

Corrigé du devoir 1

Chap 1 - Exercice 6

1. • On montre que $A \tilde{+} B$ est un sous-espace vectoriel.
 - $\vec{0} \in A, \vec{0} \in B$, donc $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in A \tilde{+} B$, l'ensemble n'est donc pas vide.
 - Soient $\vec{x}_1 = \vec{a}_1 \hat{+} \vec{b}_1$ et $\vec{x}_2 = \vec{a}_2 \hat{+} \vec{b}_2$ avec $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in B$ alors en utilisant la commutativité et l'associativité de la loi $\hat{+}$ on obtient :

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (\vec{a}_1 \hat{+} \vec{b}_1) \hat{+} (\vec{a}_2 \hat{+} \vec{b}_2) = (\vec{a}_1 \hat{+} \vec{a}_2) \hat{+} (\vec{b}_1 \hat{+} \vec{b}_2).$$

Or A et B sont des sous espaces vectoriels, donc $(\vec{a}_1 \hat{+} \vec{a}_2) \in A, (\vec{b}_1 \hat{+} \vec{b}_2) \in B$, donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A \tilde{+} B$.

- De même en utilisant les propriétés de la loi externe :

$$\lambda \vec{x}_1 = \lambda(\vec{a}_1 \hat{+} \vec{b}_1) = \lambda \vec{a}_1 \hat{+} \lambda \vec{b}_1.$$

Or A et B sont des sous espaces vectoriels, donc $\lambda \vec{a}_1 \in A, \lambda \vec{b}_1 \in B$, donc $\lambda \vec{x}_1 \in A \tilde{+} B$.

- $A \subset A \tilde{+} B$, en effet :

$$\vec{x} \in A \Rightarrow \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in A \tilde{+} B, \text{ puisque } \vec{x} \in A, \vec{0} \in B.$$

De même $B \subset A \tilde{+} B$.

- Soit C un sous-espace vectoriel contenant A et B , montrons que $A \tilde{+} B \subset C$.
Soit $\vec{x} = \vec{a} \hat{+} \vec{b} \in A \tilde{+} B$ or $\vec{a} \in C$ et $\vec{b} \in C$ donc $\vec{x} \in C$ (sev). Donc $A \tilde{+} B \subset C$.
 - Donc $A \tilde{+} B$ est le plus petit sev qui contienne A et B .
2. • Puisque si A est un sev de E et B est un sev de E , alors (question précédente) $A \tilde{+} B$ est un sev de E , alors la loi $\tilde{+}$ est une loi de composition interne de $\mathcal{E}$.
 - Pour montrer l'associativité il faut montrer que :

$$(A \tilde{+} B) \tilde{+} C = A \tilde{+} (B \tilde{+} C).$$

Comme d'habitude pour montrer l'égalité entre deux ensembles, on raisonne par équivalence si c'est possible, ou alors par double implication ce qui revient à démontrer une double inclusion :

$$E = F \Leftrightarrow \{\vec{x} \in E \Leftrightarrow \vec{x} \in F\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \in E \Rightarrow \vec{x} \in F \\ \vec{x} \in F \Rightarrow \vec{x} \in E \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E \subset F \\ F \subset E \end{array} \right.$$

Ici on peut raisonner par équivalence :

$$\vec{x} \in (A \tilde{+} B) \tilde{+} C \Leftrightarrow \vec{x} = (\vec{a} \hat{+} \vec{b}) \hat{+} \vec{c} = \vec{a} \hat{+} (\vec{b} \hat{+} \vec{c}) \Leftrightarrow \vec{x} \in A \tilde{+} (B \tilde{+} C).$$

On a noté $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des vecteurs de A, B, C .

- La loi est commutative, on montre que $A \tilde{+} B = B \tilde{+} A$.

$$\vec{x} \in A \tilde{+} B \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} \hat{+} \vec{b} = \vec{b} \hat{+} \vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} \in B \tilde{+} A.$$

- L'élément neutre est l'ensemble $O = \{\vec{0}\}$:

Si $\vec{x} \in A \tilde{+} O$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{a} \hat{+} \vec{0}$, avec $\vec{a} \in A$, donc $\vec{x} = \vec{a}$, donc $\vec{x} \in A$.

Réciproquement si $\vec{x} \in A$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{x} \hat{+} \vec{0}$, donc $\vec{x} \in A \tilde{+} O$.

