Corrigé du devoir 2

TD2-Exercice 3

1. (a)
$$\vec{x} \in \text{Ker } u \Rightarrow u(\vec{x}) = 0 \Rightarrow u^2(\vec{x}) = u(u(\vec{x})) = u(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \text{Ker } u^2.$$
Donc $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$.

   (b)
$$\vec{y} \in \text{Im } u^2 \Rightarrow \exists \vec{x} \in E/y = u^2(x) = u(u(x)) \Rightarrow \exists \vec{z} = u(\vec{x}) \in E/y = u(z)) \Rightarrow \vec{y} \in \text{Im } u.$$
Donc $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$.

   (c) On raisonne par double implication :
$\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \Rightarrow \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{\vec{0}\}$?
$$\vec{x} \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \vec{y} \in E/\vec{x} = u(\vec{y}) \\ u(\vec{x}) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \vec{y} \in E/\vec{x} = u(\vec{y}) \\ u^2(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} \in \text{Ker } u^2 \end{array} \right.$$
On utilise l'hypothèse $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ et on obtient
$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \vec{y} \in E/\vec{x} = u(\vec{y}) \\ \vec{y} \in \text{Ker } u \end{array} \right. \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$
On démontre la réciproque : $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \vec{0} \Rightarrow \text{Ker } u = \text{Ker } u^2$
Puisque l'on a déjà montré $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$, il suffit maintenant de montrer que $\text{Ker } u^2 \subset \text{Ker } u$.
$$\vec{x} \in \text{Ker } u^2 \Rightarrow u^2(x) = u(u(\vec{x})) = \vec{0} \Rightarrow u(\vec{x}) \in \text{Ker } u.$$
Or $u(\vec{x})$ appartient à $\text{Im } u$, donc en utilisant l'hypothèse $u(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $\vec{x} \in \text{Ker } u$. Ceci termine de démontrer l'inclusion.

   (d) On raisonne par double implication :
$E = \text{Im } u + \text{Ker } u \Rightarrow \text{Im } u = \text{Im } u^2$?
On a déjà démontré que $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$, il suffit donc de démontrer l'autre inclusion.
Soit $\vec{x}$ quelconque appartenant à $\text{Im } u$, alors $\exists \vec{y} \in E/\vec{x} = u(\vec{y})$.
On utilise l'hypothèse, donc $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$, avec $\vec{y_1} \in \text{Im } u, \vec{y_2} \in \text{Ker } u$.
On a donc $u(\vec{y_2}) = \vec{0}$ et $\vec{y_1} = u(\vec{z})$ avec $\vec{z} \in E$.
Finalement $\vec{x} = u(\vec{y}) = u(\vec{y_1}) + u(\vec{y_2}) = u^2(\vec{z}) \Rightarrow \vec{x} \in \text{Im } u^2$, ce qui termine de démontrer l'inclusion.
On démontre la réciproque : $\text{Im } u = \text{Im } u^2 \Rightarrow E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.
La réciproque est plus délicate à montrer, car elle demande un peu d'initiative.
Soit $\vec{x} \in E$, alors $u(\vec{x}) \in \text{Im } u$, mais, puisque $\text{Im } u = \text{Im } u^2$, $\exists \vec{z} \in E, u(\vec{x}) = u^2(\vec{z})$.
On peut alors écrire que $\vec{x} = u(\vec{z}) + (\vec{x} - u(\vec{z}))$.
Or $u(\vec{z}) \in \text{Im } u$ et $u(\vec{x} - u(\vec{z})) = u(\vec{x}) - u^2(\vec{z}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - u(\vec{z}) \in \text{Ker } u$.
On a donc décomposé un vecteur $\vec{x}$ quelconque en une somme d'un vecteur de $\text{Im } u$ et d'un vecteur de $\text{Ker } u$.
Ce qui montre que $E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.

2. (a) On a alors $p^2 = p$, on peut utiliser 1(c) et 1(d) et conclure que
$$\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{\vec{0}\} \text{ et } E = \text{Im } p + \text{Ker } p.$$
Ce qui est équivalent à $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.

