MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 2 : Applications et nombres réels

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Janvier 2010

Chapitre II
Applications et nombres réels

II.1 Quelques mots sur les applications

II.1.1 Définition et image d'une application

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Une **application** d'un ensemble E (dit "ensemble de départ") dans un ensemble F (dit "ensemble d'arrivée") est une correspondance qui associe à tout élément de E un et un seul élément de F. On note cette application :

$$\boldsymbol{f : E \longrightarrow F} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{f : x \mapsto y = f(x).}$$

L'élément $y = f(x)$ de F est l'**image** de x par f et x est l'**antécédent** de y. Le **graphe** de f est la partie G de $E \times F$ constituée des éléments de la forme $(x, f(x))$, où $x \in E$.

Une **fonction** de E dans F est une application de D dans F, où $D \subset E$ est appelé **domaine de définition** ($D = \mathrm{dom} f$) de la fonction f. Vous comprenez pourquoi, au lycée, on vous demandait de chercher le domaine de définition de la fonction f et l'on vous a défini l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout ensemble E, l'application de E dans E qui à tout élément x associe x, se note $\boldsymbol{id_E}$ et s'appelle l'**application identique** ou **identité** de E.

Deux applications f_1 et f_2 sont **égales** si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si $\forall x \in E,\ f_1(x) = f_2(x)$.

Définition II.1.1. *On appelle **image** d'une application $f : E \to F$ l'ensemble :*

$$\mathbf{Im} f = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

*ce qui se traduit par "**Im f** est l'ensemble des éléments y de F tels qu'il existe au moins un élément x de E vérifiant $y = f(x)$".*

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f : x \mapsto x^2$ est définie pour tout réel, c'est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons par double inclusion que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+$. En effet, l'élément $f(x) = x^2$ est toujours positif d'où $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^+$, de plus si $a \in \mathbb{R}^+$ on peut écrire $a = f(\sqrt{a})(= (\sqrt{a})^2)$, ce qui montre que $\mathbb{R}^+ \subset \mathrm{Im} f$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.2 Application injective, surjective, bijective

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Définition II.1.2. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que :*

– *l'application f est **injective** si :*

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x'),$$

– *l'application f est **surjective** si :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \textit{ tel que } y = f(x),\ \textit{(soit } \operatorname{Im} f = F),$$

– *l'application f est **bijective**, si :*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \textit{ tel que } y = f(x).$$

Par exemple, l'application $x \mapsto \sin x$ est surjective si on la considère comme application de $\mathbb{R}$ dans $[-1, +1]$. Elle n'est pas injective puisque, par exemple, $\sin 0 = \sin 2\pi$. Elle est bijective si on la considère comme application de $[-\pi/2, +\pi/2]$ sur $[-1, +1]$.

Vous montrerez en exercice les résultats suivants :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- f n'est pas injective si vous pouvez exhiber deux éléments distincts de E qui ont la même image,
- f est injective si et seulement si :

$$\forall x \in E, \ \forall x' \in E, \ (x \neq x') \ \Rightarrow \ (f(x) \neq f(x')).$$

Proposition II.1.1. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. L'application f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.*

Démonstration - Nous allons raisonner par double implication.

- Supposons que l'application est bijective, c'est-à-dire que, quel que soit $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Elle est donc surjective par définition. Montrons qu'elle est injective. Soient deux éléments x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$. Posons $y = f(x)$, alors on a aussi $y = f(x')$ et comme, par définition de la bijectivité, il n'y a qu'un seul antécédent à y, on a $x = x'$. On a donc $(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$ et f est injective.
- Réciproquement, supposons que f est injective et surjective. Puisque f est surjective, $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Il reste à démontrer que cet antécédent x est unique. Supposons qu'il existe un deuxième antécédent x' vérifiant donc $y = f(x')$, alors l'injectivité donne $(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$, ce qui montre bien que l'antécédent est unique.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.3 Composition des applications

Exercices :
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

Définition II.1.3. *Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. La* ***composée*** *de f et g, notée* $\boldsymbol{g \circ f}$ *(ce qui se lit "g rond f") est l'application de E dans G définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$.*

Soit $f : E \to F$, alors on a $f \circ id_E = f$. En effet, $id_E : E \to E$ donc la composition $f \circ id_E : E \to F$ est valide et $\forall x \in E,\ f \circ id_E(x) = f(id_E(x)) = f(x)$.
On montre de la même manière que $id_F \circ f = f$

Proposition II.1.2. *Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ des applications, alors on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associativité de la composition) et cette application est notée $h \circ g \circ f : E \to H$.*

Démonstration - Par définition de la composition, on a

$$h \circ (g \circ f) : E \to H \text{ et } (h \circ g) \circ f : E \to H,$$

et, pour tout x de E :

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

d'où l'égalité des deux applications.

Notons bien que la notation $h \circ g \circ f$ n'a de sens que parce que l'on vient de démontrer que l'on obtient la même application en composant $g \circ f$, puis en formant $h \circ (g \circ f)$ qu'en composant $h \circ g$, pour former enfin $(h \circ g) \circ f$.

Attention à la notation $g \circ f$. Pour former $(g \circ f)(x)$, on applique d'abord f à x, puis g à $f(x)$. La composée est notée $g \circ f$, parce que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

II.1.4 Définition de l'application réciproque

Exercices :
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

Définition II.1.4. *Soit f une application de E dans F, on dit que g, application de F dans E, est application réciproque de f si on a*

$$f \circ g = id_F \qquad \textit{et} \qquad g \circ f = id_E. \tag{II.1.1}$$

C'est à dire $\forall y \in F,\ (f \circ g)(y) = y,\ \ \forall x \in E,\ \ (g \circ f)(x) = x.$

Proposition II.1.3. *Si f admet une application réciproque g , alors cette application réciproque est unique. Lorsque l'application réciproque de f existe on la note f^{-1}.*

Démonstration - Pour montrer l'unicité de g, on suppose qu'il existe deux applications g_1 et g_2 qui vérifient (II.1.1). Alors on a
$g_2 = g_2 \circ id_F = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 = id_E \circ g_1 = g_1.$
Vous montrerez en exercice un résultat qui est évident : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition II.1.4. *f est une application de E dans F.*

1. *Si f admet une application réciproque, alors f est bijective.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. *Si f est une application bijective, alors f admet une application réciproque f^{-1}. On montre de plus que l'application f^{-1} est bijective de F dans E.*

Démonstration -

1. On suppose que f admet une application réciproque, on va montrer que f est bijective de E sur F.
   $f(x) = f(x') \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) \Rightarrow x = x'$, donc f est injective.
   Soit y quelconque appartenant à F, alors $y = f\left(f^{-1}(y)\right)$, donc y admet un antécédent dans E : c'est $f^{-1}(y)$. f est surjective de E sur F
2. On suppose que f est bijective de E dans F. La démonstration se déroule en 2 étapes : tout d'abord l'existence de f^{-1}, puis le caractère bijectif de f^{-1}.
   (a) Comme f est bijective, $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$. Puisque x est unique on peut définir une application $g : F \to E$ par $g(y) = x$. Alors pour tout y de F, on a $f(g(y)) = f(x) = y$, par définition de g, d'où $f \circ g = id_F$. D'autre part, à $x \in E$ on associe $y = f(x)$ et donc $g(y) = x$ (unicité de l'antécédent), ce qui donne $x = g(f(x))$, soit $g \circ f = id_E$.
   Donc g est l'application réciproque de f, $g = f^{-1}$.
   (b) f^{-1} admet une application réciproque qui est f (voir remarque plus haut), donc f^{-1} est bijective.

