SY01 - Éléments de probabilités

Chapitre 4 - Variables aléatoires vectorielles

Équipe de mathématiques appliquées

UTC

Automne 2010

Chapitre V

Variables aléatoires vectorielles

V.1 Couple de variables aléatoires discrètess

V.1.1 Exemple

Pour un échantillon de 1000 naissances on a obtenu des résultats concernant le problème des naissances prématurées. On note X le nombre de mois entiers écoulés entre la conception et la naissance d'un enfant et Y le poids de l'enfant à la naissance (en arrondissant au kg inférieur). Les résultats sont résumés en pourcentage dans le tableau qui suit.

$Y \setminus X$	6	7	8	9
1	8	2	0	0
2	2	5	10	3
3	0	5	25	10
4	0	0	10	20

Le tableau ci-dessus résume les informations de nature "statistique" concernant une naissance prématurée de la façon suivante : $P(X = 7; Y = 3) = 0,05$, $P(X = 8; Y = 4) = 0,1$, etc.

L'observation de ce tableau permet de voir que la simple connaissance des lois de X et Y ne suffit pas à "reconstruire" toute l'information contenue dans le tableau. Il s'avère donc nécessaire d'étudier le couple (X, Y) dans sa globalité.

V.1.2 Loi du couple

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Nous n'avons manipulé jusqu'à présent que des v.a.r. Considérons maintenant X et Y deux v.a.r. discrètes à valeurs dans E_X et E_Y et intéressons-nous au couple (X, Y).

Définition V.1.1. *On appelle loi de probabilité conjointe de (X, Y) l'application $p_{X,Y}$ de $E_X \times E_Y$ dans $[0, 1]$ définie par :*

$$\forall (x, y) \in E_X \times E_Y, \qquad p_{X,Y}(x, y) = P(X = x\ ;\ Y = y).$$

Les probabilités p_X et p_Y, définies pour $(x, y) \in E_X \times E_Y$ par :

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in E_Y} p_{X,Y}(x, y)$$

et

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in E_X} p_{X,Y}(x, y),$$

sont appelées lois marginales de X et Y.

L'application $F_{X,Y}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x\ ;\ Y \leq y)$$

est appelée fonction de répartition de (X, Y).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarque V.1.1. *L'application* $p_{X,Y}$ *satisfait :*

(i) $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$ *pour tout* $(x,y) \in E_X \times E_Y$ *;*

(ii) $\sum_{(x,y)\in E_X\times E_Y} p_{X,Y}(x,y) = 1$ *;*

(iii) Si X *et* Y *sont indépendantes alors* $p_{X,Y} = p_X p_Y$ *et* $F_{X,Y} = F_X F_Y$*.*

V.1.3 Tableau de contingence

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Lorsque E_X et E_Y sont finis, il est possible de résumer les informations sur le couple (X, Y) dans un tableau. Supposons que $E_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $E_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Notons $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$, $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P(X = x_i)$ et $p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P(Y = y_j)$.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	$P(X = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}	$p_{2\bullet}$
$\vdots$			$\ldots$		$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nm}	$p_{n\bullet}$
$P(Y = y_j)$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\ldots$	$p_{\bullet m}$	1

où $1 = p_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$. Comme on peut le voir sur le tableau les lois marginales de X et Y apparaissent respectivement dans la dernière colonne et la dernière ligne du tableau.

Remarque V.1.2. *Un tableau comme celui-ci est appelé tableau à double-entrée, ou encore, tableau de contingence.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1.4 Espérance

Exercices :
Exercice A.1.5

Proposition V.1.1. *Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de v.a.r. Alors $Z = f(X, Y)$ est une v.a.r. discrète à valeurs dans $E_Z = \{f(x, y); (x, y) \in E_X \times E_Y\}$ et de loi p_Z définie par :*

$$\forall z \in E_Z, \quad p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)\in E_X \times E_Y ; z=f(x,y)\}} p_{X,Y}(x, y).$$

De plus on a :

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \sum_{\{(x,y)\in E_X \times E_Y\}} f(x, y)p_{X,Y}(x, y).$$

Démonstration. On suppose X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$Z = f(X, Y) \in \{z = f(x, y); (x, y) \in E_X \times E_Y\} = E_Z.$$

Soit $z \in E_Z$,

$$\{Z = z\} = \bigcup_{\{(x,y)\in E_X \times E_Y ; f(x,y)=z\}} \{X = x; Y = y\} \in \mathcal{F}, \tag{V.1.1}$$

car il s'agit d'une réunion dénombrable d'événements de $\mathcal{F}$. Donc Z est une v.a.r. discrète, de plus d'après (V.1.1) on a :

$$P(Z = z) = \sum_{\{(x,y)\in E_X \times E_Y ; f(x,y)=z\}} p_{X,Y}(x, y).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in E_Z} zP(Z=z) \\
&= \sum_{z\in E_Z} \sum_{\{(x,y)\in E_X\times E_Y ; f(x,y)=z\}} f(x,y)p_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{\{(x,y)\in E_X\times E_Y\}} f(x,y)p_{X,Y}(x,y).
\end{aligned}$$

Remarque V.1.3. *Si* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^p$ *avec* $f(x,y)=(f_1(x,y),\ldots,f_p(x,y))$ *alors on notera* $\mathbb{E}(f(X,Y))$ *la quantité* $(\mathbb{E}(f_1(X,Y)),\ldots,\mathbb{E}(f_p(X,Y)))$.

V.1.5 Corrélation

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

Définition V.1.2. *Soient X et Y deux v.a.r. du second ordre (admettant des moments d'ordre 2). On appelle covariance de X et Y la quantité définie par :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])].$$

On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel $\rho_{X,Y}$ défini par :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Proposition V.1.2. *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes.*

(i) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ *;*

(ii) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ *;*

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$ *;*

(iv) $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) = a\mathrm{Cov}(X,Z) + b\mathrm{Cov}(Y,Z)$ *pour tout* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *;*

(v) Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, mais la réciproque est fausse en général ;

(vi) $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ *;*

(vii) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2 Variables aléatoires vectorielles

V.2.1 Vecteur aléatoire

Exercices :
Exercice A.1.9

On considère $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) muni de la base canonique. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $\boldsymbol{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application. Si les composantes $(X_1, \ldots, X_d)$ de $\boldsymbol{X}$ sont des v.a.r. alors $\boldsymbol{X}$ est appelée v.a.r. vectorielle ou vecteur aléatoire réel.

Toutes les notions que nous avons vues jusqu'ici se généralisent aux vecteurs aléatoires. Bien sûr, le passage du cas unidimensionnel au cas multidimensionnel crée un peu de complexité du point de vue de l'analyse. À ce niveau, le cours de MT22 est prérequis.

Définition V.2.1. *On appelle $P_{\boldsymbol{X}}$ la loi image de P par $\boldsymbol{X}$. Elle est définie par :*

$$P_{\boldsymbol{X}}(B) = P(\boldsymbol{X} \in B) = P(\{\omega \in \Omega\, ;\ \boldsymbol{X}(\omega) \in B\}),$$

pour tout sous-ensemble B de $\mathbb{R}^d$ (en fait, pour tout borélien de $\mathbb{R}^d$).

S'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout sous-ensemble B de $\mathbb{R}^d$ on ait :

$$P_{\boldsymbol{X}}(B) = \int_B f(x_1, \ldots, x_d)dx_1 \ldots dx_d, \tag{V.2.1}$$

alors le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ est dit à densité.

