Corrigé du devoir 1

TD1-Exercice 6

1.

- On montre que $A\tilde{+}B$ est un sous-espace vectoriel.
  - $\vec{0} \in A, \vec{0} \in B$, donc $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in A\tilde{+}B$, l'ensemble n'est donc pas vide.
  - Soient $\vec{x}_1 = \vec{a}_1\hat{+}\vec{b}_1$ et $\vec{x}_2 = \vec{a}_2\hat{+}\vec{b}_2$ avec $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A$, $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in B$ alors en utilisant la commutativité et l'associativité de la loi $\hat{+}$ on obtient :

    $$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (\vec{a}_1\hat{+}\vec{b}_1)\hat{+}(\vec{a}_2\hat{+}\vec{b}_2) = (\vec{a}_1\hat{+}\vec{a}_2)\hat{+}(\vec{b}_1\hat{+}\vec{b}_2).$$

    Or A et B sont des sous espaces vectoriels, donc $(\vec{a}_1\hat{+}\vec{a}_2) \in A, (\vec{b}_1\hat{+}\vec{b}_2) \in B$, donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A\tilde{+}B$.
  - De même en utilisant les propriétés de la loi externe :

    $$\lambda\vec{x}_1 = \lambda(\vec{a}_1\hat{+}\vec{b}_1) = \lambda\vec{a}_1\hat{+}\lambda\vec{b}_1.$$

    Or A et B sont des sous espaces vectoriels, donc $\lambda\vec{a}_1 \in A, \lambda\vec{b}_1 \in B$, donc $\lambda\vec{x}_1 \in A\tilde{+}B$.
- $A \subset A\tilde{+}B$, en effet :

  $$\vec{x} \in A \Rightarrow \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in A\tilde{+}B, \text{ puisque } \vec{x} \in A, \vec{0} \in B.$$

  De même $B \subset A\tilde{+}B$.
- Soit C un sous-espace vectoriel contenant A et B, montrons que $A\tilde{+}B \subset C$.
  Soit $\vec{x} = \vec{a}\hat{+}\vec{b} \in A\tilde{+}B$ or $\vec{a} \in C$ et $\vec{b} \in C$ donc $\vec{x} \in C$ (sev).Donc $A\tilde{+}B \subset C$.
- Donc $A\tilde{+}B$ est le plus petit sev qui contienne A et B.

2.

- Puisque si A est un sev de E et B est en sev de E, alors (question précédente) $A\tilde{+}B$ est en sev de E, alors la loi $\tilde{+}$ est une loi de composition interne de $\mathcal{E}$.
- Pour montrer l'*associativité* il faut montrer que :

  $$(A\tilde{+}B)\tilde{+}C = A\tilde{+}(B\tilde{+}C).$$

  Comme d'habitude pour montrer l'égalité entre deux ensembles, on raisonne par équivalence si c'est possible, ou alors par double implication ce qui revient à démontrer une double inclusion :

  $$E = F \Leftrightarrow \{\vec{x} \in E \Leftrightarrow \vec{x} \in F\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \in E \Rightarrow \vec{x} \in F \\ \vec{x} \in F \Rightarrow \vec{x} \in E \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E \subset F \\ F \subset E \end{array} \right.$$

  Ici on peut raisonner par équivalence :

  $$\vec{x} \in (A\tilde{+}B)\tilde{+}C \Leftrightarrow \vec{x} = (\vec{a}\hat{+}\vec{b})\hat{+}\vec{c} = \vec{a}\hat{+}(\vec{b}\hat{+}\vec{c}) \Leftrightarrow \vec{x} \in A\tilde{+}(B\tilde{+}C).$$

  On a noté $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des vecteurs de A, B, C.
- La loi est commutative, on montre que $A\tilde{+}B = B\tilde{+}A$.

  $$\vec{x} \in A\tilde{+}B \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a}\hat{+}\vec{b} = \vec{b}\hat{+}\vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} \in B\tilde{+}A.$$

- L'*élément neutre* est l'ensemble $O = \{\vec{0}\}$:
  Si $\vec{x} \in A\tilde{+}O$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{a}\hat{+}\vec{0}$, avec $\vec{a} \in A$, donc $\vec{x} = \vec{a}$, donc $\vec{x} \in A$.
  Réciproquement si $\vec{x} \in A$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$, donc $\vec{x} \in A\tilde{+}O$.

- Etant donné A, on cherche un sous-espace vectoriel B tel que $A\tilde{+}B = O$, si B existait on aurait alors
$$A \subset A\tilde{+}B = O = \{\vec{0}\}.$$
Ceci est impossible si $A \neq \{\vec{0}\}$.
- Tout sev est idempotent, c'est à dire $A = A\tilde{+}A$. On va raisonner par double inclusion :
$$\vec{x} \in A \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}\hat{+}\vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in A\tilde{+}A \text{ puisque } \vec{x} \in A \text{ et } \vec{0} \in A.$$
Réciproquement :
$$\vec{x} \in A\tilde{+}A \Rightarrow \vec{x} = \vec{a}_1\hat{+}\vec{a}_2 \Rightarrow \vec{x} \in A \text{ puisque } A \text{ est un sev, donc stable pour la loi} \hat{+}$$

3. On montre facilement que :
$$A\tilde{+}(B \cap C) \subset (A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C).$$
Si $\vec{x} \in A\tilde{+}(B \cap C)$, alors $\vec{x} = \vec{a}\hat{+}\vec{d}$, avec $\vec{d} \in B \cap C$, donc $\vec{d} \in B$, donc $\vec{x} \in A\tilde{+}B$.
On montrerait de même que $\vec{x} \in A\tilde{+}C$ et donc $\vec{x} \in (A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C)$.
Pour montrer la distributivité, on n'arrive pas à montrer que dans le cas général :
$$(A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C) \subset A\tilde{+}(B \cap C),$$
donc on cherche un exemple pour lequel cette inclusion n'est pas vérifiée.
On définit
$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\}, B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0\}, C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = x_2\}$$
On montre que $A\tilde{+}B = \mathbb{R}^2$, pour cela il faut montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B.
On montre de même que $A\tilde{+}C = \mathbb{R}^2$.
On montre que $B \cap C = \{\vec{0}\} = O$.
On a donc $(A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C) = \mathbb{R}^2$, $A\tilde{+}(B \cap C) = A\tilde{+}O = A$.
L'inclusion $(A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C) \subset A\tilde{+}(B \cap C)$ n'est donc pas vérifiée. Donc il n'y a pas distributivité.

TD1-Exercice 15

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de E donc dim $E = n$. La famille $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n\}$ contient n vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est libre pour conclure que c'est une base.

$$\begin{aligned}
\alpha_1\vec{f}_1 + \alpha_2\vec{f}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{f}_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \ldots + \alpha_{n-1}(\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n) + \alpha_n\vec{e}_n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_1\vec{e}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})\vec{e}_{n-1} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)\vec{e}_n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} = 0 \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_3\}$ est une famille libre, donc si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, tous les coefficients sont nuls.

On aurait pu, au lieu de montrer que la famille $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n\}$ était libre, montrer qu'elle était génératrice, il aurait alors fallu montrer que pour tout vecteur de E, donc pour tout vecteur $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$, il existe des coefficients $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ (qui dépendent de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) tels que $\vec{x} = \beta_1\vec{f}_1 + \beta_2\vec{f}_2 + \ldots + \beta_n\vec{f}_n$.