Exemple : la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f : x \mapsto x^2$, est une application bijective (elle ne le serait pas si l'on prenait $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ) et l'application inverse est $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est autre que la fonction racine carrée !

Définition de l'application réciproque

II.1.5 Composition des applications réciproques

Exercices :
Exercice A.1.12

Proposition II.1.5. *Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications bijectives. Alors l'application $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration - Soit $z \in G$, alors $\exists! y \in F,\ z = g(y)$ (g bijective), puis $\exists! x \in E,\ y = f(x)$ (f bijective) et donc $\exists! x \in E,\ z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, ce qui montre que $g \circ f$ est bijective.

Une autre démonstration possible consite à montrer :

- Si f est injective de E dans F et g injective de F dans G, alors $g \circ f$ est injective de E dans G.
- Si f est surjective de E dans F et g surjective de F dans G, alors $g \circ f$ est surjective de E dans G.

$g \circ f$ admet donc une fonction réciproque $(g \circ f)^{-1} : G \to E$, unique solution de

$$(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = id_E \quad \text{et} \quad (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = id_G.$$

Utiliser l'associativité pour montrer que $f^{-1} \circ g^{-1}$ vérifie ces deux équations, de sorte que l'on a bien :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2 Les nombres réels

II.2.1 Loi de composition interne

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14

Dans l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des entiers relatifs et l'ensemble des rationnels, vous connaissez deux **lois de composition interne** qui sont les opérations : addition et multiplication. On dit que ce sont des lois de composition interne car si

$$(x, y) \in E \times E \ (E = \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z} \text{ ou } \mathbb{Q})$$

le résultat de l'addition ou de la multiplication est aussi dans E.

Ainsi, dans $\mathbb{N}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n + m \in \mathbb{N}$ et $n * m \in \mathbb{N}$. Par contre la loi "soustraction" n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$, en effet $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ et $2 - 3 \notin \mathbb{N}$. C'est pour remédier à ce défaut que l'on a construit l'ensemble des **entiers relatifs** $\mathbb{Z}$, où la soustraction est une addition " déguisée " entre le premier nombre et l'opposé du second. L'addition dans $\mathbb{Z}$ vérifie alors les propriétés suivantes :

– i/ elle est **commutative** :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a,$$

– ii/ elle est **associative** :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z},\ \forall c \in \mathbb{Z},\ a + (b + c) = (a + b) + c,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– iii/ elle a un **élément neutre** :

$$\exists e \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{Z},\ a + e = e + a = a,$$

– iv/ tout élément a admet un **opposé** :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \exists \hat{a} \in \mathbb{Z},\ \text{tel que } a + \hat{a} = \hat{a} + a = e.$$

Si une loi de composition interne d'un ensemble E, notée par exemple “ $\diamondsuit$ ”, vérifie les propriétés (ii, iii, iv) ci-dessus , où a, b, c sont maintenant des éléments quelconques de E, et le signe " + " remplacé par " $\diamondsuit$ ", on dit qu'elle est une loi de **groupe** dans E, ou que $(E, \diamondsuit)$ est un **groupe**. Si en plus, la loi est commutative, le groupe est dit **commutatif** ou **abélien** (du nom du mathématicien norvégien Niels H. **Abel** (1802-1829)). $(\mathbb{Z}, +)$ est donc un groupe abélien, dont l'élément neutre n'est autre que 0, et l'opposé d'un entier a, noté $-a$, est simplement obtenu en changeant le signe de a. Ces notations sont utilisées couramment pour les groupes dont la loi est notée avec le signe d'addition (" + ") (on les appelle groupes *additifs*). Dans le cas contraire, il n'y a pas de raison particulière que l'élément neutre soit 0, et on utilise plutôt le terme " élément **inverse** " à la place de l'**opposé**.

$\mathbb{Q}$ est aussi un groupe commutatif pour la loi addition. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{N}$.

On remarquera bien la différence essentielle de sens entre $\exists e$, $\forall a$ (définition de l'élément neutre) et $\forall a$, $\exists \hat{a}$ (définition de l'opposé).

Loi de composition interne

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.2 Les irrationnels

Exercices :
Exercice A.1.15
Exercice A.1.16

Documents :
Document C.1.1

Les lois "addition" et "multiplication" sont des lois de composition interne dans $\mathbb{R}$ qui possèdent les mêmes propriétés que lorsqu'on les considère dans $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) (voir le document référencé). Elles donnent donc à $\mathbb{R}$ la structure de corps. Mais l'ensemble $\mathbb{R}$ est plus riche que $\mathbb{Q}$, puisque les rationnels ne permettent pas de représenter tous les nombres "usuels" comme par exemple $\sqrt{2},\ \pi,\ e$ (base du logarithme népérien), ... Un réel qui n'est pas rationnel s'appelle **irrationnel**.

Ainsi, on peut démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p,\ q \in \mathbb{N}$, et tels que la fraction est irréductible (c'est-à-dire, les entiers p et q n'ont aucun diviseur commun autre que 1). On a alors

$$2q^2 = p^2$$

donc p^2 est pair donc p est pair, soit $p = 2p'$. On en déduit que

$$2q^2 = 4p'^2$$

donc q^2 est pair donc q est pair, soit $q = 2q'$, ce qui donne $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'}$ ce qui est contraire à l'hypothèse d'irréductibilité de la fraction $\frac{p}{q}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.3 L'ordre dans $\mathbb{R}$

Exercices :
Exercice A.1.17
Exercice A.1.18

Vous savez déjà que deux nombres réels quelconques peuvent être comparés à l'aide de la relation " $\leq$ " définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a \leq b) \ \Leftrightarrow \ (a - b \leq 0).$$

Cette relation est dite **relation d'ordre** car elle possède les propriétés suivantes :

– elle est **réflexive** :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a,$$

– elle est **transitive** :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R},\ \{(a \leq b) \textbf{ et } (b \leq c)\} \ \Rightarrow \ (a \leq c),$$

– elle est **antisymétrique** :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \{(a \leq b) \textbf{ et } (b \leq a)\} \ \Rightarrow \ (a = b).$$

On définit le plus grand (resp. le plus petit) des nombres réels a et b par

$$\max\{a, b\} = \left\{ \begin{array}{l} b \text{ si } a \leq b \\ a \text{ si } b \leq a \end{array} \right. \qquad \min\{a, b\} = \left\{ \begin{array}{l} a \text{ si } a \leq b \\ b \text{ si } b \leq a \end{array} \right. . \qquad \text{(II.2.1)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Rappelons les propriétés de **compatibilité** suivantes entre la relation d'ordre " $\leq$ " et les lois d'addition et de multiplication dans $\mathbb{R}$ (qui font de $\mathbb{R}$ un **corps ordonné**) :

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \quad (a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c)$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad ((0 \leq a)$ **et** $(0 \leq b)) \Rightarrow (0 \leq ab)$.

Notons que la deuxième propriété ci-dessus est équivalente à :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \quad ((a \leq b) \textbf{ et } (0 \leq c) \Rightarrow (ac \leq bc).$$

Terminons par la **propriété fondamentale** suivante dite **propriété d'Archimède** :

- si A est un nombre réel, il existe un entier naturel n tel que $n > A$.

II.2.4 La partie entière d'un nombre réel x : $E(x)$

Exercices :
Exercice A.1.19

Documents :
Document C.1.2

Commençons par énoncer le résultat important suivant :

Proposition II.2.1. *Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel, il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \leq x < (k+1)a$.*

La démonstration est faite dans le document référencé.

En particulier si l'on prend $a = 1$, ceci signifie qu'un nombre réel est toujours compris entre deux nombres entiers relatifs successifs, ce que vous utilisez déjà.