Remarque V.2.1. *Bien que peu pratique pour expliciter une densité la relation (V.2.1) nous dit comment calculer $P(X \in B)$ lorsque f est connue.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.2 Fonction de répartition

Exercices :
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Définition V.2.2. *Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur aléatoire, on appelle f.d.r. de $\boldsymbol{X}$ la fonction $F_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ définie par :*

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P_{\boldsymbol{X}}\left(\prod_{i=1}^{d}]\infty, x_i]\right) = P(X_1 \leq x_1; \ldots; X_d \leq x_d),$$

pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Proposition V.2.1.

(i) La f.d.r. $F_{\boldsymbol{X}}$ d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ satisfait les propriétés suivantes :

(a) $F_{\boldsymbol{X}}$ est croissante par rapport à chacun de ses arguments ;

(b) $F_{\boldsymbol{X}}$ est continue à droite par rapport à chacun de ses arguments ;

(c) $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \to 0$ lorsque $\max_{1\leq i\leq d} x_i \to -\infty$ et $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \to 1$ lorsque $\min_{1\leq i\leq d} x_i \to +\infty$;

(d) Si on note pour $1 \leq i \leq d$ et $a_i < b_i$, $\Delta_{a_i b_i} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) =$

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_d) - F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

alors

$$\Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} \ldots \Delta_{a_d b_d} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \geq 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(ii) *Réciproquement, toute fonction* $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ *qui satisfait les conditions ci-dessus est la f.d.r. d'un vecteur aléatoire de dimension* d.

Remarque V.2.2. *Pour* $d = 1$ *de la condition (a) résulte la condition (d) ; ce qui est faux pour* $d > 1$. *La condition (d) est une condition dite de compatibilité. Elle correspond au fait que l'on doit toujours avoir :*

$$P(X_1 \in [a_1, b_1], \ldots, X_d \in [a_d, b_d]) \geq 0.$$

Définition V.2.3. *Les fonctions* F_i *(*$1 \leq i \leq d$*) définies par*

$$F_i(x) = F(+\infty, \ldots, +\infty, x, +\infty, \ldots, +\infty),$$

où x *est le i-ème argument de* F*, sont appelées f.d.r. marginales de* $\boldsymbol{X}$ *; elles sont les f.d.r. des* X_i.

V.2.3 Densité

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

Proposition V.2.2. *Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur aléatoire de f.d.r. $F_{\boldsymbol{X}}$.*

(i) S'il existe $f_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(y_1, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_d,$$

alors f est la densité de $\boldsymbol{X}$.

(ii) Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$, positive, telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y_1, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_d = 1,$$

est la densité d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$.

Remarque V.2.3. *La densité (lorsqu'elle existe) et la f.d.r. d'un vecteur aléatoire sont liées par les relations :*

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

et

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d F_{\boldsymbol{X}}}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x_1, \dots, x_d),$$

en tout point de continuité $(x_1, \dots, x_d)$ de f.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition V.2.4. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un vecteur aléatoire de densité* $f_{\boldsymbol{X}}$*. Alors, pour* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f_i(x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_{\boldsymbol{X}}(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots, y_d) dy_1 \ldots dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots \ldots dy_d,$$

est la densité marginale de X_i*.*

Remarque V.2.4. *Il est clair que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(y) dy$*.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.4 Espérance et matrice de covariance

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Définition V.2.5. *Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. L'espérance de $\boldsymbol{X}$, lorsqu'elle existe, est un point de $\mathbb{R}^d$ défini par :*

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_d))'.$$

Si $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = 0$, $\boldsymbol{X}$ est dit centré. On appelle matrice de variance-covariance (ou de covariance) de $\boldsymbol{X}$, la matrice $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ qui lorsqu'elle existe est définie par :

$$(\Sigma_{\boldsymbol{X}})_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \quad \textit{pour} \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Remarque V.2.5. *En fait on peut utiliser des notations vectorielles pour définir $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$:*

$$\Sigma_{\boldsymbol{X}} = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}') - \mathbb{E}(\boldsymbol{X})\mathbb{E}(\boldsymbol{X})'.$$

Proposition V.2.3.

(i) $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ est symétrique et positive ;

(ii) Si les composantes de $\boldsymbol{X}$ sont indépendantes alors la matrice $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ est diagonale.

Démonstration. (i) D'après la remarque V.2.5 il est facile de voir que :

$$\boldsymbol{x}'\Sigma_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{x} = \mathbb{E}((\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{X} - \mathbb{E}(\boldsymbol{X})))^2) \geq 0.$$

(ii) D'autre part si $i \neq j$ et X_i et X_j sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ donc $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ est diagonale.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.3 Transformation d'un vecteur aléatoire

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.3.1 Transformation réelle

Exercices :
Exercice A.1.16
Exercice A.1.17
Exercice A.1.18

Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur aléatoire défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de densité f. Soit g une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = g \circ X$ soit une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par :

$$Y(\omega) = g(X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)).$$

Proposition V.3.1. *La f.d.r. de Y est définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \int_B f(x_1, \dots, x_d) dx_1, \dots dx_d,$$

où

$$B = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d ; g(x_1, \dots, x_d) \leq y\}.$$

L'espérance de Y est donnée par :

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) f(x_1, \dots, x_d) dx_1, \dots dx_d.$$

Exemple V.3.1. *Si X et Y sont indépendantes de densités respectives f_X et f_Y, alors $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$. Soit $Z = X + Y$ et $z \in \mathbb{R}$ alors :*

$$F_Z(z) = \int\int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x+y \leq z\}} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy$$

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx.
\end{aligned}
$$

Résultat que nous avions déjà obtenu au chapitre 3.

V.3.2 Transformation vectorielle

Exercices :
Exercice A.1.19

Soient E et F deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans E (c'est-à-dire $P(\boldsymbol{X} \in E) = 1$) et g un C^1-difféomorphisme[1] de E sur F. Alors

$$\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} g_1(X_1, \ldots, X_d) \\ \vdots \\ g_d(X_1, \ldots, X_d) \end{pmatrix}$$

est un vecteur aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans F.

Proposition V.3.2. *La densité $f_{\boldsymbol{Y}}$ du vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y}$ est donnée par :*

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1, \ldots, y_d) = f_{\boldsymbol{X}} \circ g^{-1}(y_1, \ldots, y_d) |DJ_{g^{-1}(y_1, \ldots, y_d)}| 1_F(y_1, \ldots, y_d),$$

où $DJ_{g^{-1}}$ (resp. DJ_g) est le jacobien de l'application g^{-1} (resp. g) et nous avons $DJ_{g^{-1}} = (DJ_g)^{-1}$ avec :

$$DJ_g = \text{dét} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

[1] il s'agit d'une fonction C^1 telle que g^{-1} existe et est aussi C^1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple V.3.2. *Soit* (X, Y) *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *de densité* f. *Soit* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $g_1(x, y) = ax+by$ *et* $g_2(x, y) = cx+dy$ *où* $ad-bc \neq 0$. *Alors* g *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et la densité* h *de* $(U, V) = g(X, Y)$ *est donnée par :*

$$h(u, v) = \frac{1}{|ad-bc|} f\left(\frac{du-bv}{ad-bc}, \frac{-bu+av}{ad-bc}\right), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour $a = b = c = -d = 1$ *on a :* $h(u, v) = 1/2 f((u+v)/2, (u-v)/2)$. *La densité marginale de* $U = X+Y$ *est donc* $h_U(u) = \int_{\mathbb{R}} h(u, v)dv = \int_{\mathbb{R}} f(y, u-y)dy$. *Si* X *et* Y *sont indépendantes alors on obtient :*

$$h_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(u-y)dy = f_X * f_Y(u),$$

qui est un résultat que nous avions déjà obtenu.

