2. Idéal et anneau quotient

1. Heuristique

Soit un anneau $(A,+,0,*,e)$.
Objectif : déterminer des CNS sur $I \subset A$ permettant de construire un anneau quotient A/I tel que la projection canonique $\pi : A \to A/I$ soit un morphisme d'anneau.

On sait déjà :
La CNS pour avoir un groupe $(A/I,+,0)$ et $\pi : A \to A/I$ morphisme de groupe est I sous-groupe distingué de $(A,+,0)$. Comme $(A,+,0)$ est abélien, on impose simplement I sous-groupe de $(A,+,0)$. On dispose alors du morphisme de groupe canonique :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"] \\ A/I \end{tikzcd}$$

Heuristique (2)

Problème : est-ce que la multiplication $*$ passe au quotient de façon à faire de $(A/I, +, 0, *, e)$ un anneau, et de π un morphisme d'anneau ?

Analyse :

• la multiplication sur A/I doit être

$$\begin{array}{rcl} * : A/I \times A/I & \longrightarrow & A/I \\ (u, u') & \longmapsto & u * u' \stackrel{?}{=} \pi(x * x') \end{array}$$

pour tous $x, x' \in A$ tels que $\pi(x) = u$ et $\pi(x') = u'$.

• Cette définition serait licite si $*$ passe au quotient, *i.e.* :

$$(\forall x, x', y, y' \in A) \qquad \left(\begin{array}{rc} & \pi(x) = \pi(y) \\ \text{et} & \pi(x') = \pi(y') \end{array} \right) \stackrel{?}{\Longrightarrow} \pi(x * x') = \pi(y * y')$$

Heuristique (3)

Autrement écrit :

$$(\forall x, x', y, y' \in A) \qquad \left(\begin{array}{cc} & x - y \in I \\ \text{et} & x' - y' \in I \end{array} \right) \overset{?}{\Longrightarrow} x * x' - (y * y') \in I$$

Par un petit calcul dans l'anneau A, on remarque :

$$x * x' - (y * y') = x * \underbrace{(x' - y')}_{\in I} + \underbrace{(x - y)}_{\in I} * y'$$

2. Idéal et anneau quotient A/I

Soit un anneau $(A, +, 0, *, e)$.

Définition (idéal)

On dit que $I \subset A$ est un idéal de A s'il satisfait ces 2 conditions :

1. I est un sous-groupe de $(A, +, 0)$;
2. $(\forall x \in A) \qquad xI \subset I$ et $Ix \subset I$.

Exercices :

1. Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont ses sous-groupes $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Toute intersection d'idéaux est un idéal contenant $\{0\}$.
3. Soit I un idéal de A.
   $\boxed{I \text{ contient un élément inversible} \quad \Longleftrightarrow I = A}$
   En particulier : A corps $\Longrightarrow$ A n'a que deux idéaux : $\{0\}$ et A.
   (réciproque vraie si A est commutatif)
4. Soient $f : A \to A'$ un morphisme d'anneau et I' un idéal de A'. Alors $f^{-1}(I')$ est un idéal de A. En particulier $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal de A.

L'anneau quotient A/I

Soient $(A, +, 0, *, e)$ un anneau et I un idéal de A.

Définition-proposition

L'ensemble quotient $(A/I, \pi)$ défini par

$$(\forall x, y \in A) \qquad \pi(x) = \pi(y) \iff x - y \in I$$

est appelé anneau quotient quand on le munit des lois qui font de la projection canonique $\pi : A \to A/I$ un morphisme d'anneau :

L'élément neutre additif de A/I est $\pi(0) = I$, qu'on notera encore 0 ;
l'élément neutre multiplicatif est $\pi(e) = e + I$, qu'on notera encore e.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & A \arrow[d, "\pi"] \\ & A/I \end{tikzcd}$$

Par construction : $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi) = I}$

Exemple déjà vu : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
La construction précédente fournit le diagramme :

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

où : $(\forall x, x' \in \mathbb{Z}) \qquad \pi(x) = \pi(x') \Longleftrightarrow x - x' \in n\mathbb{Z}$

3. Propriété universelle de l'anneau quotient $(A/I, \pi)$

Soit $h : A/I \to A'$ un morphisme d'anneau. Alors, par construction,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f=h\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\ A/I \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$f = h \circ \pi$ est un morphisme tel que $I \subset \mathrm{Ker}(f)$. Réciproquement,

Propriété universelle de l'anneau quotient $(A/I, \pi)$

(PU) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout morphisme d'anneau } f : A \to A' \text{ tel que } I \subset \mathrm{Ker}(f), \\ \exists!\ h : A/I \to A' \text{ qui rende commutatif le diagramme} \end{array} \right.$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\ A/I \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

On dit que f se factorise à travers le quotient $(A/I, \pi)$.

