3. Description des structures

Voici 4 (pour l'instant) structures (dont on peut équiper un ensemble) qui "s'emboîtent" comme des poupées russes :

1. monoïde ;
2. groupe ;
3. anneau ;
4. corps.

1. Structure de monoïde

Soit E un ensemble (non vide).

Définition (monoïde)

E est muni d'une structure de monoïde s'il existe une loi de composition interne (ou opération)

$$\begin{array}{rcl} * : E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

telle que :

(i) $*$ admet un élément neutre :

$$(\exists e \in E)(\forall a \in E) \qquad a * e = e * a = a$$

(ii) $*$ est associative :

$$(\forall a, b, c \in E) \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$$

Structure de monoïde (2)

- On dit que $(E, *, e)$ est un monoïde. Si pas ambiguïté, on dit aussi que $(E, *)$, ou simplement E, est un monoïde.
- Un synonyme de monoïde : demi-groupe.
- Un même ensemble admet plusieurs structures de monoïde, par exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ et $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ sont des monoïdes (non isomorphes).
- Exercice de compréhension : Montrer l'unicité de l'élément neutre, *i.e.* une loi de composition interne sur E admet au plus un élément neutre.

2. Structure de groupe

Soit E un ensemble (non vide).

Définition (groupe)

E est muni d'une structure de groupe s'il existe une loi de composition interne (ou opération)

$$\begin{array}{rccc} * : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (a, b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

telle que :

(i) $(E, *, e)$ est un monoïde ;

(ii) tout élément de E admet un symétrique :

$$(\forall a \in E)(\exists b \in E) \qquad a * b = b * a = e$$

Structure de groupe (2)

Exercices de compréhension :

1. Montrer l'unicité du symétrique.
2. Simplification dans un groupe $(E, *, e)$:

$$(\forall a, x, y \in E) \qquad (a * x = a * y) \implies x = y$$

Remarques :

- Notation multiplicative : $(G, \cdot, 1)$, le symétrique de $x \in G$ s'appelle l'inverse de x et se note x^{-1}
- Notation additive : $(G, +, 0)$, le symétrique de $x \in G$ s'appelle l'opposé de x et se note $-x$
- La notation additive est habituellement réservé aux groupes abéliens (= commutatif).
- $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$ sont des groupes.
- $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ sont des monoïdes qui ne sont pas des groupes.

3. Structure d'anneau (unitaire)

Soit E un ensemble (non vide).

Définition (anneau)

E est muni d'une structure d'anneau s'il existe deux lois de composition interne, notées $+$ et $*$, telles que :

(i) $(E, +, 0)$ est un groupe abélien ;

(ii) $(E, *, e)$ est un monoïde ;

(iii) $*$ est distributive par rapport à $+$:

$$(\forall a, b, c \in E) \qquad a * (b + c) = a * b + a * c \ \text{ et } \ (a + b) * c = a * c + b * c$$

Structure d'anneau (2)

- en anglais : ring
- un anneau $(A, +, 0, *, e)$ est dit commutatif si sa loi $*$ l'est.
- $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1)$ sont des anneaux commutatifs.

4. Structure de corps

Soit E un ensemble (non vide).

Définition (corps)

E est muni d'une structure de corps s'il existe deux lois de composition interne, notées $+$ et $*$, telles que :

(i) $(E, +, 0, *, e)$ est un anneau ;

(ii) $(E \setminus \{0\}, *, e)$ est un groupe (*i.e.* tout élément distinct de 0 admet un symétrique pour $*$).

- en anglais : field
- $(\mathbb{Q}, +, 0, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$ sont des corps.
- $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$ est un anneau qui n'est pas un corps.