Corrigé du devoir 3

TD3-Exercice 12

1. Exceptionnellement, il est intéressant de calculer l'inverse à l'aide des co-facteurs.
   On pourra utiliser, si nécesssaire, les propriétés connues
   $$j^3 = 1,\ 1 + j + j^2 = 0,\ j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}.$$
   On commence par calculer
   $$\begin{aligned} \text{dét } U &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & j-1 & j^2-1 \\ 1 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j-1 & j^2-1 \\ j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \\ &= (j-1)^2 - (j^2-1)^2 = (j-1-j^2+1)(j-1+j^2-1) = 3(j^2-j). \end{aligned}$$
   La matrice U étant symétrique, il suffit de calculer six co-facteurs :
   $$c_{11} = \begin{vmatrix} j & j^2 \\ j^2 & j \end{vmatrix} = j^2 - j^4 = j^2 - j,\ c_{12} = c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & j^2 \\ 1 & j \end{vmatrix} = j^2 - j,\ c_{13} = c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & j^2 \end{vmatrix} = j^2 - j.$$
   $$c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & j \end{vmatrix} = j - 1 = \frac{j^2 - j}{j} = j^2(j^2 - j),\ c_{23} = c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & j^2 \end{vmatrix} = -(j^2-1) = -(j^2-j^3) = j(j^2-j)$$
   $$c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & j \end{vmatrix} = j - 1 = \frac{j^2 - j}{j} = j^2(j^2 - j).$$
   On obtient donc
   $$U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.$$

2. (a)
   $$x_1 = \frac{1}{\text{dét } U} \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 1 \\ b_2 & j & j^2 \\ b_3 & j^2 & j \end{vmatrix} = \frac{b_1(j^2 - j^4) - b_2(j - j^2) + b_3(j^2 - j)}{3(j^2 - j)} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}.$$
   $$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\text{dét } U} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 1 \\ 1 & b_2 & j^2 \\ 1 & b_3 & j \end{vmatrix} = \frac{-b_1(j - j^2) + b_2(j-1) - b_3(j^2-1)}{3(j^2-j)} \\ &= \frac{b_1(j^2-j) + b_2 j^2(j^2-j) + b_3 j(j^2-j)}{3(j^2-j)} = \frac{b_1 + b_2 j^2 + b_3 j}{3}. \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\text{dét } U} \begin{vmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & j & b_2 \\ 1 & j^2 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{b_1(j^2 - j) - b_2(j^2-1) + b_3(j-1)}{3(j^2-j)} \\ &= \frac{b_1(j^2-j) + b_2 j(j^2-j) + b_3 j^2(j^2-j)}{3(j^2-j)} = \frac{b_1 + b_2 j + b_3 j^2}{3}. \end{aligned}$$
   Pour x_1 on a développé le déterminant selon la première colonne, pour x_2 selon la deuxième colonne, pour x_3 selon la troisième colonne.

(b) Si x_1, x_2, x_3 sont réels, alors $x_1 + x_2 + x_3$ est réel, or $x_1 + x_2 + x_3 = b_1$. Donc b_1 est réel.
$3x_1 = b_1 + b_2 + b_3$ et b_1 sont réels, donc $b_2 + b_3$ est réel.
$3x_2 = b_1 + j^2 b_2 + j b_3 = b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + b_3) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(-b_2 + b_3)$.
$x_2, b_1, b_2 + b_3$ sont réels, donc $b_3 - b_2$ est imaginaire pur.
On trouve finalement b_1 réel et b_2, b_3 conjugués.
La réciproque est immédiate, si b_1 est réel, $b_2 = \bar{b_3}$, alors x_1, x_2, x_3 sont réels.

3. On vérifie que lorsque l'on écrit la solution x_1, x_2, x_3 en fonction du second membre b_1, b_2, b_3, on retrouve bien U^{-1}.

$$Ux = b \Leftrightarrow x = U^{-1}b.$$

TD3-Exercice 16

1. (a) On résout $Ax = 0$ par la méthode de Gauss.

$$x \in \text{Ker } A \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$ est donc une base de Ker A, donc dim Ker $A = 1$,
donc rang $A = 3 - 1 = 2$.
Avant d'aborder les questions (b) et (c), on peut prévoir que le système $Ax = b$, n'aura jamais de solution unique : il n'aura pas de solution ou alors il aura une infinité de solutions. En effet dès qu'il existe une solution x_p, alors $x_p + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sont d'autres solutions.