Par exemple, le réel 3.2 est tel que $3 \leq 3.2 < 4$ et le réel -3.2 est tel que $-4 \leq -3.2 < -3$. On a : $1 \leq \sqrt{2} < 2$, $3 \leq \pi < 4$, $2 \leq e < 3$, ... Si l'on prend maintenant $a = 0.1$ dans la proposition précédente, on a $14a \leq \sqrt{2} < 15a$, $31a \leq \pi < 32a$, $27a \leq e < 28a$.

Définition II.2.1. *Soit x un nombre réel, le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la* ***partie entière*** *de x, nous le noterons* $\boldsymbol{E(x)}$.

Par exemple, on a $E(3.2) = 3$, $E(-3.2) = -4$, $E(\sqrt{2}) = 1$,...

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.5 Les intervalles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}$

Documents :
Document C.1.3

Définition II.2.2. *Soient a et b deux nombres réels. On appelle **intervalle ouvert de** $\mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$, ayant l'une des cinq formes ci-dessous :*

1. $\emptyset$, *le sous-ensemble vide de* $\mathbb{R}$,
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,
3. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}$,
4. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$,
5. $\mathbb{R}$.

Lorsque $a \geq b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$, se réduit à la partie vide de $\mathbb{R}$. Lorsque l'on examine l'intersection de deux intervalles ouverts de l'une ou l'autre des formes $]a, b[$, $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, on voit que cette intersection est soit vide, soit à nouveau un intervalle de l'une de ces trois formes, d'oú le résultat

Proposition II.2.2. *L'intersection d'un nombre fini d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.*

De la même manière nous introduisons la définition suivante :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition II.2.3. *Soient a et b deux nombres réels. On appelle* ***intervalle fermé de*** $\mathbb{R}$*, toute partie de $\mathbb{R}$, ayant l'une des cinq formes ci-dessous :*

1. *$\emptyset$, le sous-ensemble vide de $\mathbb{R}$,*
2. *$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$,*
3. *$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}$,*
4. *$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$,*
5. *$\mathbb{R}$.*

Enfin, on appelle **segment** tout intervalle fermé de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$. Remarquons que le segment $[a, a]$ est l'ensemble $\{a\}$ dont le seul élément est a.

Notons tout d'abord qu'un intervalle fermé se réduit à la partie vide lorsque $b < a$. Nous voyons en outre que l'intersection de deux intervalles fermés est soit vide soit un intervalle fermé. Nous avons donc, comme pour les intervalles ouverts, la propriété ci-dessous

Proposition II.2.3. *L'intersection d'un nombre fini d'intervalles fermés est un intervalle fermé.*

Dans le document référencé vous pourrez voir les définitions et les propriétés des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.6 Les intervalles dans $\mathbb{R}$

Définition II.2.4. *Soient a et b deux nombres réels. On appelle **intervalle de** $\mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$, ayant l'une des deux formes ci-dessous :*

1. *intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,*
2. *intervalle fermé de $\mathbb{R}$,*
3. $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$,
4. $[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$.

Lorsque $a < b$, les nombres a et b s'appellent les **extrémités** des intervalles $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, le nombre $b-a$ est la **longueur** de l'intervalle, le nombre $\frac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle. Enfin nous dirons qu'un nombre réel x est compris entre a et b si l'on a $a \leq x \leq b$ dans le cas où $a \leq b$ ou bien si l'on a $b \leq x \leq a$ dans le cas où $b < a$.

Nous allons donner maintenant une propriété caractérisant les intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition II.2.4. *Un sous-ensemble J de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, quels que soient les réels x_1 et x_2 de J, l'intervalle fermé $[x_1, x_2]$ est inclus dans J.*

Proposition II.2.5. *Soit I un intervalle ouvert, alors quel que soit $x \in I$, il existe un $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $]x-\alpha, x+\alpha[$ soit inclus dans I.*

Démonstration - Traitons le cas où I est de la forme $]a,b[$, avec $a < b$. Les autres cas sont plus simples. Nous avons donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in I) \Leftrightarrow (a < x < b).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a donc $x - a > 0,\ b - x > 0$, choisissons $\alpha = \min(x - a, b - x)$. On a donc

$$\alpha > 0, \ \ \alpha \leq b - x, \ \ -\alpha \geq a - x.$$

$$x \in]x - \alpha, x + \alpha[\Rightarrow \begin{cases} x < x + \alpha \leq x + (b - x) = b \\ x > x - \alpha \geq x + (a - x) = a \end{cases} \Rightarrow a < x < b.$$

Proposition II.2.6. *Soit I un intervalle, si quel que soit $x \in I$, il existe un intervalle ouvert Ω tel que $x \in \Omega$ et $\Omega \subset I$, alors I est un intervalle ouvert.*

Démonstration - Si on note $P(x)$ la proposition " il existe un intervalle ouvert Ω tel que $x \in \Omega$ et $\Omega \subset I$", il suffit de montrer que pour tous les intervalles I non ouverts, c'est à dire $[a, b],] - \infty, a], [a, +\infty[,]a, b], [a, b[$, il existe $x \in I$ pour lequel $P(x)$ est fausse. Par exemple pour l'intervalle $[a, b]$, $P(a)$ est fausse.

Proposition II.2.7. *Dans tout intervalle ouvert non vide, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Ceci s'écrit souvent "entre deux rationnels il y a au moins un irrationnel et entre deux réels il y a au moins un rationnel". La démonstration de cette proposition repose sur la proposition II.2.1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.7 Minorant, majorant

Exercices :
Exercice A.1.20
Exercice A.1.21
Exercice A.1.22

Définition II.2.5. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que*
- *A est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in A,\ x \leq M$. Un tel nombre M s'appelle un **majorant** de A,*
- *A est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que $\forall x \in A,\ m \leq x$. Un tel nombre m s'appelle un **minorant** de A,*
- *A est **bornée** si A est majorée et minorée.*

Un intervalle $[a, +\infty[$ est minoré, en effet a, $a - 1$ sont des minorants par exemple. Les intervalles $[a, b],\ ]a, b[$ sont bornés, ils sont en effet minorés par a et majorés par b.

Proposition II.2.8. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre $M \geq 0$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$.*

La démonstration est à faire en exercice.

Remarque II.2.1. Un majorant ou minorant de A peut appartenir à A. Par exemple a est un majorant de $]-\infty, a]$, c'est dans ce cas le plus grand élément de l'ensemble.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il existe des cas où c'est impossible. Par exemple $A =]-\infty, a[$ n'admet pas de majorant qui appartienne à A. Pour le démontrer, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un majorant M de A ($x \leq M, \forall x \in A$) tel que $M \in A$ ($M < a$). Puisque $M < a$, il existe un réel α tel que $M < \alpha < a$, c'est-à-dire un élément α de A tel que $M < \alpha$, ce qui est absurde puisque M est un majorant de A.

II.2.8 Borne supérieure

Exercices :
Exercice A.1.23
Exercice A.1.24

Cours :
Borne supérieure -axiome

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Si A possède un plus grand élément, c'est-à-dire s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A,\ x \leq a$, alors a est le **plus petit majorant** de A. Ceci veut dire que a est un nombre réel s ayant les deux propriétés :

– s est un majorant de A,
– si M est un majorant de A, alors $s \leq M$.

Les deux propriétés de s énoncées ci-dessus n'impliquent pas que s appartienne à A. Il est clair que si un tel *plus petit majorant* existe, il est unique.

Définition II.2.6. *Le plus petit majorant d'une partie A non vide et majorée s'appelle sa **borne supérieure** et se note* **sup *A***.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, le segment $[a, b]$ et l'intervalle $]-\infty, b]$ ont pour plus grand élément b, donc $\sup[a, b] = \sup]-\infty, b] = b$.

