O(n), quelle serait sa complexité en fonction de n et de m ? Justifier.