On aurait pu également démontrer le résultat directement sans de servir des questions précédentes, il suffit de montrer (revoir le chapitre 1) que :

$$\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{\vec{0}\} \text{ et } \dim \text{Ker } p + \dim \text{Im } p = \dim E.$$

L'égalité sur les dimensions est un résultat général sur les applications linéaires.
Pour la première relation :

$$\vec{x} \in \text{Ker } p \cap \text{Im } p \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(\vec{x}) = \vec{0} \\ \vec{x} = p(\vec{y}) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(\vec{x}) = \vec{0} \\ \vec{x} = p(\vec{y}) \\ p(\vec{x}) = p^2(\vec{y}) = p(\vec{y}) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

(b) On peut écrire $\vec{x} = p(\vec{x}) + (\vec{x} - p(\vec{x}))$.
$p(\vec{x}) \in \text{Im } p$, de plus :
$p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x}) = p(\vec{x}) - p(\vec{x}) = \vec{0}$, donc $(\vec{x} - p(\vec{x})) \in \text{Ker } p$.
Ce qui donne la décomposition de $\vec{x}$ en la somme d'un élément $\vec{x}_1 = p(\vec{x})$ appartenant à Im p et d'un élément $\vec{x}_2 = \vec{x} - p(\vec{x})$ appartenant à Ker p.

(c) Puisque $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, avec $\vec{x}_1 \in \text{Im } p$, $\vec{x}_2 \in kerp$, la projection π sur Im p parallèlement à Ker p, est définie par $\pi(\vec{x}) = \vec{x}_1$.
Or $\vec{x}_1 = p(\vec{x})$, donc $\forall \vec{x} \in E$, $p(\vec{x}) = \pi(\vec{x})$, donc $p = \pi$.
Autre solution : on aurait pu répondre à cette question sans se servir de la question précédente, c'est à dire sans connaitre les expressions de $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$.
On sait que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, avec $\vec{x}_1 \in \text{Im } p$, $\vec{x}_2 \in \text{Ker } p$, donc $\pi(\vec{x}) = \vec{x}_1$.
D'autre part $p(\vec{x}) = p(\vec{x}_1) + p(\vec{x}_2) = p(\vec{x}_1)$, en effet $\vec{x}_2 \in \text{Ker } p$.
Il reste donc à montrer que $p(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$.
$\vec{x}_1 \in \text{Im } p$, donc il existe $\vec{x'}_1$ tel que $\vec{x}_1 = p(\vec{x'}_1)$, donc $p(\vec{x}_1) = pop(\vec{x'}_1) = p(\vec{x'}_1) = \vec{x}_1$. Ceci termine la démonstration.

TD2-Exercice 8

1. On montre que $\mathcal{Y}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

   En effet $\mathcal{Y}_n$ est non vide puisque la matrice nulle appartient à $\mathcal{Y}_n$. D'autre part si $M \in \mathcal{Y}_n$, si $M' \in \mathcal{Y}_n$, alors $M + M' \in \mathcal{Y}_n$: il suffit de le vérifier grace aux termes de ces matrices. De même $\lambda M \in \mathcal{Y}_n$.

   Il en est de même pour $\mathcal{A}_n$.

   Une matrice symétrique peut s'écrire : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, où les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$ sont quelconques.

   Si on note comme d'habitude E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme de la ième ligne et jème colonne qui vaut 1.

   Les matrices E_{ii} sont diagonales donc symétriques.

   Si on définit les matrices (symétriques) $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}, 1 \leq i \leq j \leq n$.

   On a alors

   $$A = a_{11}E_{11} + a_{12}F_{12} + \ldots + a_{1n}F_{1n} + a_{22}E_{22} + \ldots + a_{2n}F_{2n} + \ldots + a_{nn}E_{nn}$$

   Si vous ne voyez pas avec n quelconque, traitez d'abord un cas particulier : $n = 3$ par exemple.