Lorsque A ne contient pas de plus grand élément (par exemple $A = [a, b[$), l'existence de sa **borne supérieure** est loin d'être évidente et sera abordée dans le paragraphe référencé. La propositionsuivante donne une caractérisation de la borne supérieure.

Proposition II.2.9. *(Caractérisation de la borne supérieure). Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, la borne supérieure de A est l'unique réel s tel que*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– *si $x \in A$, alors $x \leq s$,*
– *pour tout réel $t < s$, il existe un nombre $x \in A$ tel que $t < x$.*

Démonstration - Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t < \sup A$, puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on en déduit que t n'est pas un majorant de A. C'est donc qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $x > t$. Le nombre réel $s = \sup A$ possède donc les propriétés de la proposition. Réciproquement, soit s un réel vérifiant les propriétés et démontrons que c'est le plus petit des majorants de A. Tout d'abord la première propriété implique que s est un majorant de A. D'autre part la deuxième montre que si $t < s$, t n'est pas un majorant de A. Tout majorant de A est donc supérieur ou égal à s. Autrement dit s est bien le plus petit des majorants de A.

Exemple : soit $I =]-\infty, b[$, alors b est un majorant de I. En utilisant la caractérisation précédente, montrons que $\sup]-\infty, b[= b$. En effet, si $t < b$, alors on a $t < \dfrac{t+b}{2} < b$ et de plus $\dfrac{t+b}{2} \in I$.

Borne supérieure

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.9 Borne inférieure

Exercices :
Exercice A.1.25

De la même manière que l'on a défini la borne supérieure, on peut donner la définition suivante de la borne inférieure.

Définition II.2.7. *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, le plus grand minorant de A s'appelle la* ***borne inférieure*** *et se note* $\inf \boldsymbol{A}$.

On peut alors démontrer la proposition suivante :

Proposition II.2.10. *(Caractérisation de la borne inférieure). Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée, la borne inférieure de A est l'unique réel s tel que*

- *si $x \in A$, alors $s \leq x$,*
- *pour tout réel $t > s$, il existe un nombre $x \in A$ tel que $x < t$.*

Par exemple, $I = [a, +\infty[$ admet un plus petit élément a qui est donc la borne inférieure de A, puisque c'est le plus grand des minorants de A (le démontrer en exercice).

Et $I =]a, +\infty[$ admet a comme borne inférieure d'après la proposition précédente. En effet

- $\forall x \in I$, $a < x$,
- pour tout réel $t > a$, il existe un réel $x = \dfrac{a+t}{2}$ tel que $a < x < t$, et donc tel que $x \in A$ et $x < t$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.10 L'axiome de la borne supérieure

Exercices :
Exercice A.1.26

Exemples :
Exemple B.1.1

Lorsque A ne contient pas de plus grand élément (par exemple $A = [a,b[$), l'existence de sa **borne supérieure** est loin d'être évidente. En fait, il existe plusieurs constructions équivalentes de $\mathbb{R}$, dont l'une consiste justement à considérer comme un des **axiomes** de $\mathbb{R}$ la propriété suivante, appelée propriété ou axiome de la *borne supérieure* :

Axiome de la borne supérieure - *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

On peut présenter intuitivement de la façon suivante cette existence de la borne supérieure. Soit s_1 un majorant de A, et a_1 un réel non majorant de A (donc $a_1 < s_1$). Si le milieu de l'intervalle $[a_1, s_1]$ est un majorant de A, appelons le s_2, et posons $a_2 = a_1$. Si non, on appelle a_2 ce milieu et pose $s_2 = s_1$. On construit ainsi un segment inclus dans $[a_1, s_1]$, de longueur moitié, et dont l'extrémité droite est un majorant de A, et l'extrémité gauche non. Recommençant le processus, qui porte d'ailleurs un nom : la "**dichotomie**", on voit apparaître une succession de "**segments emboîtés**", de longueur chaque fois diminuée de moitié, et dont l'extrémité droite est toujours un majorant de A, et l'extrémité gauche non. Le "point limite" commun des extrémités de ces segments sera la borne cherchée (on verra la définition précise de cette notion de limite plus tard). Mais

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

attention, c'est justement l'existence de ce point limite qui pose problème ! On peut montrer par exemple que dans $\mathbb{Q}$, les segments emboîtés n'ont pas forcément de point limite commun, le même argument ne marche donc pas. La différence entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ réside essentiellement dans cette question d'existence de borne supérieure (ou, ce qui revient au même, l'existence de points limites communs des segments emboîtés). On dira pour cela que $\mathbb{R}$ est **complet**, tandis que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

L'axiome n'est pas valable dans $\mathbb{Q}$, comme le montre l'exemple référencé.

On a évidemment de même (l'un se déduisant de l'autre) :

Axiome de la borne inférieure - *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre II

Exercice A.1.1 Ch2-Exercice1

Les applications $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch2-Exercice2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : x \mapsto \sqrt{x}$. Donner son domaine de définition D. Puis considérant f comme une application de D dans $\mathbb{R}$, donner l'image de cette application.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch2-Exercice3

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ? Que faudrait-il modifier pour qu'elle devienne bijective ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch2-Exercice4

Montrer, en utilisant les résultats du chapitre 1, que la négation de l'implication

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad \{(f(x) = f(x')) \ \Rightarrow \ (x = x')\}$$

est

$$\exists x \in E,\ \exists x' \in E, \quad \{(x \neq x') \ \textbf{et} \ (f(x) = f(x'))\}.$$

En déduire qu'une application n'est pas injective si

$$\exists x \in E,\ \exists x' \in E, \quad \{(x \neq x') \ \textbf{et} \ (f(x) = f(x'))\}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch2-Exercice5

En utilisant les résultats du chapitre 1, montrer que

$$\big((f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')\big) \;\Leftrightarrow\; \big((x \neq x') \;\Rightarrow\; (f(x) \neq f(x'))$$

En déduire qu'une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad \big((x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))\big)\,.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch2-Exercice6

Soit $E = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et soit $f : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$. Trouver $F =$Imf. Montrer que f est bijective de E sur F. Même question avec $D = \mathbb{R}_*^+$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch2-Exercice7

Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F. Montrer que la composition $id_F \circ f$ est valide et que $id_F \circ f = f$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch2-Exercice8

Soient les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $g : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Montrer que $g \circ f = -g$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch2-Exercice9

En vous souvenant de $\ln x$ et e^x, donner les ensembles de départ et d'arrivée permettant de dire que l'une est l'application ré de l'autre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch2-Exercice10

Soient E et F deux ensembles, et soit f de E dans F qui admet une application réciproque f^{-1}. Montrer, à partir de la définition de f^{-1} que f^{-1} admet une application réciproque et que $(f^{-1})^{-1} = f$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch2-Exercice11

Vous avez montré (dans un exercice précédent) que $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ est une bijection. Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch2-Exercice12

Soient les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $g : \mathbb{R}_*^+ \to]-1,1[$ définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Donner f^{-1}, g^{-1} puis $(g \circ f)^{-1}$. Comparer avec le résultat de l'exercice A.1.8

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch2-Exercice13

Montrer que la loi "soustraction" est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$. Montrer que la loi "division" n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mais que cette loi est une loi de composition interne dans $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch2-Exercice14

Montrer que dans un groupe $(E, \diamondsuit)$ l'élément neutre est unique, de même que l'élément inverse d'un élément quelconque de E. Enfin, montrer que la " règle de simplification " : si $a\diamondsuit c = b\diamondsuit c$, alors $a = b$, que vous connaissez bien pour l'addition dans $\mathbb{Z}$, s'applique dans un groupe quelconque.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch2-Exercice15

