Corrigé du devoir 4

TD4-Exercice 2

1. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}$, on note $p_n(s) = \text{dét } (sI - A)$.

   En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$
\begin{aligned}
p_n(s) &= s \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & s & -1 & 0 \\ 0 & & \cdots & s & -1 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \cdots & \alpha_1 + s \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\alpha_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & s & -1 & 0 \\ \vdots & & \cdots & s & -1 \end{vmatrix} \\
&= sp_{n-1}(s) + (-1)^{n+1}\alpha_n(-1)^{n-1} = sp_{n-1}(s) + \alpha_n.
\end{aligned}
$$

   On trouve une relation entre p_n et p_{n-1}, d'où l'idée d'une démonstration par récurrence.

   Afin d'établir la relation à démontrer ensuite, on calcule $p_1, p_2, ...$

$$
p_1(s) = s+\alpha_1, \;\; p_2(s) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 + s \end{vmatrix} = s^2+\alpha_1 s+\alpha_2, \;\; p_3(s) = sp_2(s)+\alpha_3 = s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3.
$$

   Il semble donc que

$$
p_n(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n.
$$

   Cette relation est bien vérifiée pour $n = 1, 2, 3$.

   On suppose qu'elle est vraie pour $n-1$, en utilisant la relation entre p_n et p_{n-1}, on obtient

$$
p_n(s) = sp_{n-1}(s)+\alpha_n = s(s^{n-1}+\alpha_1 s^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-2}s+\alpha_{n-1})+\alpha_n = s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n.
$$

   Ce qui termine la démonstration.

2. On résout

$$
AY = \lambda Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = \lambda y_1 \\ y_3 = \lambda y_2 = \lambda^2 y_1 \\ \ldots \\ y_n = \lambda y_{n-1} = \lambda^{n-1} y_1 \\ -\alpha_n y_1 - \alpha_{n-1} y_2 - ... - \alpha_1 y_n = \lambda y_n \end{cases} .
$$

   La dernière équation s'écrit :

$$
y_1(-\alpha_n - \alpha_{n-1}\lambda^2 - ... - \alpha_1\lambda^{n-1} - \lambda^n) = 0.
$$

   Puisque λ est racine du polynôme caractéristique, cette équation est vérifiée pour tout y_1,

   on a donc : $AY = \lambda Y \Leftrightarrow Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

   Les vecteurs propres qui en plus sont non nuls vérifient donc

$$
Y = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \ldots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta \neq 0.
$$

TD4-Exercice 3

- Si $(\lambda,\ Y)$ est un couple propre de la matrice A, alors on a $AY = \lambda Y$, on a donc
$$(A + \alpha I)Y = (\lambda + \alpha)Y,$$
le vecteur Y est non nul, donc $(\lambda + \alpha,\ Y)$ est un couple propre de la matrice $A + \alpha I$.
- De même $A^2Y = A(AY) = \lambda(AY) = \lambda^2 Y$, le vecteur Y est non nul, donc (λ^2, Y) est un couple propre de la matrice A^2.

TD4-Exercice 5

1. (a)
$$\begin{aligned} 0 \text{ est valeur propre de } AB &\Leftrightarrow \text{dét } (AB) = 0 \Leftrightarrow \text{dét } A \text{ dét } B = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{dét } (BA) = 0 \Leftrightarrow 0 \text{ est valeur propre de } BA. \end{aligned}$$
La démonstration précédente ne peut se faire que pour des matrices carrées.

   (b) On vient de démontrer la propriété pour $\lambda = 0$, donc si nécessaire on peut supposer maintenant $\lambda \neq 0$.
Si (λ, Y) est un couple propre de AB, alors on a
$$ABY = \lambda Y \Rightarrow BA(By) = \lambda BY.$$
Il faut maintenant montrer que $BY \neq 0$, c'est là que l'hypothèse $\lambda \neq 0$ est utile, en effet on peut raisonner par l'absurde :
$$BY = 0 \Rightarrow ABY = 0 \Rightarrow \lambda Y = 0,$$
or il est impossible que $\lambda Y = 0$ puisque $\lambda \neq 0$ et $Y \neq 0$ (vecteur propre). Donc $BY \neq 0$, donc BY est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.
On vient de montrer qu'une valeur propre non nulle de AB est également valeur propre de BA. On montrerait de même qu'une valeur propre non nulle de BA est également valeur propre de AB. On a montré dans la question 1.(a) le résultat pour les valeurs propres nulles. On peut donc conclure que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

2. (a) Ici les matrices ne sont pas carrées donc il est impossible de généraliser la question 1 (a), ce n'est pas grave puisque l'on ne demande pas de démontrer le résultat pour $\lambda = 0$, d'ailleurs le résultat est faux en général.
En revanche pour $\lambda \neq 0$ on peut utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 1(b).On démontre là aussi que BY est vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.

