3. Corps des fractions

1. Objectif
2. Construction du corps des fractions
3. Propriété universelle de $(\mathrm{Frac}(A), j)$

1. Objectif

Soit un anneau $(A, +, 0, *, e)$ commutatif.
On souhaite construire un inverse pour tout élément non nul de A. Il s'agit donc de construire une extension (K, j) de A avec K un corps, *i.e.* $j : A \to K$ un morphisme d'anneau injectif :

$$A \xhookrightarrow{j} K$$

Condition nécessaire : A doit être intègre

$$A \xhookrightarrow{j} K \quad \Longrightarrow \quad A \ \text{ anneau intègre}$$

<u>Démonstration</u> : $\forall x, x' \in A,$

$$\begin{aligned} x * x' = 0 \quad &\Longrightarrow \quad j(x) * j(x') = 0 \Longrightarrow \big(j(x) = 0 \text{ ou } j(x') = 0\big) \\ &\Longrightarrow \quad \big(x = 0 \text{ ou } x' = 0\big) \qquad \text{par injectivité de } j \end{aligned}$$

$\square$

2. Construction du corps des fractions

Soit un anneau $(A, +, 0, *, e)$ commutatif intègre.
• Définissons une relation sur $A \times A \setminus \{0\}$ par

$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \overset{\text{déf}}{\iff} a * b' = b * a'$$

Exercice : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $A \times A \setminus \{0\}$.
Où interviennent la commutativité et l'intégrité A ?

• On considère l'ensemble quotient :

$$\boxed{\mathrm{Frac}(A) \overset{\text{déf}}{=} A \times A \setminus \{0\}/\mathcal{R}}$$

La classe de $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$ sera notée $\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(A)$, ainsi :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff a * b' = b * a'$$

Construction du corps des fractions (2)

- Définissons sur $\mathrm{Frac}(A)$ deux opérations :

$$\begin{array}{rcl} + : \mathrm{Frac}(A) \times \mathrm{Frac}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(A) \\ \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{a'}{b'}\right) & \longmapsto & \dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{a * b' + a' * b}{b * b'} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} * : \mathrm{Frac}(A) \times \mathrm{Frac}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(A) \\ \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{a'}{b'}\right) & \longmapsto & \dfrac{a}{b} * \dfrac{a'}{b'} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{a * a'}{b * b'} \end{array}$$

Exercices :

1. Montrer que ces définitions sont licites, *i.e.*

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{a * b' + a' * b}{b * b'} = \dfrac{c * d' + c' * d}{d * d'} \\ \text{et} \quad \dfrac{a * a'}{b * b'} = \dfrac{c * c'}{d * d'} \end{cases}$$

2. $0 \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{0}{1}$ (resp. $1 \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{1}$) est neutre pour $+$ (resp. $*$).

Construction du corps des fractions (3)

Théorème

Soit $(A, +, 0, *, e)$ *un anneau commutatif intègre.*
$(Frac(A), +, 0, *, 1)$ *est un corps commutatif appelé corps des fractions de* A*, et*

$$\begin{array}{rcl} j : A & \longrightarrow & Frac(A) \\ a & \longmapsto & j(a) \overset{déf}{=} \dfrac{a}{1} \overset{notation}{=} a \end{array}$$

est un morphisme d'anneau injectif.

Démonstration : en exercice, et en particulier :

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(A), \qquad \frac{a}{b} \neq 0 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

□

Exemple : $\boxed{\mathbb{Q} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Frac}(\mathbb{Z})}$

3. Propriété universelle de $(\mathrm{Frac}(A), j)$

Soit $\varphi : \mathrm{Frac}(A) \to K$ un morphisme de corps (donc injectif, dire pourquoi). Alors, par construction,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f=\varphi\circ j"'] & \mathrm{Frac}(A) \arrow[d, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

$f = \varphi \circ j$ est un morphisme d'anneau injectif. Réciproquement,

Propriété universelle du corps des fractions $(\mathrm{Frac}(A), j)$

$$(PU) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout morphisme d'anneau } \ f : A \to K \ \text{ injectif}, K \text{ corps}, \\ \exists! \ \varphi : \mathrm{Frac}(A) \to K \text{ qui rende commutatif le diagramme} \\ \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Frac}(A) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd} \end{array} \right.$$

C'est une propriété d'extension.

Propriété universelle du corps des fractions (suite)

<u>Démonstration</u> : En effet, φ doit vérifier

$$\left(\forall\ \frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(A)\right) \qquad \varphi(\frac{a}{b}) = f(a) *' f(b)^{-1}$$

ce qui définit φ si et seulement si $b \neq 0 \implies f(b) \neq 0$.
C'est le cas puisque f est injectif.
Il reste à vérifier que φ est un morphisme d'anneau (exercice). $\square$

<u>Remarque</u> : le corps $(K, +', 0', *', 1')$ n'est pas forcément commutatif, mais $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-anneau commutatif de K.

Unicité à isomorphisme (unique) du corps des fractions

Théorème (unicité à isomorphisme (unique) près de $(\mathrm{Frac}(A), j)$)

Si (K, f), où K est un corps et $f : A \to K$ est un morphisme d'anneau injectif, vérifie aussi la propriété universelle, alors il existe un unique isomorphisme de corps $\varphi : Frac(A) \to K$ tel que ce diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "f"'] & Frac(A) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Démonstration :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "f"'] & \mathrm{Frac}(A) \arrow[d, "\varphi_1"] \\ & K \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "j"'] & K \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & \mathrm{Frac}(A) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "j"'] & \mathrm{Frac}(A) \arrow[d, "Id_{\mathrm{Frac}(A)}=\varphi_2\circ\varphi_1"] \\ & \mathrm{Frac}(A) \end{tikzcd} \quad \cdots$$

$\square$