V.4 Vecteur aléatoire Gaussien

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.4.1 Vecteur Gaussien

Exercices :
Exercice A.1.20
Exercice A.1.21

Définition V.4.1. *Un vecteur aléatoire* $\boldsymbol{X}$ *est dit gaussien si pour tout* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ *fixé,* $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^d a_i X_i$ *est une v.a.r. gaussienne.*

Proposition V.4.1. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*

(i) chacune des composantes de $\boldsymbol{X}$ *est gaussienne ;*

(ii) si $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *est une application affine* ($u(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$) *alors* $u \circ \boldsymbol{X}$ *est gaussien et si* $\boldsymbol{Y} = u \circ \boldsymbol{X} = B\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$ *alors* $\Sigma_{\boldsymbol{Y}} = B\Sigma_{\boldsymbol{X}}B'$*.*

Preuve. (i) Prendre $\boldsymbol{a} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où 1 est la i-ème composante de $\boldsymbol{a}$ puis appliquer la définition.
(ii) $Y_i = \underline{B}_i\boldsymbol{X} + b_i$ où $\underline{B}_i$ est la i-ème ligne de la matrice B. On a alors :

$$(\Sigma_{\boldsymbol{Y}})_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}[Y_iY_j] - \mathbb{E}[Y_i]\mathbb{E}[Y_j]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^d B_{ik}X_k + b_i\right)\left(\sum_{l=1}^d B_{jl}X_l + b_j\right)\right]$$

$$-\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^d B_{ik}X_k + b_i\right)\right]\mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=1}^d B_{jl}X_l + b_j\right)\right]$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$= \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} B_{ik}B_{jl}\mathbb{E}[X_kX_l] + b_i\sum_{k=1}^{d} B_{jk}\mathbb{E}[X_k] + b_j\sum_{l=1}^{d} B_{il}\mathbb{E}[X_l] + b_ib_j,$$

d'où :

$$\mathbb{E}[Y_iY_j] - \mathbb{E}[Y_i]\mathbb{E}[Y_j] = \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} B_{ik}B_{jl}\mathrm{Cov}(X_k, X_l)$$

$$= \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} B_{ik}B_{jl}(\Sigma_{\boldsymbol{X}})_{kl} = \underline{B}_i\Sigma_{\boldsymbol{X}}\underline{B}_j'.$$

Notation. Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et variance-covariance Σ, alors on note $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Proposition V.4.2.

(i) *Si $X_1, \ldots, X_d$ sont des variables aléatoires indépendantes alors $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ est gaussien ;*

(ii) *Si $\boldsymbol{X}$ est un vecteur aléatoire gaussien, de variance-covariance diagonale, alors les composantes de $\boldsymbol{X}$ sont indépendantes ;*

(iii) *Si $\boldsymbol{X}$ est un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de variance-covariance Σ, pour que $\boldsymbol{X}$ admette une densité il faut et il suffit que Σ soit inversible. Alors on a :*

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{(2\pi\text{dét}(\Sigma))^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\,\Sigma^{-1}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right),$$

pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.5 Indépendance

V.5.1 Indépendance

Soient X et Y deux v.a.r. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nous avons vu dans le chapitre 1 que deux événements A_1 et A_2 sont indépendants si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Cette notion “se transporte” sur X et Y en définissant leur indépendance de la manière suivante : X et Y sont indépendantes si $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ les événements $\{X \in B_1\}$ et $\{Y \in B_2\}$ sont indépendants ; bien entendu, cette définition est équivalente à : $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ P(X \in B_1; Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$.

D’un point de vue pratique, l’indépendance de X et Y signifie que la réalisation de l’une des deux v.a.r. ne contraint pas la réalisation de l’autre.

Exemple V.5.1. *On lance deux dés honnêtes. Soient X et Z les résultats obtenus. On note $Y = 6 - X$, alors il est facile de voir que :*

$$\begin{cases} P(X = 3; Y = 3) = P(X = 3) = 1/6, \\ P(X = 3)P(Y = 3) = 1/36. \end{cases}$$

Par conséquent X et Y sont dépendantes, ce qui est par ailleurs évident ! En revanche il est clair que X et Z sont indépendantes.

Définition V.5.1. *Soient $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ces v.a.r. sont dites indépendantes si pour tout $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{B}$ on a :*

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_d \in A_d) = \prod_{i=1}^{d} P(X_i \in A_i).$$

V.5.2 Indépendance pratique

Proposition V.5.1.

(i) *Soient* $X_1, \ldots, X_d$ d *v.a.r. discrètes à valeurs dans* $E_1, \ldots, E_d$, *de lois marginales* $p_1, \ldots, p_d$ *et de loi conjointe* p. *Les v.a.r.* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes si et seulement si :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_d) \in E_1 \times \ldots \times E_d, \quad p(x_1, \ldots, x_d) = p_1(x_1) \times \ldots \times p_d(x_d).$$

(ii) *Soient* $X_1, \ldots, X_d$ d *v.a.r. de densités* $f_1, \ldots, f_d$. *Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si leur densité conjointe* f *est égale à :* $f_1 \times \ldots \times f_d$ *(idem pour la f.d.r.).*

(iii) *Soient* $X_1, \ldots, X_d$ d *v.a.r. de densité conjointe* f. *Si* f *est à variables séparées, c'est-à-dire si*

$$\forall (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad f(x_1, \ldots, x_d) = h_1(x_1) \times \ldots \times h_d(x_d),$$

alors ces v.a.r. sont indépendantes et f_i, *la densité marginale de* X_i, *est égale à* $(\int_{\mathbb{R}} h_i(x)dx)^{-1} h_i$.

Proposition V.5.2. *Les v.a.r.* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes si et seulement si pour toutes les fonctions réelles* h_i *pour lesquelles les quantités ci-dessous existent on a :*

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \times \ldots \times h_d(X_d)] = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{E}[h_i(X_i)].$$

Remarque V.5.1. *Pour des fonctions* h_i *définies par* $h_i(x) = 1_{]-\infty, x_i]}(x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$, *on retrouve les f.d.r.*

Proposition V.5.3. *L'indépendance des v.a.r.* $X_1, \ldots, X_n$ *entraîne l'indépendance*

(i) *de toute sous-suite* $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ *avec* $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq d$;

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(ii) *de toute suite de vecteurs aléatoires* $(X_1, \dots, X_{n_1})$, $(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2})$, ...,$(X_{n_k+1}, \dots, X_n)$ *avec* $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ *et* $1 \leq k \leq n$ *;*

(iii) *de toute suite de fonctions* $f_1(X_1, \dots, X_{n_1})$, ..., $f_k(X_{n_k+1}, \dots, X_n)$.

Définition V.5.2. *Dans une suite infinie de v.a.r.* $X_1, X_2, \dots$, *les v.a.r. sont dites indépendantes si tout sous-ensemble fini de v.a.r. est constitué de v.a.r. indépendantes.*

V.6 Loi de probabilité conditionnelle

V.6.1 v.a. discrète

Exercices :
Exercice A.1.22
Exercice A.1.23

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans E_X et E_Y. Pour tout $x \in E_X$ tel que $P(X = x) > 0$, la fonction $p_x : E_Y \to [0, 1]$ définie par $p_x(y) = P(Y = y|X = x)$ définit une loi de probabilité sur E_Y. En effet, on a :

(i) $\forall y \in E_Y, \quad p_x(y) \geq 0$,

(ii) $\sum_{y \in E_Y} P(Y = y|X = x) = 1$.