   (b) Comme on le fait très souvent pour montrer qu'une famille est libre, on montre que
$$\alpha_1 BY_1 + \alpha_2 BY_2 + \ldots + \alpha_p BY_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$
On doit utiliser pour cela le fait que la famille $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est une base donc est libre et que ce sont des vecteurs propres de AB, d'où l'idée de faire apparaitre ABY_i.

$$\begin{aligned} \alpha_1 BY_1 + \alpha_2 BY_2 + \ldots + \alpha_p BY_p = 0 &\Rightarrow A(\alpha_1 BY_1 + \alpha_2 BY_2 + \ldots + \alpha_p BY_p) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 ABY_1 + \alpha_2 ABY_2 + \ldots + \alpha_p ABY_p = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_p Y_p) = 0 \text{ (vect propres de } AB) \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0 \text{ car la famille est libre.} \end{aligned}$$

(c) Puisque $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est une une base de V_λ, alors dim $V_\lambda = p$.
On a démontré (2.(a)) que les vecteurs $BY_1, BY_2, \ldots, BY_p$ appartiennent à W_λ, on a démontré (2.(b)) qu'ils constituaient une famille libre, on en déduit donc dim $W_\lambda \geq p$.
Donc dim $V_\lambda \leq$ dim W_λ.

(d) A et B jouent des rôles similaires. En échangeant les rôles, on pourrait donc démontrer que dim $W_\lambda \leq$ dim V_λ.
On a donc l'égalité dim $V_\lambda =$ dim W_λ.

3. Après calculs, on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0 \text{ (double)}, \lambda_2 = 2, Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) On peut utiliser l'exercice 16 du chapitre 2, on y a démontré que rang $XY^T = 1$. Puisque $XY^T \in \mathcal{M}_{nn}$ avec $n > 1$, la matrice XY^T n'est donc pas inversible (voir chapitre 2), donc 0 est valeur propre de XY^T.
Plus précisément :

$$\text{rang } XY^T + \text{dim Ker } XY^T = n \Rightarrow \text{dim Ker } XY^T = n - 1.$$

Or $V_0 =$ Ker XY^T, donc dim $V_0 = n - 1$. La multiplicité de la valeur propre 0 est donc supérieure ou égale à $n - 1$. On connait donc déjà $n - 1$ valeurs propres $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{n-1} = 0$. Il reste à trouver la dernière.

(b) Si on note $\alpha = X^T Y = Y^T X$, ce scalaire est différent de zéro, donc la matrice $Y^T X$ admet une (la seule) valeur propre non nulle : α.
En utilisant 2.(a), α est également valeur propre de XY^T, d'où $\mu_n = \alpha = X^T Y$.
Remarques supplémentaires :

- Que se passerait-il si $\alpha = 0$? Dans ce cas on ne peut plus appliquer la question 2.(a), que vaut μ_n dans ce cas ?
Comme souvent quand il ne manque qu'une valeur propre, on peut se servir de la trace : $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1} + \mu_n = \mu_n =$ trace XY^T.
Encore dans le TD2 on avait démontré que lorsque les matrices ont des tailles cohérentes, alors trace $(MN) =$ trace (NM). En utilisant ce résultat ici, on obtient
$\mu_n =$ trace $XY^T =$ trace $Y^T X = \alpha = 0$.
Dans ce cas toutes les valeurs propres de XY^T sont nulles.
- Dans le cas où $\alpha \neq 0$, on a vu que α était une valeur propre simple de la matrice XY^T, on peut voir facilement que X est alors un vecteur propre associé, en effet $(XY^T)X = X(Y^T X) = \alpha X$. Puisque cette valeur propre est simple, dim $(V_\alpha) = 1$ tous les vecteurs propres associés à α s'écrivent donc αX : c'est bien le résultat que l'on avait obtenu dans la question 3.

5. (a) Comme précédemment

$$\text{rang } A = 1 < n \Rightarrow A \text{ non inversible } \Rightarrow 0 \text{ est valeur propre de } A.$$

De plus dim $V_0 =$ dim Ker $A = n - 1$ implique que 0 est de multiplicité supérieure ou égale à $n - 1$, donc $\mu_0 = \mu_1 = ... = \mu_{n-1} = 0$.
On utilise la trace de A et on obtient que $\mu_n =$ trace (A).
En conclusion 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$, trace (A) est valeur propre simple.

(b) En appliquant le même raisonnement, on trouve que 0 est valeur propre de multiplicité n

(c) Il faut distinguer les cas trace $(A) = 0$ et trace $(A) \neq 0$.

- Si trace $(A) = 0$,
  0 est valeur propre de multiplicité $r = n$ et $d = \dim V_0 = n - 1 < n$,
  donc la matrice A n'est pas diagonalisable.
  Un autre raisonnement possible, si la matrice était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc A serait nulle ce qui est impossible puisque rang $A = 1$.
- Si trace $(A) \neq 0$,
  0 est valeur propre de multiplicité $r = n - 1$ et $d = \dim V_0 = n - 1 = r$,
  $\alpha =$ trace A est valeur propre simple, la dimension du sous-espace propre vaut donc 1.
  La matrice A est diagonalisable.

