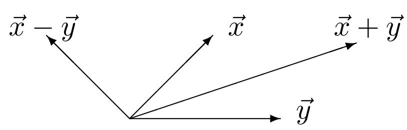
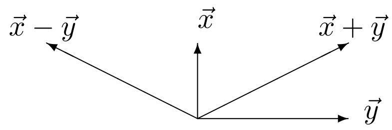
Corrigé du devoir 5

TD5-Exercice 3

1. $\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 = < \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} > = < \vec{x},\vec{x} > + < \vec{y},\vec{y} > +2 < \vec{x},\vec{y} >$
   $\| \vec{x}-\vec{y} \|^2 = < \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} > = < \vec{x},\vec{x} > + < \vec{y},\vec{y} > -2 < \vec{x},\vec{y} >$
   $\| \vec{x}+\vec{y} \| = \| \vec{x}-\vec{y} \| \Leftrightarrow \| \vec{x}+\vec{y} \|^2 = \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 \Leftrightarrow 4 < \vec{x},\vec{y} > = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux.





2. $< \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} > = < \vec{x},\vec{x} > + < \vec{y},\vec{y} > +2 < \vec{x},\vec{y} >$
   donc $\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$ si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux

TD5-Exercice 4

1. (a) On montre l'égalité par double inclusion. Par définition $\{\vec{0}\}^\perp \subset E$.
   D'autre part pour tout vecteur de E, on a $< x, 0 >= 0$, donc tout vecteur de E appartient à $\{\vec{0}\}^\perp$, d'où l'autre inclusion.
   (b) $\vec{0} \in E^\perp$, donc $\{\vec{0}\} \subset E^\perp$
   D'autre part
   $$\vec{x} \in E^\perp \Longrightarrow \forall \vec{y} \in E < \vec{x},\vec{y} >= 0 \Longrightarrow < \vec{x},\vec{x} >= 0 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0},$$
   d'où l'autre inclusion.

2. On montre que $F \subset (F^\perp)^\perp$, c'est à dire, si $\vec{x} \in F$, alors $\vec{x} \in (F^\perp)^\perp$.
   En effet pour tout $\vec{y} \in F^\perp$, on a $< \vec{x},\vec{y} >= 0$, car les vecteurs de $F^\perp$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de F, donc en particulier à $\vec{x}$.
   On va maintenant montrer que F et $(F^\perp)^\perp$ ont même dimension, ce qui permettra de conclure quant à l'égalité.
   On sait que
   $$E = F \oplus F^\perp = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp;$$
   Donc
   $$\dim E = \dim F + \dim (F^\perp) = \dim (F^\perp) + \dim ((F^\perp)^\perp) \Rightarrow \dim F = \dim ((F^\perp)^\perp)$$

3. Montrer que
   (a) On raisonne par double implication.
   On suppose que $F \subset G$ et on veut montrer que $F^\perp \subset G^\perp$, c'est à dire :
   $\vec{x} \in G^\perp \Rightarrow \vec{x} \in F^\perp$.
   $$\vec{x} \in G^\perp \Leftrightarrow \forall \vec{y} \in G < \vec{x},\vec{y} >= 0 \Rightarrow \forall \vec{y} \in F < \vec{x},\vec{y} >= 0 \Leftrightarrow \vec{x} \in F^\perp.$$
   En effet puisque F est inclus dans G, une propriété qui est vraie pour tout $\vec{y}$ de G est vraie pour tout $\vec{y}$ de F.
   Pour démontrer la réciproque, il suffit d'utiliser la question 2) et l'implication que l'on vient de démontrer :
   $$G^\perp \subset F^\perp \Rightarrow (F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp \Leftrightarrow F \subset G.$$

(b) On montre une double inclusion.

$$F \subset (F+G) \Rightarrow (F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}.$$
$$G \subset (F+G) \Rightarrow (F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}.$$

Donc
$$(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

D'autre part :
Soit $\vec{x} \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, on veut montrer que $\vec{x} \in (F+G)^{\perp}$, c'est à dire

$$\forall \vec{z} \in F+G,\ \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0.$$

$\vec{z} \in F+G$ s'écrit $z = z_1 + z_2$, avec $z_1 \in F$, $z_2 \in G$, par bilinéarité du produit scalaire $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z}_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ car $\vec{x} \in F^{\perp}$, $\vec{x} \in G^{\perp}$.
Ce qui termine de démontrer l'autre inclusion