Montrer que les lois "addition" et "multiplication" ne sont pas des lois internes dans l'ensemble des nombres irrationnels.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch2-Exercice16

Montrer que si x est irrationnel, p, q sont entiers, $p \neq 0$ alors $\dfrac{px}{q}$ est irrationnel.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch2-Exercice17

Montrer que la relation " $<$ " n'est pas réflexive ni symétrique.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch2-Exercice18

Montrer que :
- i/ $(a \leq b) \;\Leftrightarrow\; (-b \leq -a)$,
- ii/ $\{(a \leq b)$ **et** $(c \leq d)\} \;\Rightarrow\; (a + c \leq b + d)$,
- iii/ $\{(a \leq b)$ **et** $(0 \leq c)\} \;\Rightarrow\; (ac \leq bc)$,
- iv/ La propriété suivante de $\mathbb{R}$ est équivalente à la propriété d'Archimède :

$$\forall a > 0,\; \forall A \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } na > A.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch2-Exercice19

Tracer le graphe de la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch2-Exercice20

Montrer que si M est un majorant de A tout réel $M' \geq M$ est aussi un majorant. De même si m est un minorant de A tout réel $m' \leq m$ est aussi un minorant.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch2-Exercice21

Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre $M \geq 0$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$ (on rappelle que $|x|$ désigne la valeur absolue de x).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch2-Exercice22

Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = \dfrac{n}{n+1}\}$ est borné.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch2-Exercice23

Soit $a < b$, en utilisant la caractérisation de la borne supérieure, montrer que $\sup\ [a, b[= b$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch2-Exercice24

Montrer que $\sup A = \sqrt{2}$, si $A = \{x \in \mathbb{R},\ x$ rationnel et $x^2 < 2\}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch2-Exercice25

Montrer que a est le plus grand des minorants de $I = [a, +\infty[$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch2-Exercice26

En appliquant l'axiome de la borne supérieure, démontrer que toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

retour au cours

Solution

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD2-Exercice1

(Cet exercice est une application directe du cours.) Soit une application $f : A \to B$.

1. Quelle est la propriété qui se traduit par

$$\forall y \in B, \exists x \in A, \quad y = f(x)$$

2. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de cette propriété.
3. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété "f est injective".
4. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété "f n'est pas injective".

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD2-Exercice2

Soient deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective (sans utiliser les questions précédentes).
4. (a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
   (b) Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.
   (c) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. (a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
   (b) Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.
   (c) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4b Aide 1 Aide 2
Question 4c Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD2-Exercice3

Soient trois applications $f : A \to B$,$g : B \to C$ et $h : C \to D$. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que les trois applications f, g et h sont bijectives.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD2-Exercice4

Pour chacun des sous-ensembles E_i de $\mathbb{R}$ ci-dessous, dire s'il admet un majorant, un minorant, une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément ? Dans le cas de réponse affirmative, déterminer ces éléments.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbb{R}; \quad -3 \leq x < 7\} \\ E_2 &= \{x \in \mathbb{R}; \quad |x| \leq 5\} \\ E_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}; \quad x^2 \geq 9\right\} \\ E_4 &= \left\{x \in \mathbb{R}; \quad x^2 < 9\right\} \end{aligned}$$

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD2-Exercice5

Soit l'intervalle $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. On considère une application $f : I \to I$ vérifiant $x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$ (f est croissante) et on pose

$$A = \{x \in I; \quad f(x) \leq x\}$$

1. Montrer que $A \neq \emptyset$.
2. Montrer que $x \in A \Longrightarrow f(x) \in A$.
3. Montrer que A admet une borne inférieure a et $a \in I$.
4. Montrer que $f(a)$ est un minorant de A. En déduire que $a \in A$.
5. En déduire que $f(a) = a$.
6. Cette propriété est-elle vraie pour une fonction décroissante ?

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 6	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD2-Exercice6

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On suppose $A \subset B$. Montrer que :

$$\begin{aligned} \sup A &\leq \sup B \\ \inf A &\geq \inf B \end{aligned}$$

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.7 TD2-Exercice7

Soient a et b deux nombres réels tels que pour tout nombre réel x vérifiant $b < x$, on ait $a \leq x$. Montrer que $a \leq b$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre II

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.1 Borne supérieure dans les rationnels

L'ensemble des rationnels $A = \{x \in \mathbb{Q}, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$ est une partie non vide ($1 \in A$), admet un majorant (2 par exemple), mais A n'admet pas de borne supérieure *dans* $\mathbb{Q}$. En effet si s était une borne supérieure, alors :

- Soit $s = \sqrt{2}$, c'est impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
- Soit $s < \sqrt{2}$, alors il existe un rationnel x tel que $s < x < \sqrt{2}$, donc $x \in A$ et s n'est pas un majorant, ni *a fortiori* la borne supérieure de A,
- Soit $s > \sqrt{2}$ et il existe un rationnel x tel que $\sqrt{2} < x < s$, d'où $\forall a \in A$, on a $a < \sqrt{2} < x$ ce qui montre que x est un majorant de A et donc que s n'est pas le plus petit des majorants.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre II

Document C.1.1 Le corps des réels

Soient deux lois de composition interne dans E, notées $\Diamond$ et $\triangledown$, on dit que la loi $\triangledown$ est **distributive** par rapport à la loi $\Diamond$ si

$$\forall a, b, c \in E,\ a\triangledown(b\Diamond c) = (a\triangledown b)\Diamond(a\triangledown c).$$

La multiplication est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, et dans chaque cas 1 est son élément neutre. Si $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, son inverse est $\frac{1}{a}$, par contre cet inverse n'existe pas pour tout a de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ou dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Les propriétés que nous connaissons sur l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$, à savoir :

– i/ La loi d'addition est une loi de groupe abélien ;
– ii/ La multiplication est distributive par rapport à l'addition ;
– iii/ $\mathbb{Q}^*$ (i.e. l'ensemble moins l'élément neutre de l'addition) est un groupe abélien pour la multiplication.

donnent à $\mathbb{Q}$ une structure appelée struture de **corps commutatif** (contrairement aux groupes, on n'utilise pas le terme " abélien " pour un corps !). C'est pourquoi, dans la littérature (un peu spécialisée !), vous trouverez la terminologie “ le corps des rationnels ”. $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps car la propriété iii/ ci-dessus n'est pas vérifiée.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Encadrement d'un nombre réel

Proposition C.1.1. *Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel, il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \le x < (k+1)a$.*

Démonstration - Raisonnons cas par cas.

- $x \ge 0$. Puisque a est strictement positif, on a $\frac{x}{a} \ge 0$. En utilisant la propriété d'Archimède il existe un entier $n \ge 1$ tel que $n > \frac{x}{a}$. Si $p \in \mathbb{N}$ est tel que $p \le \frac{x}{a}$, alors on a $0 \le p < n$. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers naturels inférieurs à $\frac{x}{a}$. Soit k le plus grand de ces entiers, alors on a $k \le \frac{x}{a}$ et $\frac{x}{a} < k+1$, ce qui donne l'encadrement de la proposition en multipliant par $a > 0$.
- $x < 0$, alors $-\frac{x}{a} \ge 0$ et en utilisant la propriété d'Archimède il existe un entier $m \ge 1$ tel que $m > -\frac{x}{a}$, soit en posant $n = -m (\in \mathbb{Z})$, $n < \frac{x}{a}$. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers relatifs p tels que $n \le p \le \frac{x}{a}$. En appelant k le plus grand de ces entiers, nous avons $k \le \frac{x}{a}$ et $\frac{x}{a} < k+1$, soit $ka \le x < (k+1)a$.