En conclusion
A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ trace $A \neq 0$.

TD4-Exercice 8

1. La matrice A admet 1 comme valeur propre double, donc si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice identité, donc elle serait égale à la matrice identité, ce qui n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable.
2. Si A est diagonalisable, si λ est la seule valeur propre de A, alors A est semblable à λI, donc $A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda I$.

TD4-Exercice 11

1. (a) On calcule le polynôme caractéristique et on obtient $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, d'où les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ double et $\lambda_2 = 2$ simple.

   (b) Pour calculer la dimension de Ker $(A - I)$, on ne va pas en chercher une base en résolvant $(A - I)x = 0$, cela reviendrait à déterminer les vecteurs propres associés à λ_1 et l'énoncé demande de ne pas calculer ces vecteurs maintenant.
   Une autre idée consiste à calculer le rang de $A - I$. On a $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   En regardant les lignes de cette matrice, on constate que $L_2 = L_3$,
   donc rang $(A - I) < 3$. De plus en utilisant une matrice extraite $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,
   donc rang $(A - I) \geq 2$.
   On en déduit rang $(A - I) = 2$, donc
   $$\dim (\text{Ker } (A - I) = 1.$$
   Ker $(A - 2I)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre simple $\lambda_2 = 2$, donc on sait par avance que sa dimension sera égale à 1 (on a toujours $1 \leq d \leq r$).
   $$\dim (\text{Ker } (A - 2I) = 1.$$
   On calcule : $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Là encore le rang de la matrice est évident, la première ligne est nulle, les lignes 2 et 3 sont égales donc rang $(A - I)^2 \leq 1$, de plus la matrice n'est pas nulle, donc rang $(A - I)^2 = 1$. On en déduit que
   $$\dim \text{Ker } (A - I)^2 = 2.$$

2. (a) $x \in \text{Ker } (A-I) \Rightarrow (A-I)x = 0 \Rightarrow (A-I)(A-I)x = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } (A-I)^2$, d'où l'inclusion $\text{Ker } (A-I) \subset \text{Ker } (A-I)^2$.
On pourrait montrer un résultat plus général : quand B est une matrice carrée on a toujours : $\text{Ker } B \subset \text{Ker } B^2 \subset \text{Ker } B^3 \subset \ldots\ldots$
(b) Ici $\text{Ker } (A-I)$ et $\text{Ker } (A-I)^2$ n'ont pas la même dimension donc l'inclusion est stricte, donc il existe un vecteur z tel que :
$$\begin{cases} z \in \text{Ker } (A-I)^2 \\ z \notin \text{Ker } (A-I) \end{cases}$$
(c) Etant donné un vecteur z défini comme précédemmment, on note $y_1 = (A-I)z$, alors
$$\begin{cases} z \in \text{Ker } (A-I)^2 \\ z \notin \text{Ker } (A-I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A-I)y_1 = 0 \\ y_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à } 1$$

3. On doit donc montrer que
$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \beta z = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$$
Pour ce faire il faut exploiter le seul renseignement que l'on connaisse sur z à savoir $(A-I)z = y_1$. On sait d'autre part que $Ay_1 = y_1, Ay_2 = 2y_2$ et de plus, puisque ces 2 vecteurs propres sont associés à des valeur propres distinctes, ils forment une famille libre, en particulier ils sont non nuls.

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \beta z = 0 \Rightarrow (A-I)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \beta z) = 0 \Rightarrow \alpha_2 y_2 + \beta y_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \beta = 0.$
On termine
$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \beta z = 0 \text{ et } \alpha_2 = \beta = 0 \Rightarrow \alpha_1 y_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$
Donc les 3 coefficients sont nuls, la famille $\{y_1, y_2, z\}$ est libre. Ces 3 vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. (a) Comme démontré en cours la matrice de u dans la base canonique est A. Il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique et d'écrire leur composantes dans la base canonique, colonne par colonne.
(b) On écrit les composantes de $u(y_2), u(y_1), u(z)$ dans la base $\{y_2, y_1, z\}$.
On a $u(y_2) = Ay_2 = 2y_2, u(y_1) = Ay_1 = y_1, u(z) = Az = y_1 + z$, d'où la matrice T associée à u quand on choisit la base $\{y_2, y_1, z\}$: $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(c) Comme on l'a vu dans le chapitre 2 si A et T sont associées à la même application u quand on choisit respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $A = PTP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ici $\mathcal{B}$ est la base canonique, $\mathcal{B}' = \{y_2, y_1, z\}$, donc P contient les composantes des vecteurs y_2, y_1, z dans la base canonique.
(d) On calcule les vecteurs propres.
Un vecteur y_1 possible est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, un vecteur y_2 possible est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on résout $(A-I)z = y_1$, un vecteur z possible est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs ne sont pas uniques puisque, dans chacun des cas, les matrices des systèmes à résoudre, c'est à dire $A-I$ ou $A-2I$, ne sont pas inversibles (par définition des valeurs propres).