2. Calculer en (grands) nombres entiers

1. Le grand O de Landau
2. Ecriture en base b
3. Coût du stockage
4. Coût des opérations élémentaires $(+, -, \cdot, /)$

1. le grand O de Landau

D'abord, un outil pour comparer des suites :

Définition (grand O de Landau)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

$$u_n = O(w_n) \overset{\text{déf}}{\iff} \exists\lambda > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \Longrightarrow u_n \leq \lambda w_n$$

Remarques :

1. en français : à partir d'un certain rang, u_n est majoré par une constante fois w_n.
2. utilisation : u_n est donnée, on cherche w_n la plus simple et la plus proche possible (idéalement $w_n = O(u_n)$ aussi !) ...
3. nombreux exemples en TD

2. Ecriture en base b

Soit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

Théorème (écriture en base $b \geq 2$)

Tout entier $x \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique comme :

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k, \quad où \ : \begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!], & 0 \leq a_k < b \\ a_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : le résultat est évident si $x < b$.
Conclure par un raisonnement par récurrence qui utilisera la division euclidienne (exercice). $\square$

<u>Notations</u> : n est le nombre de chiffres en base b de x.

$$x \overset{\text{notation}}{=} [a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]_b$$

nombre de chiffres en base b

Lemme (ma formule préférée)

$$(b-1)(1+b+\cdots+b^n) = b^{n+1}-1$$

Proposition (nombre de chiffres en base b)

L'entier x s'écrit avec $N_b(x) = n$ chiffres en base b si et seulement si

$$b^{n-1} \leq x < b^n$$

On a donc :

$$N_b(x) = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right] + 1 = O\left(\ln(x)\right)$$

Démonstration : exercice. $\square$

comparaison d'entiers écrits en base b

Proposition (l'ordre est lexicographique sur les chiffres)

Soient $x = [a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]$ *et* $x' = [a'_{n'-1}, \cdots, a'_1, a'_0]$ *deux entiers écrits en base* b.

1. *Si* $n < n'$ *(resp.* $n' < n$*) alors* $x < x'$ *(resp.* $x' < x$*).*
2. *Si* $n = n'$*, désignons par* p *le plus grand entier tel que* $a_p \neq a'_p$*. Alors, si* $p = 0$ *on a* $x = x'$*, et si* $p > 0$ *on a :*

$$x < x' \iff a_p < a'_p$$

<u>Démonstration</u> : exercice. $\square$

3. Coût du stockage

Désignons par $C(x)$ la quantité de mémoire consommée pour le stockage d'un entier x.
Hypothèse (gratuite ?) : Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in [\![0, b]\!], \qquad C(x) \leq c$$

Proposition (coût du stockage)

Si l'entier x s'écrit avec n chiffres en base b, son coût de stockage est tel que :

$$C(x) = O(n) = O\left(\ln(x)\right)$$

Démonstration : $C(x) \leq cn$. $\square$

4. Coût des opérations élémentaires

Le symbole $*$ représente l'une (quelconque) des quatre opérations élémentaires : $+$, $-$, $\cdot$, $/$

Désignons par $C_*(x, x')$ le coût ($=$ le temps ?) de calcul de $x * x'$.

Hypothèse (gratuite ?) : Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x, x' \in [\![0, b]\!], \qquad C_*(x, x') \leq c$$

principe d'évaluation des coûts de calcul

Soient x et x' deux entiers écrits en base b.

$$C_*(x, x') = O\,(\text{nombre d'opérations élémentaires sur les chiffres})$$

Coût des opérations élémentaires (2)

Soient x et x' deux entiers écrits en base b. Les opérations sont effectuées par les “algorithmes de l'école primaire” sur les chiffres en base b.

Addition

$$\max\left(N_b(x), N_b(x')\right) \leq N_b(x+x') \leq \max\left(N_b(x), N_b(x')\right) + 1$$

$$C_+(x,x') = O\left(\max\left(N_b(x), N_b(x')\right)\right) = O\left(\max\left(\ln(x), \ln(x')\right)\right)$$

Soustraction

$$N_b(x-x') \leq \max\left(N_b(x), N_b(x')\right)$$

$$C_-(x,x') = O\left(\max\left(N_b(x), N_b(x')\right)\right) = O\left(\max\left(\ln(x), \ln(x')\right)\right)$$

Coût des opérations élémentaires (3)

Multiplication

$$N_b(x) + N_b(x') \leq N_b(x \cdot x') \leq N_b(x) + N_b(x') + 2$$

$$C_{\cdot}(x, x') = O\left(N_b(x) N_b(x')\right) = O\left(\ln(x)\ln(x')\right)$$

Division euclidienne : $x' = qx + r$ (avec $x' > x$)

$$N_b(r) \leq N_b(x) \quad \text{et} \qquad N_b(q) \leq N_b(x') - N_b(x) + 1$$

$$C_{/}(x, x') = O\left(N_b(x')(N_b(x) - N_b(x'))\right)$$