(b) On résout $Ax = b$ par la méthode de Gauss.
On obtient

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{-1}{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Il existe une solution donc $b \in \text{Im } A$.
On vérifie que $x_p = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{-1}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution particulière du système $Ax = b$. On retrouve que $x - x_p \in \text{Ker } A$.
Attention les calculs ne conduisent pas toujours à la même solution particulière, mais dans tous les cas la solution x doit s'écrire $x_p + x_h$ où x_p est une solution particulière de $Ax = b$ et où x_h appartient à Ker A, c'est à dire vérifie $Ax_h = 0$.

(c) On résout $Ax = b$ par la méthode de Gauss.
On est conduit à des équations incompatibles, donc il n'existe pas de solution. Ce qui signifie que $b \notin \text{Im } A$.

2. (a) On résout $Ax = 0$ par la méthode de Gauss. On trouve que la solution unique est $x = 0$, donc dim Ker $A = 0$, donc le rang de A vaut 3.

   Avant d'aborder les questions (b) et (c), on peut prévoir que $Ax = b$ n'aura aucune solution ou alors aura une solution unique.

   En effet si $Ax = b$ admet au moins une solution cette solution est forcément unique. Pour cela on suppose qu'il existe 2 solutions et on montre que ce sont les mêmes en montrant que leur différence appartient à Ker A.

   (b) Pour résoudre effectivement, on utilise la méthode de Gauss, on trouve une solution unique :
$$x = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$
   Il existe une solution donc $b \in \text{Im } A$.

   (c) On utilise la méthode de Gauss et on est conduit à des équations incompatibles, il n'y a donc pas de solution (donc $b \notin \text{Im } A$).

3. (a) On résout $Ax = 0$ par la méthode de Gauss.
$$x \in \text{Ker } A \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$
   $\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ est donc une base de Ker A, donc dim Ker $A = 1$,
   donc rang $A = 4 - 1 = 3$.

   Avant d'aborder la question (b), on peut prévoir que le système $Ax = b$ aura une infinité de solutions (pour tout b).

   En effet le rang de A vaut 3 , donc Im $A = \mathcal{M}_{31}$ donc la famille $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{31}$, donc tout vecteur b se décompose en
$$b = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4$$
   Donc le système $Ax = b$ admet pour solution $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$.

   En reprenant le raisonnement de la question 1), on peut montrer qu'il ne peut pas y avoir unicité de la solution (car dim Ker $A \neq 0$).

   (b) Pour résoudre effectivement, on utilise la méthode de Gauss. On obtient
$$x = \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 + 3b_3 \\ b_3 \\ 0 \\ -b_1 + b_2 - 2b_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$
   On vérifie que $x_p = \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 + 3b_3 \\ b_3 \\ 0 \\ -b_1 + b_2 - 2b_3 \end{pmatrix}$ est solution particulière du système $Ax = b$.
   On retrouve que $x - x_p \in \text{Ker } A$.

Attention les calculs ne conduisent pas toujours à la même solution particulière, mais dans tous les cas la solution x doit s'écrire $x_p + x_h$ où x_p est une solution particulière de $Ax = b$ et où x_h appartient à Ker A, c'est à dire vérifie $Ax_h = 0$.

4. (a) On résout $Ax = 0$ par la méthode de Gauss.

$$x \in \text{Ker } A \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre et génératrice de Ker A, c'est donc une base de Ker A, donc dim Ker $A = 2$,

donc rang $A = 4 - 2 = 2$.

Avant d'aborder les questions (b) et (c), on peut prévoir que $Ax = b$ aura une infinité de solutions ou aucune solution : faire un raisonnement similaire à ce qui a déjà été fait.

(b) Pour résoudre effectivement, on utilise la méthode de Gauss. On obtient

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

donc $b \in \text{Im } A$.

(c) On utilise la méthode de Gauss, on est conduit à des équations incompatibles, donc il n'y a pas de solution ($b \notin \text{Im } A$).