Chapitre 3 - exercices hors polycopié de cours

Exercice 1. Un système est composé de trois composants indépendants. Le temps de bon fonctionnement de chaque composant suit la loi exponentielle de paramètre λ. Le système fonctionne normalement tant que deux composants au moins sont en état de marche. On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel le système fonctionne et on note $X_i,\ i = 1, 2, 3$ le temps de bon fonctionnement de chaque composant.

1. Ecrire l'événement $\{T \leq t\}$ comme la réunion de quatre événements deux à deux incompatibles, faisant intervenir X_1, X_2 et X_3.
2. Déterminer la fonction de répartition de T.
3. Montrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire T est dérivable en 0. En prenant pour densité f de T la dérivée de F en tout ses points de dérivabilité, déduire f.

Exercice 2. On considère la variable aléatoire X de loi uniforme sur $]-1, 1[$.

1. Donner la densité de X.
2. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(|X| > \frac{1}{2})$.
3. Posons $Y = |X|$, donner la fonction de répartition de Y.
4. Donner la densité de Y.
5. Soit $Z = \mathbb{1}_{[0,1[}(X) - \mathbb{1}_{]-1,0[}(X)$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 3. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi commune $\varepsilon(\lambda)$.

1. Donner la loi de $X + Y$ en utilisant le produit de convolution.
2. Si Z est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt et soit $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(Z < 2) = \mathbb{P}(X + Y > t)$.
   (b) Déterminer la fonction génératrice des moments de Z.
3. Soit la variable aléatoire $U = e^Y$
   (a) Déterminer la densité de la variable aléatoire U.
   (b) Déterminer $\mathbb{E}[U]$.
   (c) Evaluer $\mathbb{E}[U^k],\ k \geq 2$.

Exercice 4. La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'un boulanger vend en une journée est une v.a. de densité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ a(6-x) & \text{si} \quad 3 \leq x < 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a.

2. Déterminer la fonction de répartition F associée à f.

3. Quelle est la probabilité, qu'en une journée, soit vendu

   (a) plus de 300 kilos de pain.

   (b) entre 150 et 450 kilos de pain.

4. Soit A l'événement défini par $3(a)$ et B celui défini par $3(b)$, les événements A et B sont-ils indépendants ?