Notons $E_X^* = \{x \in E_X; p_X(x) > 0\}$.

Définition V.6.1.

– *La famille des lois de probabilité $(p_x; x \in E_X^*)$ est appelée famille des lois conditionnelles de Y sachant X.*

– *L'espérance conditionnelle de Y en $\{X = x\}$ ($x \in E_X^*$) est définie par*

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \sum_{y \in E_Y} yP(Y = y|X = x) = \sum_{y \in E_Y} yp_x(y).$$

– *La variance conditionnelle de Y en $\{X = x\}$ est définie par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y|X = x) &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X = x])^2|X = x] \\ &= \sum_{y \in E_Y} y^2 p_x(y) - (\mathbb{E}[Y|X = x])^2.\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarque V.6.1. *Ces définitions sont symétriques en X et Y.*

Définition V.6.2. *L'espérance conditionnelle de Y sachant X est une v.a.r., notée $\mathbb{E}[Y|X]$, à valeurs dans $E_{Y|X} = \{\mathbb{E}[Y|X = x]; x \in E_X\}$.*

Remarque V.6.2. *La définition ci-dessus nous permet d'écrire $\mathbb{E}[Y|X] = g(X)$ où g est définie par $g(x) = \mathbb{E}[Y|X = x]$ pour tout $x \in E_X$.*

V.6.2 v.a.r. à densité

Exercices :
Exercice A.1.24
Exercice A.1.25

Dû au fait que lorsque X est une v.a.r. à densité on a $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le raisonnement précédent ne peut plus s'appliquer pour des v.a.r. continues. Faisons tout de même le raisonnement suivant. Soit $h > 0$, alors

$$P(Y \leq y | X \in [x, x+h]) = \frac{P(Y \leq y; x \leq X \leq x+h)}{P(x \leq X \leq x+h)}$$

$$= \frac{\left(\int_{-\infty}^{y} \int_{x}^{x+h} f(u,v)dudv\right)/h}{(F(x+h) - F(x))/h}.$$

En supposant la densité de X strictement positive en x et en faisant décroître h vers 0 on obtient la f.d.r. de Y conditionnelle à $\{X = x\}$ que l'on note $F_{Y|X}(\cdot|x)$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv.$$

Ce qui nous permet de définir la densité conditionnelle de Y en $\{X = x\}$.

Définition V.6.3. *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité conjointe f. On note f_X la densité marginale de X définie par :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,v)dv.$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $f_X(x) > 0$, *on appelle densité conditionnelle de* Y *sachant* $\{X = x\}$, *la fonction* $f_{Y|X}(\cdot|x)$ *définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,v)dv}.$$

– *On définit l'espérance et la variance conditionnelle de* Y *sachant* $\{X = x\}$, *notées respectivement* $\mathbb{E}[Y|X = x]$ *et* $\mathbf{Var}(Y|X = x)$, *par :*

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x)dy$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(Y|X = x) &= \int_{\mathbb{R}} (y - \mathbb{E}[Y|X = x])^2 f_{Y|X}(y|x)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} y^2 f_{Y|X}(y|x)dy - (\mathbb{E}[Y|X = x])^2.\end{aligned}$$

Remarque V.6.3. *La définition V.6.2 reste valable dans ce paragraphe.*

Exemple V.6.1. *Soit* (X, Y) *le vecteur aléatoire de loi uniforme sur le disque unité* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. *Alors*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} 1_D(x,y).$$

Nous avons donc

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,u)du = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}1_{]-1,1[}(x)$$

et

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} 1_D(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On calcule alors facilement :

$$\mathbb{E}[Y|X=x] \equiv \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x)dy = 1_{]-1,1[}(x)[y^2/2]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

et

$$\mathbf{Var}[Y|X=x] \equiv \int_{\mathbb{R}} (y-\mathbb{E}[Y|X=x])^2 f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_{Y|X}(y|x)dy$$

$$= 1_{]-1,1[}(x)[y^3/3]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} 1_{]-1,1[}(x).$$

V.6.3 Compléments sur l'espérance conditionnelle

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27
Exercice A.1.28

Soient X et Y deux v.a.r. conjointes telles que Y admet un moment d'ordre 1.

Proposition V.6.1. *L'espérance conditionnelle* $\mathbb{E}[Y|X]$ *est presque sûrement (p.s.) l'unique v.a.r.* $g(X)$ *(où* g *est une application borélienne bornée) satisfaisant :*

$$\mathbb{E}[h(X)g(X)] = \mathbb{E}[h(X)Y],$$

pour toute application borélienne bornée h.

Proposition V.6.2 (espérance totale). $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$.

Proposition V.6.3.

(i) *Pour tous* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n a_i Y_i|X] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[Y_i|X]$.

(ii) *Si* $Y \geq 0$ *p.s. alors* $\mathbb{E}[Y|X] \geq 0$ *p.s. et si* $Y_1 \leq Y_2$ *p.s. alors* $\mathbb{E}[Y_1|X] \leq \mathbb{E}[Y_2|X]$ *p.s.*

(iii) *Si* X *et* Y *sont indépendantes alors* $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$.

(iv) *Si* Y *et* $h(X)Y$ *admettent des espérances finies :* $\mathbb{E}[h(X)Y|X] = h(X)\mathbb{E}[Y|X]$ *p.s.*

Proposition V.6.4 (Lemme de Wald). *Soit* $(X_1, X_2, \ldots)$ *une suite de v.a.r. i.i.d. et* N *une v.a.r. à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, indépendante de la suite* $(X_1, X_2, \ldots)$*. Soit* $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ *alors*

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$

Preuve. $\mathbb{E}[S_N|N = n] = n\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N|N]] = \mathbb{E}[N\mathbb{E}[X_1]] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Exercice A.1.1

Dans l'exemple de la page 4 :

a- donner E_X et E_Y.

b- calculer les lois marginales p_X et p_Y.

c- a-t-on $p_{X,Y} = p_X p_Y$? Que peut-on en déduire ?

Solution

Exercice A.1.2

Vérifier les résultats de la remarque 5.1.1.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3

Faire le tableau correspondant à l'exemple de la page 4. En déduire $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Solution

Exercice A.1.4

Quelle propriété du tableau caractérise l'indépendance de deux v.a.r. X et Y ?

Solution

Exercice A.1.5

Dans l'exemple de la page 4, calculer $\mathbb{E}(XY)$; puis $\mathbb{E}[(X+Y)^2]$ de deux manières différentes.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6

Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho_{X,Y}$ dans l'exemple de la page 4.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7

Démontrer la proposition 5.1.2 (utiliser l'inégalité de Cauchy-Scharwz pour le (vi)).

