4. Des flèches et des morphismes

1. application, injection, surjection, bijection
2. composée, diagramme commutatif
3. relation d'équivalence, partition
4. quotient, propriété universelle, problème universel
5. factorisation canonique d'une application
6. morphismes : des flèches qui respectent les structures

1. application, injection, surjection, bijection

Soient A et B deux ensembles (non vides).
$F \subset A \times B$ définit une application f de A dans B si F est tel que :

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \qquad (x, y) \in F.$$

Cet unique élément de B ainsi associé à $x \in A$ se note $f(x)$, et s'appelle l'image de x par f. En pratique, on retiendra cette “définition bancale” :

Définition (application)

On a une application $f : A \to B$ si chaque élément de A a une image unique par f, *i.e.*

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \qquad f(x) = y$$

diagramme :

$$A \xrightarrow{f} B$$

injection, surjection, bijection

Définition (injection, surjection, bijection)

Une application $f : A \to B$ est dite

- injective si chaque élément de B admet au plus un antécédent par f, *i.e.*

$$(\forall x, x' \in A) \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

- surjective si chaque élément de B admet au moins un antécédent par f, *i.e.*

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) \qquad f(x) = y$$

- bijective si elle est injective et surjective, *i.e.*

$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A) \qquad f(x) = y$$

2. composée, diagramme commutatif

Définition (composée de deux applications)

La composée de deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$ est l'application $g \circ f : A \to C$ définie par

$$(\forall x \in A) \qquad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Proposition

1. *f et g injectives $\implies$ $g \circ f$ aussi.*
2. *f et g surjectives $\implies$ $g \circ f$ aussi.*
3. *$g \circ f$ injective $\implies$ f aussi.*
4. *$g \circ f$ surjective $\implies$ g aussi.*

Démonstration : exercice. $\square$

3. relation d'équivalence, partition

Soit A un ensemble (non vide).
Une relation sur A est une partie de $A \times A$. Pour une relation $\mathcal{R} \subset A \times A$, on note usuellement :

$$x\mathcal{R}x' \quad \overset{\text{notation}}{\Longleftrightarrow} \quad (x, x') \in \mathcal{R}$$

Définition (relation d'équivalence)

$\mathcal{R} \subset A \times A$ est une relation d'équivalence sur A si $\mathcal{R}$ est

(i) réflexive : $(\forall x \in A) \qquad x\mathcal{R}x$

(ii) symétrique : $(\forall x, x' \in A) \qquad x\mathcal{R}x' \implies x'\mathcal{R}x$

(iii) transitive : $(\forall x, x', x'' \in A) \qquad \left(x\mathcal{R}x' \text{ et } x'\mathcal{R}x''\right) \implies x\mathcal{R}x''$

la classe d'équivalence (pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$) de $x \in A$ est l'ensemble des éléments de A en relation avec x :

$$C_x \overset{\text{déf.}}{=} \left\{x' \in A \ : \quad x'\mathcal{R}x\right\}$$

partition

Soit A un ensemble (non vide).

Définition (partition)

Une partition de A est un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de A (*i.e.* $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(A)$), tel que :

(i) tous non vide : $(\forall U \in \mathcal{U}) \qquad U \neq \emptyset$

(ii) deux à deux disjoints : $(\forall U, U' \in \mathcal{U}) \qquad U \neq U' \implies U \cap U' = \emptyset$

(iii) recouvre A : $\displaystyle\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = A$

partition et relation d'équivalence

Proposition

1. *L'ensemble des classes d'équivalence pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A forme une partition de A.*
2. *Si $\mathcal{U}$ est une partition de A, alors*

$$x\mathcal{R}x' \quad \overset{\textit{déf.}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(\exists U \in \mathcal{U}, \quad x \in U \ \textit{ et } x' \in U\big)$$

définit une relation d'équivalence.

<u>Démonstration</u> : exercice. □

4. quotient, propriété universelle, problème universel

Soient A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A.

Définition (ensemble quotient, projection canonique)

• L'ensemble des classes d'équivalence de A pour $\mathcal{R}$ s'appelle l'ensemble quotient de A par $\mathcal{R}$ et se note $A/\mathcal{R}$.

$$A/\mathcal{R} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{C_x \ : \quad x \in A\}$$

• L'application

$$\begin{array}{rcl} \pi : A & \longrightarrow & A/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \pi(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} C_x \end{array}$$

est surjective et s'appelle la projection canonique (de A sur $A/\mathcal{R}$).

$$x\mathcal{R}x' \iff \pi(x) = \pi(x')$$

propriété universelle du quotient

Soient B un (autre) ensemble et $h : A/\mathcal{R} \to B$ une application.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f=h\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\mathcal{R} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

• Par construction $f = h \circ \pi$ vérifie

$$(*) \qquad x\mathcal{R}x' \implies f(x) = f(x')$$

• Réciproquement, pour toute application $f : A \to B$ vérifiant $(*)$, il existe une unique application $h : A/\mathcal{R} \to B$ qui rende commutatif le diagramme ci-dessus : IFS que $h(\pi(x)) = f(x')$, où $x' \in A$ est quelconque tel que $x' \in \pi(x)$.