Il reste à démontrer l'unicité de $k \in \mathbb{Z}$. Soit un autre entier $l \in \mathbb{Z}$ vérifiant $la \le x < (l+1)a$, alors on a $la \le x < (k+1)a$, soit $l < (k+1)$, ce qui donne $l \le k$ puisque k et l sont des entiers. De même, on a $ka \le x < (l+1)a$, ce qui donne $k \le l$, d'où $k = l$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$

L'utilisation de l'ensemble des nombres réels, en particulier l'étude des fonctions numériques, conduit à introduire un certain nombre de sous-ensembles particuliers qui sont beaucoup utilisés. Nous avons introduit dans le cours, les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Nous introduisons maintenant la définition suivante :

Définition C.1.1. *On appelle* ***ouvert*** *de $\mathbb{R}$ tout sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui est la réunion d'un nombre* ***quelconque*** *d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*

Nous voyons immédiatement que tout intervalle ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}$. En particulier $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Notons par ailleurs qu'une réunion quelconque d'ouverts étant une réunion quelconque d'intervalles ouverts est un ouvert.

Introduisons maintenant la notion de partie fermée de $\mathbb{R}$:

Définition C.1.2. *On appelle* ***fermé*** *de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui est complémentaire d'une partie ouverte de $\mathbb{R}$.*

Rappelons que nous avons introduit dans le cours, la notion d'intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous voyons aussitôt que tout intervalle fermé est un fermé de $\mathbb{R}$. En effet :

$$\emptyset = \mathbb{R} - \mathbb{R}, \tag{C.1.1}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} - \emptyset, \tag{C.1.2}$$

$$]-\infty, a] = \mathbb{R} -]a, +\infty[, \tag{C.1.3}$$

$$[a, b] = \mathbb{R} - (]-\infty, a[\cup]b, +\infty[), \tag{C.1.4}$$

$$[b, +\infty[= \mathbb{R} -]-\infty, b[. \tag{C.1.5}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, nous voyons en particulier que :

Proposition C.1.2. *L'ensemble vide et* $\mathbb{R}$ *sont tous deux ouverts et fermés.*

Passons maintenant à l'intersection de deux ouverts. Comme l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert, éventuellement vide, nous voyons que l'intersection de deux ouverts est un ouvert. Par récurrence nous arrivons alors à :

Proposition C.1.3. *L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.*

Par passage au complémentaire, nous obtenons :

Proposition C.1.4. *La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.*

Nous retrouvons ainsi que :

$$\mathbb{R} =]-\infty, a] \cup [a, +\infty[,$$

est fermé. Nous retrouvons aussi que, puisque l'intersection de deux intervalles fermés est fermée, éventuellement vide, l'ensemble vide $\emptyset$ est fermé.

Nous obtenons en outre :

Proposition C.1.5. *Le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *constitué d'un seul point* $a \in \mathbb{R}$ *est fermé.*

Démonstration Nous pouvons écrire que :

$$\{a\} = [a] = \mathbb{R} - (]-\infty, a[\cup]a, +\infty[)$$

Enfin, terminons en montrant par un contre exemple, que la réunion d'un nombre quelconque de fermés, n'est pas nécessairement un fermé :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition C.1.6. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors :*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_*} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] =]a, b[.$$

De la même manière, nous avons :

Proposition C.1.7. *Soit a un réel. Alors :*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_*}]a+\frac{1}{n}, a-\frac{1}{n}[= [a].$$

La notion de parties ouvertes est fondamentale lorsque l'on veut définir les notions de limite, convergence, continuité à des ensembles E plus généraux que $\mathbb{R}$ (par exemple, $\mathbb{R}^2$). On est conduit chaque fois à introduire une famille de parties ouvertes vérifiant :

1. $\emptyset$ et E sont ouverts,
2. la réunion d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert,
3. l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

d'où par passage au complémentaire :

1. $\emptyset$ et E sont fermés,
2. l'intersection d'un nombre quelconque de fermés est un fermé,
3. la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

retour au cours

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

f_1 : oui, f_2 : non (f_2 n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$), f_3 : oui.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

$D = \mathbb{R}^+$, $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^+$ (le démontrer par double inclusion, sachant que si $y \in \mathbb{R}^+$ il peut s'écrire $y = \sqrt{y^2}$).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

Elle est injective car $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car Im $f = \mathbb{R}^+$ et non pas $\mathbb{R}$, donc elle n'est pas bijective. Elle serait bijective si on prenait $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

On sait que **non** $(P \Rightarrow Q)$ s'écrit (P **et** (**non** Q), d'où

$$\textbf{non}\,\{\forall x \in E,\, \forall x' \in E,\, (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')\} \Leftrightarrow \{\exists x \in E,\, \exists x' \in E,\, (f(x) = f(x'))\ \textbf{et}\ (x \neq x')\}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Il suffit d'appliquer :

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; \{(\mathbf{non}\, Q) \Rightarrow (\mathbf{non}\, P)\}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Après calculs on montre que tout $y \neq 1$ admet un unique antécédent qui s'écrit

$$x = \frac{1-2y}{y-1}$$

d'où $(y \in \mathrm{Im} f) \Leftrightarrow (y \neq 1)$ et donc $\mathrm{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lorsque le domaine de définition de f est limité à $\mathbb{R}_*^+$, on a

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2y}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y \in]\frac{1}{2}, 1[.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

$id_F \circ f : E \to F \to F$ et $id_F \circ f(x) = id_F(f(x)) = f(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Tout d'abord, comme 0 et -1 sont exclus des domaines de définition, ces deux applications sont effectivement bien définies. Il suffit ensuite de calculer $g(f(x))$. En effet $g(f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

$\ln x : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ et $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, doù $e^{\ln x} : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $\ln e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

$f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$ caractérisent (par définition) l'inverse de f^{-1} qui est donc f.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On a déjà démontré que $f^{-1}(y) = \dfrac{1-2y}{y-1}$ en résolvant l'équation $y = f(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

$f^{-1} : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ et $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$, $g^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}_*^+$ et $g^{-1}(y) = \dfrac{1+y}{1-y}$ (résoudre $y = g(x)$), d'où

$$(g \circ f)^{-1}(y) = (f^{-1} \circ g^{-1})(y) = \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1-y}{1+y}.$$

Il a été montré dans l'exercice 8 que $(g \circ f)^{-1} = (-g)^{-1}$ et l'on a bien $(-g)^{-1} = \dfrac{1-y}{1+y}$ (résoudre $y = -g(x)$).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

La soustraction de deux entiers relatifs est un entier relatif. Le quotient de deux entiers relatifs peut ne pas être un entier relatif ($\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$). Par contre le quotient de deux rationnels non nuls est un rationnel non nul, en effet $\dfrac{\frac{p}{q}}{\frac{p'}{q'}} = \dfrac{pq'}{qp'}$ les éléments p, q, p', q' étant tous des entiers non nuls.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

S'il existe deux éléments neutres e_1 et e_2, on a

$$e_1 \Diamond e_2 = e_1 \qquad \text{et} \qquad e_1 \Diamond e_2 = e_2.$$

Et si x a deux inverses x_1 et x_2, on a

$$x_1 \Diamond x \Diamond x_2 = (x_1 \Diamond x) \Diamond x_2 = e \Diamond x_2 = x_2$$

$$x_1 \Diamond x \Diamond x_2 = x_1 \Diamond (x \Diamond x_2) = x_1 \Diamond e = x_1$$

d'où $x_1 = x_2$.