Propriété universelle de l'anneau quotient (suite)

<u>Démonstration</u> : En effet, h doit vérifier

$$(\forall u \in A/I)(\forall x \in A) \qquad \pi(x) = u \implies h(u) = f(x),$$

ce qui définit h si et seulement si $\pi(x) = \pi(y) \implies f(x) = f(y)$.
C'est le cas puisque $\mathrm{Ker}(\pi) = I \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il reste à vérifier que h est un morphisme d'anneau (exercice). $\square$

Unicité à isomorphisme (unique) près de l'anneau quotient

Théorème (unicité à isomorphisme (unique) près de $(A/I, \pi)$)

Si (E, p), où $p : A \to E$ est un morphisme d'anneau tel que $Ker(p) = I$, vérifie aussi la propriété universelle, alors il existe un unique isomorphisme d'anneau $\varphi : A/I \to E$ tel que ce diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & E \\ A/I \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & E \\ A/I \arrow[ur, "h_1"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & A/I \\ E \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & E \\ E \arrow[ur, "Id_E = h_1 \circ h_2"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & A/I \\ A/I \arrow[ur, "Id_{A/I} = h_2 \circ h_1"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

4. Factorisation des morphismes d'anneau

Pour tout morphisme d'anneau $f : A \to A'$, $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal de A.
f se factorise à travers le quotient $(A/\mathrm{Ker}(f), \pi)$ en un isomorphisme d'anneau :

factorisation canonique

Il existe un unique isomorphisme d'anneau $\widetilde{f}$ qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\
A/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> : exercice. $\square$

5. A/I est-il intègre ?

Soient $(A, +, 0, *, e)$ un anneau et I un idéal de A.
Même si A est intègre, l'anneau quotient A/I peut ne pas l'être (penser à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par exemple).

Définition-proposition (idéal premier)

L'anneau quotient A/I est intègre si et seulement si

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} I \neq A \\ (\forall x, y \in A) \qquad x * y \in I \implies (x \in I \ ou \ y \in I) \end{array} \right.$$

Un idéal est dit premier s'il vérifie les conditions $(*)$.

Démonstration : A/I intègre équivaut à

$$(\forall x, y \in A) \qquad \pi(x * y) = 0 \implies (\pi(x) = 0 \text{ ou } \pi(y) = 0)$$

$\square$

6. A/I est-il un corps ?

Soient $(A, +, 0, *, e)$ un anneau et I un idéal de A.
L'anneau quotient A/I peut être un corps, par exemple : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Définition-proposition (idéal maximal)

L'anneau quotient A/I est un corps si et seulement si

$$(*) \begin{cases} I \neq A \\ (\forall J \text{ idéal de } A) \qquad I \subset J \neq A \implies J = I \end{cases}$$

Un idéal est dit maximal s'il vérifie les conditions $(*)$.

Démonstration : A/I est un corps si et seulement si

$$(\forall x \in A \setminus I)(\exists x' \in A) \qquad \pi(x) * \pi(x') = \pi(e)$$

(la suite en exercice ...) $\square$

7. $\mathbb{Z}$ et ses quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

De façon générale, on a :

Corollaire

Soient $(A, +, 0, *, e)$ *un anneau et* I *un idéal de* A*.*

$$I \textit{ idéal maximal} \implies I \textit{ idéal premier}$$

La réciproque est fausse, mais “on l'a presque” dans $\mathbb{Z}$:

Proposition (idéaux de $\mathbb{Z}$)

Soit $n \in \mathbb{N}$*.*

$$n\mathbb{Z} \textit{ idéal premier de } \mathbb{Z} \iff (n = 0 \textit{ ou } n \textit{ premier})$$
$$n\mathbb{Z} \textit{ idéal maximal de } \mathbb{Z} \iff n \textit{ premier}$$