Solution

Exercice A.1.8

Soient X et Y deux v.a. telles que $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$ et $Y = 1_{\{0\}}(X)$. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{\pi} 1_D(x, y) \quad \text{où} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a- $D^+ = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \cap D$, calculer $P((X, Y) \in D^+)$.

b- $C = [0, 1] \times [0, 1]$, calculer $P((X, Y) \in C)$.

c- T étant l'intérieur du triangle de sommets $(0, 1)$, $(0, -1)$ et $(1, 0)$, calculer $P((X, Y) \in T)$.

d- Comment expliquer le $1/\pi$ dans la définition de f ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10

Soient X et Y i.i.d. de loi $U(0,1)$.

a- Donner $F_{X,Y}$.

b- Donner $f_{X,Y}$

c- Comment interpréter la loi du couple (X,Y).

d- Calculer $P((X,Y) \in D)$ où D est le disque de centre O et de rayon 1.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11

Soient X et Y i.i.d. de loi $U(0,1)$. Notons $(U,V) = (\min(X,Y), \max(X,Y))$.

a- Donner l'ensemble des valeurs prises par (U,V).

b- Calculer les f.d.r. marginales de U et V.

c- Pourquoi n'a-t-on pas $F_{U,V} = F_U F_V$?

d- U et V sont-elles indépendantes ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12

Vérifier la remarque V.2.2 pour $d = 2$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13

Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 1 - x\}$, montrer que F définie par $F(x, y) = 1_T(x, y)$ n'est pas une fonction de répartition.

Solution

Exercice A.1.14

Calculer la matrice de variance-covariance dans l'exemple de la page 4.

Exercice A.1.15

Calculer la matrice de variance-covariance de (X, Y) et (U, V) de l'exo 11.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16

On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

a- Montrer que $F_{X_1,\ldots,X_n} = F_{X_1} \ldots F_{X_n}$;

b- Si de plus ces variables aléatoires admettent des densités $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$, montrer que $f_{X_1,\ldots,X_n} = f_{X_1} \ldots f_{X_n}$;

c- Montrer que si les conditions du b. sont remplies alors :

$$\mathbb{E}(X_1 \ldots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \ldots \mathbb{E}(X_n).$$

Exercice A.1.17

Soit (X, Y) un couple v.a.r. de densité f définie par :

$$f(x, y) = 21_{[0,1]}(x)1_{[0,x]}(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a- Dans quel ensemble (X, Y) prend ses valeurs ?

b- Calculer $\mathbb{E}(XY)$ puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Solution

Exercice A.1.18

Soient X, Y et Z i.i.d. de loi $U(0,1)$. Calculer $P(X \geq YZ)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19

Soit (U, V, W) le vecteur aléatoire de densité f définie par :

$$f(u, v, w) = \exp(-u) 1_F(u, v, w),$$

où $F = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 ; 0 < w < v < u\}$. Montrer que $(U - V, V - W, W)$ est un triplet de v.a.r. i.i.d. de loi $E(1)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire où $X_1, \ldots, X_d$ sont i.i.d. de loi $N(\mu, \sigma^2)$. Montrer que $f_{\boldsymbol{X}}$ la densité de $\boldsymbol{X}$ s'écrit :

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21

Soient X et ε deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim N(0,1)$ et ε satisfait $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$. Soit $Y = \varepsilon X$, montrer que :

a- $Y \sim N(0,1)$;

b- $\text{Cov}(X,Y) = 0$;

c- $P(X+Y=0) = 1/2$.

En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22

Dans l'exemple de la page 4 donner :

a- les lois conditionnelles de X sachant Y et de Y sachant X.

b- $\mathbb{E}[Y|X=8]$ et $\mathrm{Var}[Y|X=8]$.

Exercice A.1.23

Soient X et Y i.i.d. de loi $P(1/2)$ et $Z = X + Y$. Montrer que la loi de X sachant $Z = k$ ($k > 0$) est une $B(k, 1/2)$.

Solution

Exercice A.1.24

Montrer que si X et Y est un couple de v.a.r. de densité conjointe $f_{X,Y}$ alors :

a- X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $f_{X|Y} = f_X$;

b- $f_{X|Y} = f_{Y|X} f_X / f_Y$;

c- à quoi fait penser cette dernière relation ?

Solution

Exercice A.1.25

Soit (X, Y) un couple v.a.r. de densité f définie par :

$$f(x, y) = 2 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,x]}(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a- Calculer $f_{X|Y}$ et $f_{Y|X}$.

b- Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

c- Calculer $\mathbb{E}(Y|X = x)$ et $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26

Donner la loi de $\mathbb{E}(Y|X)$ dans l'exemple de la page 4.

Exercice A.1.27

Dans l'exercice A.1.25 exprimer la v.a.r. $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice A.1.28

Soient $N, X_1, X_2, \ldots$ des v.a.r. indépendantes. On suppose que $N \sim G(\theta)$ et $X_i \sim P(\lambda)$ pour tout $i \geq 1$. Calculer $\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_N)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de travaux dirigés

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la distribution de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	-1	0	1
0	a	2a	a
1	3a/2	3a	b

On pose : $Z = X + 2Y$ et $T = \sup\{X, Y\}$.

a- A quelle condition le tableau ci-dessus définit-il une distribution de probabilité conjointe (dans la suite on supposera cette condition satisfaite) ?

b- Déterminer, en fonction de a seulement, les lois de X, Z et T.

c- Déterminer l'espérance de X, Y et Z.

d- Déterminer $\mathbb{E}[X^2]$ et Var(X).

e- Est-ce que les v.a.r. X et Y sont indépendantes ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2

Soient Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $B(p)$ ($p \in [0,1]$). Pour $1 \leq i \leq 3$ on pose $X_i = Y_i Y_{i+1}$.

a- Quelle est la loi de X_i ($i = 1, 2, 3$) ? sa moyenne ? sa variance ?

b- Calculer $\mathbb{E}(X_i X_{i+1})$ puis $Cov(X_i, X_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq 2$.

c- Sans calcul, que vaut $Cov(X_1, X_3)$?

d- Calculer $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi $U(0,1)$. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice A.2.4

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & \text{si} \quad |x| + |y| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

a- Déterminer k et les lois de X et Y.

b- Déterminer $Cov(X, Y)$ et étudier l'indépendance de X et Y.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi de densité f définie par $f(t) = te^{-t}1_{[0,+\infty[}(t)$. On définit les v.a.r. $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$.

a- Calculer la densité du couple (U, V).

b- Quelle sont les densités de U et de V ? Que peut-on en déduire ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ayant la même densité f définie par $f(x) = \exp(-x)1_{]0,+\infty[}(x)$.

a- Calculer la densité $X + Y$.

b- Calculer la fonction de répartition G de X/Y. En déduire sa densité g.

c- Calculer la densité jointe de $(X/Y, Y)$. Retrouver la densité g de X/Y.

Exercice A.2.7

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même densité f définie par $f(x) = x^{-2} 1_{[1,+\infty[}(x)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

a- Calculer la loi du couple (U, V). U et V sont-elles indépendantes ?

b- Calculer les lois marginales de U et V.

Exercice A.2.8

Dupont a rendez-vous avec Durand entre 17 et 18 heures, chacun d'eux a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes. On suppose qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués entre 17 et 18 heures.

a- Déterminer la probabilité d'une rencontre.

b- Dupont fixe son heure d'arrivée à l'instant x. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Durand ?

c- Arrivant à l'heure x, Dupont ne trouve personne. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Durand ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} ((1+x/2)(1+y/2)-1/2)\exp(-3x/2-y), & \text{si} \quad x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

a- Vérifier que f est une densité de probabilité.

b- Quelles sont les lois de X et Y ?

c- Que valent $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$?

d- Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = Z)$, ainsi que $\mathbb{E}[X \mid Y = Z]$?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10

On considère les v.a.r. X, Y et Z, indépendantes et de même loi $N(0,1)$. On définit les v.a.r. suivantes : $T = X+Y$, $U = X-Y+2Z$ et $V = -X+Y+Z$. Quelle est la loi du vecteur (T,U,V) ? Déterminer les lois marginales de T, U et V.

