5. Produits de groupes

1. Produit direct

Définition-proposition (produit direct)

Le produit (direct) des groupes $(G_1, *_1, e_1)$ *et* $(G_2, *_2, e_2)$ *est le groupe* $(G, *, e)$ *où :*

- $G = G_1 \times G_2$
- $$\begin{array}{rcl} * : G \times G & \longrightarrow & G \\ ((x_1, x_2), (x_1', x_2')) & \longmapsto & \left(x_1 *_1 x_1', x_2 *_2 x_2'\right) \end{array}$$
- $e = (e_1, e_2)$

Exercices :

1. Vérifier que $(G, *, e)$ ci-dessus est bien un groupe.
2. Montrer que $G_1 \times \{e_2\}$ (resp. $\{e_1\} \times G_2$) est un sous groupe distingué de G, isomorphe à G_1 (resp. G_2).

propriété universelle du produit direct

Le produit direct $G_1 \times G_2$ “arrive” avec 2 morphismes surjectifs : les projections canoniques π_1 et π_2 sur G_1 et G_2 respectivement.

propriété universelle du produit direct $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$

Pour tout triplet (Q, q_1, q_2), où Q est un groupe, $q_1 : Q \to G_1$ et $q_2 : Q \to G_2$ des morphismes, il existe un unique morphisme $f : Q \to G_1 \times G_2$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \\
Q \arrow[ur, "q_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q_2"'] & G_1 \times G_2 \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & G_2
\end{tikzcd}$$

Remarque : $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$ est un objet final.

suites exactes scindées associées au produit direct

Le produit direct $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$ fournit deux suites exactes <u>scindées</u> :

$$e \longrightarrow G_1 \xrightarrow{s_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\pi_2} G_2 \longrightarrow e$$

$$e \longrightarrow G_2 \xrightarrow{s_2} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\pi_1} G_1 \longrightarrow e$$

Définition (suite exacte scindée)

On dit que la suite exacte

$$e \longrightarrow G \longrightarrow G' \xrightarrow{\pi} G'' \longrightarrow e$$

est scindée s'il existe un morphisme $s : G'' \to G'$ qui soit une section pour π, *i.e.* tel que :

$$\pi \circ s = \mathrm{Id}_{G''}$$

<u>Exercice</u> : expliciter les sections pour les suites ci-dessus.

2. Le lemme chinois

Théorème (lemme chinois)

Si p et q sont deux entiers premiers entre eux, alors le groupe $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

<u>Démonstration</u> : Le morphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto (\pi_p(x), \pi_q(x)) \end{aligned}$$

dont le noyau est $\mathrm{Ker}(f) = p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} = pq\mathbb{Z}$, se factorise par le quotient

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

en un morphisme $\widetilde{f}$ injectif.
Avec $\mathrm{card}\,(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}) = \mathrm{card}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, c'est aussi un isomorphisme. $\square$

3. Problème de l'extension d'un groupe

Soit $(G, *, e)$ un groupe. Soit $N \lhd G$ un sous-groupe distingué (N comme normal !). On a vu la suite exacte du groupe quotient :

$$e \longrightarrow N \xhookrightarrow{\lhd} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow e$$

Dans l'autre sens, connaissant N et G/N, comment reconstituer G ?
Plus généralement,

Problème de l'extension d'un groupe par un autre

Soient deux groupes G_1 et G_2. Trouver tous les groupes G qui fournissent une suite exacte :

$$e \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G_2 \longrightarrow e$$

On dit que G est une extension de G_1 par G_2.

<u>Remarque</u> : le produit direct $G_1 \times G_2$ est une solution particulière. C'est loin d'être la seule !