• Cette propriété du couple $(A/\mathcal{R}, \pi)$ s'appelle une propriété universelle. On dit que $(A/\mathcal{R}, \pi)$ est solution d'un problème universel. Si elle existe, la solution d'un problème universel est toujours unique (à isomorphisme près).

le quotient comme solution d'un problème universel

Soient A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A.

Problème universel du quotient

Trouver un couple (E, p), où E est un ensemble et $p : A \to E$ est une application telle que $x\mathcal{R}x' \implies p(x) = p(x')$, vérifiant la propriété universelle :

$$(PU) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute } f : A \to B \text{ telle que } x\mathcal{R}x' \implies f(x) = f(x'), \\ \exists!\ h : E \to B \text{ qui rende commutatif le diagramme} \\ \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{h} & \\ E & & \end{array} \\ \text{(on dit que } f \text{ se factorise à travers } p\text{)} \end{array} \right.$$

$(A/\mathcal{R}, \pi)$ est une solution de ce problème universel (et il se trouve que π est surjective ...).

Unicité (à bijection unique près) du quotient

Théorème

$(A/\mathcal{R}, \pi)$ est l'unique solution du problème universel. Précisément, si (E, p) est une autre solution, alors il existe une unique bijection *$\varphi : A/\mathcal{R} \to E$ telle que ce diagramme commute :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & E \\ A/\mathcal{R} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & E \\ A/\mathcal{R} \arrow[ur, "h_1"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & A/\mathcal{R} \\ E \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & E \\ E \arrow[ur, "Id_E = h_1 \circ h_2"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & A/\mathcal{R} \\ A/\mathcal{R} \arrow[ur, "Id_{A/\mathcal{R}} = h_2 \circ h_1"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

5. factorisation canonique d'une application

Soit une application $f : A \to B$.

- image de f : $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf.}}{=} f(A) \overset{\text{déf.}}{=} \{f(x) \ : \ x \in A\} \xhookrightarrow{i} B$
- f définit une relation d'équivalence sur A par

$$x\mathcal{R}x' \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(x') \qquad (\text{“avoir même image par } f\text{”})$$

factorisation canonique

Il existe une unique bijection $\widetilde{f}$ qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
A/\mathcal{R} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration : exercice. $\square$

6. morphismes : des flèches qui respectent les structures

Racines et généralités :

(homo)morphisme : du grec `morphê`, forme. Un morphisme est une application $f : E \to E'$ qui respecte la forme des structures respectives de E et E'.

(préfixe) homo : du grec `homos`, semblable ; (dont l'usage tend à disparaître)
(préfixe) endo : du grec `endon`, dedans.
(préfixe) iso : du grec `isos`, égal.
(préfixe) auto : du grec `autos`, soi-même.

Un endomorphisme est un morphisme $f : E \to E$.
Un isomorphisme est un morphisme $f : E \to E'$ bijectif.
Un automorphisme est à la fois endo et iso-morphisme, c'est donc un morphisme $f : E \to E$ bijectif.

morphisme de monoïde

Définition (morphisme de monoïde)

Soient $(M, *, e)$ et $(M', *', e')$ deux monoïdes. Une application $f : M \to M'$ est un morphisme de monoïde si

(i) $f(e) = e'$

(ii) $(\forall x_1, x_2 \in M) \qquad f(x_1 * x_2) = f(x_1) *' f(x_2)$

• Si, de plus, $(M', *', e') = (M, *, e)$, on dit que f est un endomorphisme du monoïde $(M, *, e)$; et s'il est bijectif, qu'il s'agit d'un automorphisme.

• Un isomorphisme de monoïde est un morphisme de monoïde $f : M \to M'$ bijectif.

Exercices :

1. Montrer que les morphismes de monoïde $f : (\mathbb{N}, +, 0) \to (M, *, e)$ sont déterminés par la donnée de $f(1)$. A-t-on une propriété analogue pour les morphismes $f : (\mathbb{N}, \cdot, 1) \to (M, *, e)$?
2. Montrer que les monoïdes $(\mathbb{N}, +, 0)$ et $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ ne sont pas isomorphes.

morphisme de groupe

Définition (morphisme de groupe)

Soient $(G, *, e)$ et $(G', *', e')$ deux groupes. Une application $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe si

$$(\forall x_1, x_2 \in G) \qquad f(x_1 * x_2) = f(x_1) *' f(x_2)$$

Exercices :

1. Montrer que $f(e) = e'$. Un morphisme de groupe est donc aussi un morphisme des monoïdes sous-jacents.
2. Montrer que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ (en notation multiplicative pour le symétrique, dans G comme dans G').

morphisme d'anneau

Définition (morphisme d'anneau)

Soient $(A, +, 0, *, 1)$ et $(A', +', 0', *', 1')$ deux anneaux. Une application $f : A \to A'$ est un morphisme d'anneau si

(i) $(\forall x_1, x_2 \in A) \qquad f(x_1 + x_2) = f(x_1) +' f(x_2)$

(ii) $f(1) = 1'$

(iii) $(\forall x_1, x_2 \in A) \qquad f(x_1 * x_2) = f(x_1) *' f(x_2)$

Autrement dit, un morphisme d'anneau est un morphisme des groupes (additifs) sous-jacents, et un morphisme des monoïdes (multiplicatifs) sous-jacents.