Exercice A.2.11

Soit (X, Y) le vecteur aléatoire de loi uniforme sur $D = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a- Calculer les densités de probabilités marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b- On pose $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$ et $R > 0$. Calculer les lois marginales de R et Θ. R et Θ sont-elles indépendantes ?

c- On pose $Z = X/(X^2 + Y^2)$. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z.

Exercice A.2.12

Soient X et Y deux v.a.r. et soit f la densité du couple (X, Y) définie par :

$$f(x,y) = e^{(-x/y)-y}/y 1_{]0,+\infty[}(x) 1_{]0,+\infty[}(y)$$

a- Calculer la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x \mid y)$.

b- Calculer $\mathbb{E}\left[X \mid Y = y\right]$.

c- Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13

La densité conditionnelle de X en $\{Y = y\}$ est donnée par $f_{X|Y}(x|y) = xy^2e^{-yx} 1_{]0,+\infty[}(x)1_{]1,+\infty[}(y)$. La loi de Y étant définie par $f_Y(y) = y^{-2}1_{]1,+\infty[}(y)$ calculer la loi de Y en $\{X = x\}$ et $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Exercice A.2.14

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

a- Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

b- Calculer $\mathbb{E}[X \mid X + Y]$ et $\mathrm{Var}(X \mid X + Y)$.

c- Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathbb{E}[X \mid X + Y]$.

Exercice A.2.15

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes, de lois respectives $B(n_1, p)$ et $B(n_2, p)$.

a- Déterminer la loi de X en $\{X + Y = n\}$.

b- Déterminer $\mathbb{E}[X \mid (X + Y)]$.

Exercice A.2.16

On a une machine comprenant deux composants de durée de vie T_1 et T_2, respectivement. La densité conjointe est donnée par :

$$f(x,y) = c\exp\left(-(x+2y)\right),\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

a- Calculer la constante c.

b-
  i- La fonction de répartition conjointe.
  ii- Les fonctions de répartitions marginales.
  iii- Les densités marginales ; est-ce que les v.a. sont indépendantes ?

c- Supposons que les deux composants sont connectés en série. Alors la durée de vie du système, notée T_0 est égale à $T_0 = \min(T_1, T_2)$. Trouver la fonction de répartition et la densité de T_0.

d- Même question lorsque les composants sont connectés en parallèle, c.a.d. $T_0 = \max(T_1, T_2)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.17

Un dé est jeté 12 fois.

a- Trouver la probabilité que chaque face apparaisse deux fois.

b- Soit X le nombre d'apparitions de 6 et Y celui de 1. Trouver la distribution jointe de (X, Y).

c- Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice A.2.18

On considère un élément d'un système physique donné. On suppose que la durée de vie de cet élément (durée entre la mise en service et la première panne) est une variable aléatoire de loi exponentielle (loi de densité $\lambda e^{-x\lambda} 1_{R^+}(x)$ où $\lambda > 0$). Chaque fois que l'élément tombe en panne il est immédiatement remplacé par un autre dont la durée de vie est indépendante de celle des éléments précédents et de même loi exponentielle.
Soient $X_1, X_2, ...$ les durées de vie des éléments succesifs. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer, pour $n \geq 1$ fixé,

a- La loi de S_n (indication : procéder par récurrence sur $n \geq 1$).

b- La loi du couple (S_n, X_{n+1}).

c- La probabilité $P(S_n \leq t < S_n + X_{n+1})$ où $t > 0$.

d- La loi et l'espérance mathématique de la v.a. N représentant le nombre d'éléments utilisées en remplacement avant et jusqu'à l'instant t. (un calcul explicite est demandé, vous pouvez utiliser le résultat obtenu en 3.)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.19

a- Soient X et Y deux variables aléatoires de lois respectives $\mathbb{E}(\lambda)$ et $\mathbb{E}(\mu)$. Calculer $P(X < Y)$.

b- Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq R\}$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x, y) = c(x^2 + y^2)1_D(x, y).$$

i- Pour quelle valeur de c, f est-elle une densité ?

ii- Calculer les densités marginales de X et Y.

c- Soit X une variable aléatoire de loi $E(\lambda)$. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. Calculer $\mathbb{E}[X|a \leq X \leq b]$.

d- Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Soit Y une variable aléatoire qui conditionnellement à X, suit une loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, X\}$. Calculer l'espérance mathématique de Y.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.20

On considère le vecteur gaussien centré (X, Y), dont la matrice de covariance est donnée par : $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\rho| < 1$. Calculer $\mathbb{E}\left[\sup(X, Y)\right]$.

Exercice A.2.21

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ où les X_i sont indépendantes et de loi $N(m_i, 1)$ et $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ définie par : $Y_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Y_k = X_k - Y_1$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.

a- Quelle est la loi de $\boldsymbol{Y}$?

b- Montrer que Y_1 et $(Y_2, \ldots, Y_n)$ sont indépendants.

Exercice A.2.22

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{8}(x^2 - y^2)\exp(-x)1_{]0,+\infty[}(x)1_{]-x,x[}(y).$$

a- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b- Quelle est la loi marginale de X ? Appartient-elle à une famille de lois connue ?

c- Calculer $\mathbb{E}[Y|X = x]$ et $\text{Var}[Y|X = x]$. A quoi $\text{Var}[Y|X]$ est-elle presque sûrement égale ?

Exercice A.2.23

Dans le plan xOy on note C le demi-cercle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1$ et $x > 0\}$ et D la droite d'équation $x = 1$. On choisit au hasard un point P de C de manière uniforme et on note $\Theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ l'angle orienté (Ox, OP).

a- Donner la densité f_Θ de Θ (vérifier que la fonction donnée est bien une densité).

b- On note C' le demi-disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1$ et $x > 0\}$. On choisit un point P' de manière uniforme dans C' et on note Θ' l'angle orienté (Ox, OP'). Calculer la fonction de répartition de Θ' (on pourra s'aider d'un dessin) ; en déduire que Θ et Θ' suivent la même loi de probabilité.

c- On note T l'intersection de D et de la droite (OP) et Y l'ordonnée de T. Illustrer la situation par un dessin. Quelle relation lie Θ et Y ? En déduire la loi de Y en donnant sa densité (on rappelle que $\arctan(x)' = 1/(1 + x^2)$).

d- La variable aléatoire $|Y|$ admet-elle une espérance mathématique ? une variance ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.24

Soit Z_1, Z_2 et Z_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$. On pose $T_1 = \min(Z_1, Z_3)$ et $T_2 = \min(Z_2, Z_3)$.

a- Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\{T_1 > t, T_2 > s\} = \{Z_1 > t; Z_2 > s; Z_3 > \max(s,t)\},$$

en déduire que $P(T_1 > t, T_2 > s) = \exp(-\lambda_1 t - \lambda_2 s - \lambda_3 \max(t,s))$.

b- En déduire les lois marginales de T_1 et T_2. A quelle famille de lois usuelles appartiennent-elles ?

c- On note $F_{1,2}$, F_1 et F_2 les fonctions de répartition respectives de (T_1, T_2), T_1 et T_2. Montrer que pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$ on a

$$F_{1,2}(t,s) = P(T_1 > t, T_2 > s) + F_1(t) + F_2(s) - 1.$$

d- Que vaut $P(Z_i = Z_j)$ pour $1 \leq i \neq j \leq 3$? En déduire que

$$P(T_1 = T_2) = P(Z_3 \leq \min(Z_1, Z_2)).$$

Calculer $P(T_1 = T_2)$ à l'aide d'une intégrale triple. T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.25

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale de moyenne finie $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \in]0, +\infty[$.

a- (i) Calculer $\mathbb{E}(Y_1^3)$ où $Y_1 = (X_1 - \mu)/\sigma$.