On appelle c_1 l'inverse de c, alors

$$a \Diamond c = b \Diamond c \Rightarrow (a \Diamond c) \Diamond c_1 = (b \Diamond c) \Diamond c_1 \Rightarrow a \Diamond (c \Diamond c_1) = b \Diamond (c \Diamond c_1) \Rightarrow a \Diamond e = b \Diamond e \Rightarrow a = b$$

Quelles sont les propriétés que l'on a utilisées ?

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

Par exemple $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ et $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, or 0 et 2 ne sont pas des irrationnels !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

On peut raisonner par l'absurde : on suppose que x est irrationnel, p, q sont entiers, $p \neq 0$, $\dfrac{px}{q}$ est rationnel.

On a donc x est irrationnel, p, q sont entiers, $p \neq 0$, $\dfrac{px}{q} = \dfrac{p'}{q'}$.

Ce qui implique que x est irrationnel, p, q sont entiers et $x = \dfrac{p'q}{q'p}$, ce qui est absurde.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

Quels que soient les réels x et y, les propriétés $x < x$ et $(x < y) \Rightarrow (y < x)$ sont clairement fausses.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Toutes ces inégalités se démontrent à partir des propriétés élémentaires de "$\leq$". Ainsi

$$\{(a \leq b) \textbf{ et } (c \leq d)\} \;\Rightarrow\; \{(a+c \leq b+c) \textbf{et } (b+c \leq b+d)\} \;\Rightarrow\; (a+c \leq b+d).$$

Appelons P la propriété d'Archimède, Q la proposition

$$\forall a > 0,\ \forall A \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } na > A.$$

On montre $P \Rightarrow Q$. Il suffit d'appliquer la propriété d'Archimède au nombre réel $B = \frac{A}{a}$
On montre $Q \Rightarrow P$, il suffit d'appliquer la proposition Q avec $a = 1$.

Retour à l'exercice ▲

On obtient une fonction en "escalier" (voir la figure C.1.1).

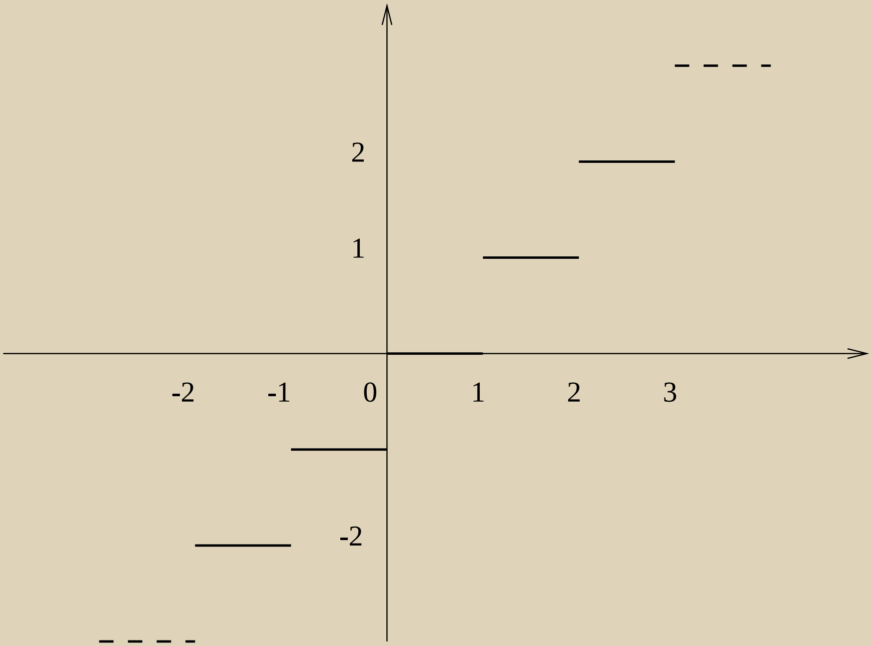

FIG. C.1.1 – graphe de partie entière

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

Puisque $M \leq M'$, on a $(x \leq M) \Rightarrow (x \leq M')$ et donc M' est un majorant de A. La démonstration est la même pour m'.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

Si $|x| \leq M$, alors $-M \leq x \leq M$ et donc A est bornée.

Réciproquement, si $\alpha \leq x \leq \beta$, on pose $M = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ et l'on a $-M \leq x \leq M$. (Aidez-vous d'un dessin si cela ne vous paraît pas évident car ce résultat est souvent utilisé).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

Comme $n < n+1$**, il est clair que** $\forall x \in A$**, on a** $0 \leq x \leq 1$**.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

On utilise la caractérisation de la borne supérieure.

- $\forall x \in [a, b[$, on a $x \leq b$, donc b est majorant de [a, b[, montrons que c'est le plus petit.
- Soit $c < b$, deux cas peuvent alors se présenter
  - $c < a$, or a est un élément de $[a, b[$ donc c n'est pas majorant de $[a, b[$.
  - $c \geq a$ alors $\frac{c+b}{2}$ est un élément de $[a, b[$ qui est strictement supérieur à c, donc c n'est pas majorant de $[a, b[$.

  On vient donc de démontrer que b est le plus petit des majorants de $[a, b[$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

On utilise la caractérisation de la borne supérieure.

- $\forall x \in A$, on a $x \leq \sqrt{2}$
- Soit $t < \sqrt{2}$, alors entre deux nombres réels il existe toujours un rationnel, d'où $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $t < q < \sqrt{2}$ et donc $q \in A$ vérifie bien $t < q$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un minorant m de I tel que $a < m$. Alors il existe un réel α tel que $a < \alpha < m$ et donc il existe un réel α appartenant à I ($a < \alpha$) qui est strictement plus petit que m, ce qui est absurde puisque m est un minorant de I.

Retour à l'exercice ▲

Soit m un minorant de A. Alors :

$$(x \in A) \Rightarrow (x \geq m) \Rightarrow (-x \leq -m).$$

Définissons l'ensemble $B = \{y \in \mathbb{R}, y = -x, x \in A\}$. Alors B est majoré par $-m$ et B admet une borne supérieure (axiome de la borne supérieure) s qui vérifie donc :

– $\forall y \in B$, on a $y \leq s$
– Soit $t < s$, alors $\exists y \in B$ tel que $t < y$.

Si l'on revient aux éléments de A ($x = -y$), on trouve

– $\forall x \in A$, on a $x \geq -s$
– Soit $-t > -s$, alors $\exists x \in A$ tel que $-t > x$.

Ceci est la caractérisation de "$-s$" est la borne inférieure de A.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.1

1. Voir le paragraphe : Bijection
2. $$\exists y \in B, \forall x \in A, \quad y \neq f(x)$$
3. $$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
4. $$\exists x_1 \in A, \exists x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2$$

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la définition de "$g \circ f$ est injective". Voir le paragraphe : Bijection.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

Il faut donc montrer que

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Partez du membre gauche de l'implication puis, en procédant par implication et en utilisant les hypothèses, obtenez le membre de droite.

Retour à l'exercice ▲

Voici le début de la démonstration :

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

car g est injective ...

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Ecrire la définition de "$g \circ f$ est surjective". Voir le paragraphe : Bijection.

Retour à l'exercice ▲

Il faut donc montrer que

$$\forall z \in C, \exists x \in A,\ z = (g \circ f)(x)$$

Prenez un z quelconque dans C et utilisez les hypothèses.

Retour à l'exercice ▲

Voici le début de la démonstration :

$$\forall z \in C, \exists y \in B,\ z = g(y)$$

car g est surjective ...

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la définition de "$g \circ f$ est bijective". Voir le paragraphe : Bijection.

Retour à l'exercice ▲

Il faut donc montrer que

$$\forall z \in C, \exists ! x \in A,\ z = (g \circ f)(x)$$

Prenez un z quelconque dans C et utilisez les hypothèses.