   La famille

   $$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}, F_{12}, , \ldots, F_{1n}, F_{23}, \ldots, F_{2n}, \ldots, F_{n-1n}\}$$

est donc une famille génératrice de $\mathcal{Y}_n$.

On montre que la famille $\mathcal{B}$ est libre (on écrit une combinaison linéaire de ces matrices qui est égale à la matrice nulle, on montre que forcément les coefficients sont nuls).

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathcal{Y}_n$.

Pour connaitre la dimension de $\mathcal{Y}_n$, on dénombre les éléments de la famille :
il y a n matrices E_{ii} et $n-1+n-2+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$ matrices F_{ij}. Donc au total $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments d'où la dimension.

Une matrice antisymétrique peut s'écrire : $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & ... & a1n \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & ... & 0 \end{pmatrix}$, où les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$ sont quelconques.

Si on définit les matrices (antisymétriques) $G_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, 1 \leq i < j \leq n$.

On a alors

$$A = +a_{12}G_{12} + \ldots + a_{1n}G_{1n} + a_{23}G_{23} + ... + a_{2n}G_{2n} + \ldots + a_{n-1n}G_{n-1n}$$

La famille

$$\mathcal{B}' = \{G_{12},, \ldots, G_{1n}, G_{23}, \ldots, G_{2n}, \ldots, G_{n-1n}\}$$

est donc une famille génératrice de $\mathcal{A}_n$.

On montre que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

La famille $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathcal{A}_n$.

Pour connaitre la dimension de $\mathcal{A}_n$, on dénombre les éléments de la famille :
il y a $n-1+n-2+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$ matrices G_{ij}, d'où la dimension.

$$\dim \mathcal{Y}_n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Si $A \in \mathcal{Y}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors pour tout i et j on a

$$a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji} \Leftrightarrow a_{ij} = 0.$$

Donc A est la matrice nulle.

On a en plus

$$\dim \mathcal{M}_{n,n} = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathcal{Y}_n + \dim \mathcal{A}_n.$$

Donc, revoyez le chapitre 1, $\mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{Y}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Ce qui termine la démonstration.

Par curiosité , étant donné $M \in \mathcal{M}_{n,n}$, on cherche $Y \in \mathcal{Y}_n, A \in \mathcal{A}_n$ tels que $M = Y + A$.

Si on pose $Y = \frac{1}{2}(M + M^T)$, $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$, vérifiez que $Y \in \mathcal{Y}_n, A \in \mathcal{A}_n$, $M = Y + A$.

TD2-Exercice 16

1. Si l'on note $V_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, d'après les propriétés du produit matriciel on a :

$$M = V_1 V_2^T = (a_1 V_1 \ a_2 V_1 ... a_n V_1).$$

   Donc toutes les colonnes de $M = V_1 V_2^T$ sont proportionnelles à V_1.

   Donc vect $< M_1, M_2, ..., M_n > \subset$ vect $< V_1 >$.

   Donc rang $(V_1 V_2^T) =$ dim (vect $< M_1, M_2, ..., M_n >) \leq$ dim (vect $< V_1 >) = 1$. rang $M \leq 1$.

   De plus M est non nulle puisque V_1 est un vecteur non nul et qu'il existe au moins un des termes a_i qui est non nul. Donc rang $M \geq 1$.

   Donc le rang de $V_1 V_2^T$ est égal à 1.

2. $$\text{rang } A = \dim \text{ Im } A = 1,$$

   donc Im A admet une base contenant un seul vecteur V non nul (appartenant à $\mathcal{M}_{n1}$).

   Les colonnes de A appartiennent à Im A donc pour chacune d'elles on a

$$A_i = \alpha_i V.$$

   Si on note

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

   d'après les propriétés du produit matriciel, on obtient

$$A = VU^T$$

   Puisque le rang de A n'est pas nul, il existe au moins une colonne de A non nulle donc au moins un des coefficients α_i est non nul, donc le vecteur colonne U est non nul. Ce qui termine la démonstration.

3. Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. On peut écrire :

$$A = (2A_2 \ A_2 \ 3A_2) = A_2 (2 \ 1 \ 3).$$