(ii) En déduire $\mathbb{E}(X_1^3)$.

(iii) Calculer Cov(X_1, X_1^2).

b- On suppose désormais que les variables aléatoires X_i sont centrées et réduites. On admet que Var$(X_1^3) = 15$.

(i) Quelle est la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^3$?

(ii) Donner pour n grand, une approximation de la loi de $\sum_{i=1}^n X_i^3/\sqrt{n}$.

Exercice A.2.26

Soit (X,Y) un couple de v.a. dont la densité est :

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xe^{-(x+y)}1_{]0,y[}(x)1_{]0,+\infty[}(y).$$

1. X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Calculer $Cov(X,Y)$. (Conseil : balayer le domaine de sorte que x soit la variable "d'intégration" indépendante.)
3. On pose : $U = \dfrac{X}{X+Y}$ et $S = X + Y$.
   (a) Déterminer la loi du couple (U,S).
   (b) U et S sont-elles indépendantes ?

On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha > 0,\ \Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt = \frac{(n-1)!}{\alpha^n}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.27

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note $p_{X,Y}$ la loi jointe du couple (X, Y) définie par :

$$p_{X,Y}(n, m) = P(X = n; Y = m) = p_{n,m}, \quad \forall (n, m) \in E_1 \times E_2.$$

On notera $p_{\bullet,m} = \sum_{n \in E_1} p_{n,m}$ et $p_{n,\bullet} = \sum_{m \in E_2} p_{n,m}$.
On appelle fonction génératrice jointe du couple (X, Y) l'application $g_{X,Y}$ définie[1] par :

$$g_{X,Y}(u, v) = \sum_{n \in E_1} \sum_{m \in E_2} p_{n,m} u^n v^m.$$

On notera g_X et g_Y les fonctions génératrices respectives de X et Y.

I) a- Montrer que $g_{X,Y}(1, 1) = 1$ et que $g_{X,Y}(u, 1) = g_X(u)$.

b- Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $g_{X,Y} = g_X \times g_Y$.

c- Démontrer que :
- $\dfrac{\partial g_{X,Y}}{\partial u}(1, 1) = \mathbb{E}(X)$;
- $\dfrac{\partial^2 g_{X,Y}}{\partial u^2}(1, 1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$;
- $\dfrac{\partial^2 g_{X,Y}}{\partial u \partial v}(1, 1) = \mathbb{E}(XY)$.

d- En déduire des expressions de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Var}(X)$ en fonction de $g_{X,Y}$.

[1]Tout au long de l'exercice on supposera que les fonctions définies par des sommes sont bien définies et qu'il est permis d'intervertir dérivation et sommation.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.27

II) On suppose maintenant que la fonction génératrice jointe de (X, Y) est définie par :

$$g_{X,Y}(u,v) = \frac{1}{6} + \frac{u}{3} + \frac{v}{3} + \frac{uv}{6}.$$

a- Déterminer g_X, en déduire la loi marginale de X, son espérance, sa variance.

b- Déterminer la loi marginale de Y.

c- Calculer la covariance de X et Y.

d- X et Y sont-elles indépendantes ?

III) On suppose maintenant (X, Y) est à valeurs dans $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ et que :

$$p_{X,Y}(0,0) = p_{X,Y}(1,1) = 2p_{X,Y}(0,1) = 2p_{X,Y}(1,0).$$

Calculer la fonction génératrice jointe $g_{X,Y}$ de (X, Y).

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

a- $E_X = \{6, 7, 8, 9\}$ et $E_Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

b- $P_X(6) = 0.1,\ P_X(7) = 0.12,\ P_X(8) = 0.45,\ P_X(9) = 0.33$, on remarque que la somme vaut bien 1.
$P_Y(1) = 0.1,\ P_Y(2) = 0.2,\ P_Y(3) = 0.4,\ P_Y(4) = 0.3$, on remarque que la somme vaut bien 1.

c- On peut trouver au moins un couple tel que $p_{X,Y}$ soit different de $p_X p_Y$, par exemple $(8, 1)$, ce qui permet de conclure la non indépendance des v.a.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

(i) $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x; Y = y) \geq 0$ **;**
(ii) $\sum_{(x,y)\in E_X\times E_Y} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in E_X}\sum_{y\in E_Y} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in E_X} p_X(x) = 1$ **;**
(iii) X **et** Y **indépendantes ssi pour tout** A**,** B **:** $P(X \in A; Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ **(cf. chap. 2 et 3). Pour** $A = \{x\}$ **et** $B = \{y\}$ **(resp.** $A =]-\infty, x]$ **et** $B =]-\infty, y]$**) on obtient** $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ **(resp.** $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$**) pour tout** $(x,y) \in \mathbb{R}$**.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

$Y \setminus X$	6	7	8	9	p_Y
1	$0,08$	$0,02$	0	0	$0,1$
2	$0,02$	$0,05$	$0,1$	$0,03$	$0,2$
3	0	$0,05$	$0,25$	$0,1$	$0,4$
4	0	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$
p_X	$0,1$	$0,12$	$0,45$	$0,33$	1

$\mathbb{E}(X) = 6 \times 0,1 + 7 \times 0,12 + 8 \times 0,45 + 9 \times 0,33 = 8,01$.
$\mathbb{E}(X^2) = 6^2 \times 0,1 + 7^2 \times 0,12 + 8^2 \times 0,45 + 9^2 \times 0,33 = 65,01$.
Var$(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 65,01 - (8,01)^2 = 0,8499$.
De même on a $\mathbb{E}(Y) = 2,9$ et Var$(Y) = 0,89$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

Il s'agit de $p_{i\bullet}p_{\bullet j} = p_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

$E[XY] = 6 \times P(X=6, Y=1) + 7 \times P(X=7, Y=1) + 12 \times P(X=6, Y=2) + 14 \times P(X=7, Y=2) + 21 \times P(X=7, Y=3) + \cdots,$
$E[XY] = E[YE[X|Y]] = \sum_{y \in E_Y} yE[X|Y=y]P(Y=y)$
$E[(X+Y)^2] = 7^2 \times P(X=6, Y=1) + 8^2(\times P(X=6, Y=2) + P(X=7, Y=1)) + 9^2(\times P(X=7, Y=3)) + 10^2(\times P(X=7, Y=3) + P(X=8, Y=2)) + \cdots$
$E[(X+Y)^2] = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2]$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

On a déjà calculé $\mathbb{E}(XY) = 23,85$, $\mathbb{E}(X) = 8,01$ et $\mathbb{E}(Y) = 2,9$, donc $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 23,85 - 8,01 \times 2,9 = 0,621$. De plus on a $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{0,621}{\sqrt{0,8499 \times 0,89}} = 0,714$ où les variances ont été calculées dans un exercice précédent.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

(i) $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}(X)\times Y - X\times\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)]$
$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(ii) $\text{Cov}(X,X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \text{Var}(X)$ d'après (i).
(iii) $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(YX) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) = \text{Cov}(Y,X)$.
(iv) $\text{Cov}(aX+bY,Z) = \mathbb{E}((aX+bY)Z) - \mathbb{E}(aX+bY)\mathbb{E}(Z) = (a\mathbb{E}(XZ)+b\mathbb{E}(YZ)) - (a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y))\mathbb{E}(Z) = a(\mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)) + b(\mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)) = a\text{Cov}(X,Z) + b\text{Cov}(Y,Z)$.
(v) si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et donc $\text{Cov}(X,Y) = 0$. Pour un exemple montrant que la réciproque est fausse, voir l'exercice suivant.
(vi) On a $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X)^2]\times\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}(Y)^2]} = \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par conséquent on a bien :

$$\frac{|\text{Cov}(X,Y)|}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = |\rho_{X,Y}| \leq 1.$$