- Etant donné A , on cherche un sous-espace vectoriel B tel que $A \tilde{+} B = O$, si B existait on aurait alors

$$A \subset A \tilde{+} B = O = \{\vec{0}\}.$$

Ceci est impossible si $A \neq \{\vec{0}\}$.

- Tout sev est idempotent, c'est à dire $A = A \tilde{+} A$. On va raisonner par double inclusion :

$$\vec{x} \in A \Rightarrow \vec{x} = \vec{x} \hat{+} \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in A \tilde{+} A \text{ puisque } \vec{x} \in A \text{ et } \vec{0} \in A.$$

Réciproquement :

$$\vec{x} \in A \tilde{+} A \Rightarrow \vec{x} = \vec{a}_1 \hat{+} \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{x} \in A \text{ puisque } A \text{ est un sev, donc stable pour la loi } \hat{+}$$

3. On montre facilement que :

$$A \tilde{+} (B \cap C) \subset (A \tilde{+} B) \cap (A \tilde{+} C).$$

Si $\vec{x} \in A \tilde{+} (B \cap C)$, alors $\vec{x} = \vec{a} \hat{+} \vec{d}$, avec $\vec{d} \in B \cap C$, donc $\vec{d} \in B$, donc $\vec{x} \in A \tilde{+} B$.

On montrerait de même que $\vec{x} \in A \tilde{+} C$ et donc $\vec{x} \in (A \tilde{+} B) \cap (A \tilde{+} C)$.

Pour montrer la distributivité, on n'arrive pas à montrer que dans le cas général :

$$(A \tilde{+} B) \cap (A \tilde{+} C) \subset A \tilde{+} (B \cap C),$$

donc on cherche un exemple pour lequel cette inclusion n'est pas vérifiée.

On définit

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\}, B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0\}, C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = x_2\}$$

On montre que $A \tilde{+} B = \mathbb{R}^2$, pour cela il faut montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B .

On montre de même que $A \tilde{+} C = \mathbb{R}^2$.

On montre que $B \cap C = \{\vec{0}\} = O$.

On a donc $(A \tilde{+} B) \cap (A \tilde{+} C) = \mathbb{R}^2$, $A \tilde{+} (B \cap C) = A \tilde{+} O = A$.

L'inclusion $(A \tilde{+} B) \cap (A \tilde{+} C) \subset A \tilde{+} (B \cap C)$ n'est donc pas vérifiée. Donc il n'y a pas distributivité.

Chap 1 - Exercice 15

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ est une base de E donc $\dim E = n$. La famille $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ contient n vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est libre pour conclure que c'est une base.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2 + \dots + \alpha_n \vec{f}_n = 0 &\Leftrightarrow \alpha_1 (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2 (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \dots + \alpha_{n-1} (\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n) + \alpha_n \vec{e}_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 \vec{e}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{e}_2 + \dots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) \vec{e}_{n-1} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) \vec{e}_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} = 0 \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_3\}$ est une famille libre, donc si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, tous les coefficients sont nuls.

On aurait pu, au lieu de montrer que la famille $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ était libre, montrer qu'elle était génératrice, il aurait alors fallu montrer que pour tout vecteur de E , donc pour tout vecteur $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$, il existe des coefficients $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ (qui dépendent de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) tels que $\vec{x} = \beta_1 \vec{f}_1 + \beta_2 \vec{f}_2 + \dots + \beta_n \vec{f}_n$.

Chap 1 - Exercice 16

$\vec{v}_2 \in \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$ donc $\exists \alpha, \beta$ tels que $\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_3$.

On a une combinaison linéaire des 3 vecteurs avec des coefficients non tous nuls (le coefficient de $\vec{v}_2$ est 1) donc la famille est liée.

Attention : on doit pouvoir affirmer que les coefficients non tous nuls ! (donc pas d'inconnus pour les 3 coefficients)

La réciproque est fausse : il suffit de voir que si l'on prend $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ et $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ libre, les 3 vecteurs sont liés mais les 2 sous-espaces vectoriels sont différents.

En effet, $\dim \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \dim \text{vect}\langle \vec{v}_1 \rangle = 1$ et $\dim \text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = 2$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, prenons $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = (1, 0)$ et $\vec{v}_3 = (0, 1)$, on a $\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \text{vect}\langle \vec{v}_1 \rangle$ qui est une droite vectorielle et $\text{vect}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^2$.