

## 5. Produits de groupes

- 1 Produit direct
- 2 Le lemme chinois
- 3 Problème de l'extension d'un groupe
- 4 Produit semi-direct (non traité)
- 5 Critères de décomposition en produit (non traité)

# 1. Produit direct

## Définition-proposition (produit direct)

Le produit (direct) des groupes  $(G_1, *_1, e_1)$  et  $(G_2, *_2, e_2)$  est le groupe  $(G, *, e)$  où :

- $G = G_1 \times G_2$

- 

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ ((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) &\longmapsto (x_1 *_1 x'_1, x_2 *_2 x'_2) \end{aligned}$$

- $e = (e_1, e_2)$

## Exercices :

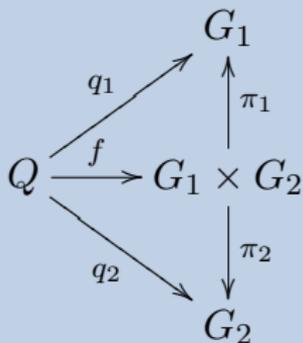
- 1 Vérifier que  $(G, *, e)$  ci-dessus est bien un groupe.
- 2 Montrer que  $G_1 \times \{e_2\}$  (resp.  $\{e_1\} \times G_2$ ) est un sous groupe distingué de  $G$ , isomorphe à  $G_1$  (resp.  $G_2$ ).

## propriété universelle du produit direct

Le produit direct  $G_1 \times G_2$  “arrive” avec 2 morphismes surjectifs : les projections canoniques  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sur  $G_1$  et  $G_2$  respectivement.

### propriété universelle du produit direct $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$

Pour tout triplet  $(Q, q_1, q_2)$ , où  $Q$  est un groupe,  $q_1 : Q \rightarrow G_1$  et  $q_2 : Q \rightarrow G_2$  des morphismes, il existe un **unique morphisme**  $f : Q \rightarrow G_1 \times G_2$  qui rende commutatif le diagramme



Remarque :  $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$  est un objet final.

## suites exactes scindées associées au produit direct

Le produit direct  $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$  fournit deux suites exactes scindées :

$$e \longrightarrow G_1 \xrightarrow{s_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\pi_2} G_2 \longrightarrow e$$

$$e \longrightarrow G_2 \xrightarrow{s_2} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\pi_1} G_1 \longrightarrow e$$

### Définition (suite exacte scindée)

On dit que la suite exacte

$$e \longrightarrow G \longrightarrow G' \xrightarrow{\pi} G'' \longrightarrow e$$

est **scindée** s'il existe un **morphisme**  $s : G'' \rightarrow G'$  qui soit une **section** pour  $\pi$ , *i.e.* tel que :

$$\pi \circ s = \text{Id}_{G''}$$

Exercice : expliciter les sections pour les suites ci-dessus.

## 2. Le lemme chinois

### Théorème (lemme chinois)

Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux, alors le groupe  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$  est isomorphe au produit direct  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .

Démonstration : Le morphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto (\pi_p(x), \pi_q(x)) \end{aligned}$$

dont le noyau est  $\text{Ker}(f) = p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} = pq\mathbb{Z}$ , se factorise par le quotient

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} & & \end{array}$$

en un morphisme  $\tilde{f}$  injectif.

Avec  $\text{card}(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ , c'est aussi un isomorphisme.  $\square$

### 3. Problème de l'extension d'un groupe

Soit  $(G, *, e)$  un groupe. Soit  $N \triangleleft G$  un sous-groupe distingué ( $N$  comme normal!). On a vu la suite exacte du groupe quotient :

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{\triangleleft} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow e$$

Dans l'autre sens, connaissant  $N$  et  $G/N$ , comment reconstituer  $G$ ?  
Plus généralement,

#### Problème de l'extension d'un groupe par un autre

Soient deux groupes  $G_1$  et  $G_2$ . Trouver tous les groupes  $G$  qui fournissent une suite exacte :

$$e \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G_2 \longrightarrow e$$

On dit que  $G$  est une **extension** de  $G_1$  par  $G_2$ .

Remarque : le produit direct  $G_1 \times G_2$  est une solution particulière. C'est loin d'être la seule !