(vii) $\text{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 = \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Ils est clair d'une part que $XY = 0$ donc $E[XY] = 0$ et d'autre part $E[X] = 0$, d'où $E[X]E[Y] = 0$. La $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, mais les variables ne sont pas indépendantes (car Y depends de X).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

a- $P(X,Y) \in D^+) = 1/2$, on peut le retrouver part symétrie du domaine, sinon faire l'intégrale de la densité sur la moitié de D.

b- $P((X,Y) \in C) = P((X,Y) \in (R^+ \times R^+) \cap D) = 1/4$. i.e. quart du domaine.

c- $P((X,Y) \in T) = 2/\pi \int_0^1 (\int_0^{1-x} dy)dx = 3/2\pi$.

d- Le $1/\pi$ correspond au "poids" associé à la loi uniforme sur le disque de rayon 1 et de centre 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

a- $F_{X,Y}(x,y) = 0$ si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$,
$F_{X,Y}(x,y) = xy$ si $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$,
$F_{X,Y}(x,y) = x$ si $x \in [0,1],\ y > 1$,
$F_{X,Y}(x,y) = y$ si $y \in [0,1],\ x > 1$
et $F_{X,Y}(x,y) = 1$ si $x > 1$ et $y > 1$.

b- $f_{X,Y}(x,y) = 1_{[0,1]}(x)1_{[0,1]}(y)$.

c- Comme le produit des lois à cause de l'indépendance.

d- $P((X,Y) \in D) = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy)dx = \pi/4$.

Retour à l'exercice ▲

a- $[0,1] \times [0,1]$.

b- $F_V(x) = F_{(X,Y)}(x,x)$ d'où
$F_V(x) = 0$, si $x < 0$, $F_V(x) = x^2$, si $x \in [0,1]$,
$F_V(x) = 1$ si $x > 1$.

c- $F_U(y) = 1 - P(X > y, Y > Y)$ or si l'on pose $A = \{X \leq y\}$ et $B = \{Y \leq y\}$, nous avons $1 - P(X > y, Y > y) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ce qui nous donne finalement $F_U(y) = F_X(y) + F_Y(y) - F_{(X,Y)}(y,y)$.
Soit $F_U(y) = 0$, si $y < 0$,
$F_U(y) = 2y - y^2$, si $y \in [0,1]$,
$F_U(y) = 1$, si $y > 1$.

d- Indication : Pour $u \leq v,\ F_{U,V}(u,v) = 2F_{(X,Y)}(u,v)$, il vous reste à conclure.

e- La relation d'ordre $min \leq max$, permet de conclure la non indépendance.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

$P((X,Y) \in [0,2] \times [0,2]) = F(2,2) - F(2,0) - F(0,2) + F(0,0) = -1$ **ce qui est impossible.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

a- Sur le triangle défini par l'abscisse $x \in [0,1]$, la droite $x = 1$ et la droite $x = y$.

b- $\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 (\int_0^x 2xydy)dx = 1/4$

c- On determine la loi marginale de X, $f_X(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$ d'où $E[X] = 2/3$, de même la loi marginale de Y, $f_y(y) = 2(1-y)1_{[0,1]}(y)$ d'où $E[Y] = 1/3$. Cov$(X,Y) = 1/36$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

$f_{(X,Y,Z)(x,y,z)} = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$ **donc Pour** $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ **et** $z \in [0,1]$ $P(X \geq YZ) = \int_0^1 (\int_0^1 (\int_{yz}^1 dx)dy)dz = 3/4$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

Posons $x = u - v,\ y = v - w,\ z = w$**, ceci définit l'application inverse** g^{-1}**.** $f(x, y, z) = f_{(U,V,W)} \circ g^{-1}|DJg^{-1}|1_F(x, y, z)$ **or** $|DJg^{-1}| = 1$ **et** $f_{(U,V,W)} \circ g^{-1} = \exp(-x - y - z)$ **d'où** $f(x, y, z) = \exp(-x - y - z)1_{\{x>0,y>0,z>0\}}$

Retour à l'exercice ▲

Rappel : Si $\boldsymbol{X}$ est un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de variance-covariance Σ, pour que $\boldsymbol{X}$ admette une densité il faut et il suffit que Σ soit inversible. Alors on a :

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{(2\pi \text{dét}(\Sigma))^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Puisque les X_i sont i.i.d $\Sigma = \sigma^2 I_d$ øù I_d désigne la matrice idéntite de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, de plus $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ est donc le produit scalaire des vecteurs $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'$ et $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ ponderé par $1/\sigma^2$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

a- $F_Y(x) = P(X \leq x \cap \varepsilon = 1) + P(-X \leq x \cap \varepsilon = -1) = 1/2P(X \leq x) + 1/2P(-X \leq x) = F_X(x)$ la dernière égalité étant obtenue par la symetrie de la loi normale.

b- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, \varepsilon X) = E[X^2]E[\varepsilon] = 0$ car $E[\varepsilon] = 0$.

c- $P(X + Y = 0) = P(X(1 + \varepsilon) = 0) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$. Si X et Y étaient indépendantes, le vecteur (X, Y) serait Gaussien et $X + Y$ serait une Gaussienne or le fait que $P(X + Y = 0) = 1/2$ montre que $X + Y$ n'est pas une Gaussienne donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

Z suit la loi $P(1)$, pour $k \leq n$, $P(X = n|Z = k) = \frac{P(X=n,Y=k-n}{P(Z=k)} = 1/2^k \frac{k!}{n!(k-n)!}$ ce qui correspond à $P(U = n)$ lorsque U suit une loi $B(k, 1/2$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

a- X et Y sont indépendantes alors, $f_{(X,Y)}(x,y)) = f_{X|Y}(x|y)f_y(y)$ d'où $f_{X|Y} = f_X$.
si, $f_{X|Y} = f_X$ alors $f_{(X,Y)}(x,y)) = f_X(x)f_Y(y)$.

b- $f_{X|Y} = \frac{f_{Y|X}f_X}{f_Y}$

c- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ pourvu que B soit un événement de probabilité > 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

a- Pour $y \in [0,1[$, $f_y(y) = 2\int_0^1 (\int_y^1 dx)dy = 2(1-y)$ d' où $f_{X|Y} = \frac{1}{1-y} 1_{[y,1[}(x)$ pour $y \in [0,1[$.

b- $f_{Y|X} = \frac{1}{x} 1_{[0,x[}(y)$, pour $x \in]0,1]$.

c- $\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_0^x y \frac{1}{x} dy = \frac{x}{2}$

d- $\mathbf{Var}(Y|X=x) = \mathbb{E}(Y^2|X=x) - (\mathbb{E}(Y|X=x)^2)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

$E[X_1 + \cdots + X_N] = E[E[X_1 + \cdots + X_n|N = n]] = \sum_n nE[X_1]P(N = n) = E[X_1]E[N] = \frac{\lambda}{\theta}$ le première égalité est due à même loi des X_i, la deuxième à l'indépendance entre les X_i et N.

Retour à l'exercice ▲