Retour à l'exercice ▲

Voici le début de la démonstration :

$$\forall z \in C, \exists! y \in B,\ z = g(y)$$

car g est bijective ...

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la définition de "g est injective". Voir le paragraphe : Bijection.

Retour à l'exercice ▲

Il faut donc montrer que

$$\forall y_1 \in B, \forall y_2 \in B, \quad g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Prenez deux éléments y_1 et y_2 quelconques de B et utilisez les hypothèses.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4a, Exercice A.2.2

Voici le début de la démonstration, puisque g est surjective, il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Il est alors facile en utilisant l'injectivité de $g \circ f$ de démontrer par implication que $x_1 = x_2$, puis que $y_1 = y_2$. Pourquoi cette dernière implication est-elle toujours vraie ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4b, Exercice A.2.2

Pour cet exemple, f n'est pas surjective car nous venons de démontrer que si f est surjective et $g \circ f$ injective alors g est injective. Les ensembles A, B et C ne sont pas nécessairement identiques !

Retour à l'exercice ▲

Prenez par exemple (vous pouvez trouver d'autres exemples !) :

$$A = [0, 1],\ B = [-1, +1]\ C = A,\ f(x) = x,\ g(x) = x^2.$$

Vérifier que cet exemple répond bien à la question.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la définition de "f est injective". Voir le paragraphe : Bijection.

Retour à l'exercice ▲

Il faut donc montrer que

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Prenez deux éléments x_1 et x_2 quelconques de A et procéder en implications en utilisant l'hypothèse.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4c, Exercice A.2.2

Voici le début de la démonstration :

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; g(f(x_1)) = g(f(x_2))...$$

Cette implication est-elle toujours vraie ? Il ne reste plus quà utiliser l'hypothèse.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.3

Utiliser les résultats de l'exercice A.2.2 sachant que si des applications sont bijectives elles sont injectives et surjectives.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.3

Des résultats de l'exercice A.2.2, vous pouvez facilement déduire la bijectivité de g (comment ?). Utilisez cette bijectivité pour finir la démonstration.

Retour à l'exercice ▲

Puisque g est bijective, il existe une application réciproque g^{-1}. Cette application est-elle bijective ? Il suffit de composer astucieusement avec cette application réciproque pour obtenir la bijectivité de f et de h.

Retour à l'exercice ▲

Cherchez s'il existe des majorants et des minorants de chacun des ensembles et utilisez le résultat du paragraphe Borne supérieure -axiome.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.4

Si l'on considère E_1, par définition -3 est un minorant, mais aussi tout réel plus petit que -3 par exemple -10 ou -1000, ... et 7 est un majorant, mais aussi tout réel plus grand que 7 par exemple 10 ou 1000, ... Vous pouvez continuer pour tous les autres ensembles. Il y a une difficulté pour E_3, pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.4

Les ensembles E_1, E_2 et E_4 sont bornés. Ils admettent donc une borne supérieure et une borne inférieure, pourquoi ? Admettent-ils aussi un plus grand élément et un plus petit élément ?

L'ensemble $E_3 =]-\infty, -3] \cup [+3, +\infty[$ n'est ni majoré ni minoré. Peut-il admettre une borne inférieure, une borne supérieure ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.4

Il est démontré dans les paragraphes sur les bornes sup et inf que -3 est la borne inférieure et le plus petit élément de E_1 et que 7 est sa borne supérieure mais que E_1 n'a pas de plus grand élément. Si vous ne vous en souvenez plus, voir les paragraphes : Borne supérieureet Borne inférieure. Le raisonnement est le même pour les ensembles E_2 et E_4.

Retour à l'exercice ▲

Que faut-il démontrer ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.5

Il faut exhiber un élément $\alpha \in I$ tel que .... Pour cela, traduisez : $f \;:\; I \to I$

Retour à l'exercice ▲

On a $\forall x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1]$**. En particulier, pour** $\alpha =?$ **on a bien** $f(\alpha) \leq \alpha$ **et** A **est non vide.**

Retour à l'exercice ▲

Que faut-il démontrer ?

Retour à l'exercice ▲

Il faut montrer que si $x \in A$ ($x \in I$ et $f(x) \leq x$) alors $f(x) \in A$ ($f(x) \in I$ et $f(f(x)) \leq f(x)$). Utiliser les hypothèses sur f.

Retour à l'exercice ▲

L'hypothèse $f : I \to I$ fournit le premier résultat et la croissance de f le deuxième résultat.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.5

Il y a deux choses à démontrer. Pour la première, voir le paragraphe : Borne supérieure -axiome. et pour la deuxième voir le paragraphe Borne inférieure.

Retour à l'exercice ▲

L'ensemble A est minoré (pourquoi ?) et non vide, vous pouvez donc utiliser l'axiome de la borne inférieure. Une borne inférieure d'un ensemble est-elle comprise entre un minorant et un majorant quelconques de cet ensemble ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.2.5

D'une part 0 est un minorant de A et la borne inférieure de A est le plus grand des minorants. D'autre part, 1 est un majorant de A, donc on a bien

$$\forall x \in A,\ 0 \leq a \leq x \leq 1,$$

ce qui démontre que $a \in I$.

Retour à l'exercice ▲

Que faut-il démontrer ? Utiliser la définition de A et la croissance de f.

Retour à l'exercice ▲

Il faut démontrer que $\forall x \in A,\ f(a) \leq x$. Or $\forall x \in A,\ a \leq x$ d'où par croissance de f ... continuez.

Retour à l'exercice ▲

$\forall x \in A$, $a \leq x$, d'où par croissance de f, $f(a) \leq f(x)$ et par définition de A, $f(x) \leq x$. La transitivité de l'inégalité donne donc le premier résultat ... En déduire que $a \in A$ est immédiat en utilisant la définition de la borne inférieure a de A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.2.5

Il faut procéder par double inégalité puisque vous venez de démontrer l'une de deux inégalités. Laquelle ?

Retour à l'exercice ▲

Dans la question précédente, on vient de démontrer que $f(a) \leq a$. Utiliser la deuxième question pour démontrer l'autre inégalité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 5, Exercice A.2.5

La deuxième question montre que $f(a) \in A$ (pourquoi ?) et donc que $a \leq f(a)$ (pourquoi ?).

Retour à l'exercice ▲

Quelle est cette propriété ?

Retour à l'exercice ▲

On vient de démontrer qu'une fonction croissante de I dans I admet un point fixe (f(a)=a). Trouver un contre-exemple dans le cas d'une fonction décroissante, par exemple une fonction avec un "saut".

Retour à l'exercice ▲

Par exemple, la fonction $f(x) = 1$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = 0$ pour $x \in]\frac{1}{2}, 1]$. Vérifiez sur un graphique.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.6

Utiliser la définition de la borne supérieure de l'ensemble A, voir le paragraphe Borne supérieure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.6

Montrer que $\sup B$ est un majorant de l'ensemble A et la conclusion est immédiate (pourquoi ?).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.6

Puisque $A \subset B$ tout élément de A appartient à B et est donc majoré par tout majorant de B. Finissez le raisonnement et faites le même pour la borne inférieure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.7

Le plus facile est de raisonner par l'absurde. Si vous avez oublié ce type de raisonnement, allez le revoir au chapitre 1. Que suppose-t-on dans ce cas ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.7

On suppose que l'hypothèse est vérifiée et que la conclusion est fausse, c'est à dire $a > b$. Essayer alors de construire une contradiction.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.7

Si $a > b$, il existe un réel c strictement compris entre b et a (donnez en un). Montrez alors que l'existence d'un tel c est impossible.

Retour à l'exercice ▲