

Exercices du chapitre IV avec corrigé succinct

Exercice IV.1 Ch4-Exercice1

Montrer que l'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a .

Solution : Soient $(\mathcal{V}_{k=1,\dots,p})$ p voisinages de a . Alors, par définition, il existe $\alpha_k > 0$ tel que $]a - \alpha_k, a + \alpha_k[\subset \mathcal{V}_k$. L'intersection des p voisinages contient l'intersection des p intervalles $]a - \alpha_k, a + \alpha_k[$ qui est aussi un intervalle ouvert $]a - \alpha, a + \alpha[$ où

$$\alpha = \min_{k=1,\dots,p} \{\alpha_k\}.$$

Exercice IV.2 Ch4-Exercice2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, montrer qu'elle admet une limite en $x = -1$.

Solution : Celle limite est $l = -2$, puisque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon, (0 < |x + 1| < \eta) \Rightarrow (|f(x) + 2| < \varepsilon)$$

En effet, x étant différent de -1 , on peut simplifier f et obtenir $f(x) = (x - 1)$, donc $|f(x) + 2| = |x + 1|$.

Exercice IV.3 Ch4-Exercice3

Montrer, en utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre \leq , que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, (x \leq \varepsilon) \iff (x^2 \leq \varepsilon^2)$$

Solution : La relation de compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre s'écrit :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}^+, (a \leq b) \implies (ac \leq bc) \quad (1.1)$$

1. Soient donc x et ε , deux éléments de \mathbb{R}^+ , tels que $x \leq \varepsilon$, alors :

$$0 \times x \leq x \times x \leq x \times \varepsilon \leq \varepsilon \times \varepsilon, .$$

soit effectivement $0 \leq x^2 \leq \varepsilon^2$, ce qui montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, (x \leq \varepsilon) \implies (x^2 \leq \varepsilon^2) \quad (1.2)$$

2. Soit maintenant x et ε deux éléments de \mathbb{R}^+ tels que $x^2 \leq \varepsilon^2$.

Par passage à la contraposée, (??) s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, (x^2 > \varepsilon^2) \implies (x > \varepsilon)$$

Mais comme x et ε jouent le même rôle, nous avons aussi, de manière équivalente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 < \varepsilon^2) \implies (x < \varepsilon)$$

D'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 = \varepsilon^2) \iff \{(x - \varepsilon)(x + \varepsilon) = 0\} \iff (x = \varepsilon)$$

de sorte que nous arrivons à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 \leq \varepsilon^2) \implies (x \leq \varepsilon)$$

Exercice IV.4 Ch4-Exercice4

Montrer que la fonction $x \rightarrow x^2$ admet pour limite 0 en $x = 0$.

Solution : En effet, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \sqrt{\varepsilon}, \quad (0 < |x| < \eta) \implies (|x^2| < \varepsilon),$$

puisque $x^2 < \eta^2 (= \varepsilon)$.

Exercice IV.5 Ch4-Exercice5

On considère la fonction $x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, définie sur \mathbb{R}^* . Montrer qu'elle admet en 0 une limite à droite égale à 1 et une limite à gauche égale à -1 , mais qu'elle n'admet pas de limite en 0.

Solution : Pour $x > 0$, on a $x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 + x^2}$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0 puisque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \quad (0 < x < \eta) \implies (\sqrt{1 + x^2} - 1 < \varepsilon),$$

on peut choisir $\eta = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}$. En effet, puisque $x > 0$, on a (voir l'exercice IV.3 :

$$(\sqrt{1 + x^2} - 1 < \varepsilon) \iff (x^2 < (1 + \varepsilon)^2 - 1) \iff (x < \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}).$$

Faire le même raisonnement pour $x < 0$ avec la différence que $x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1 + x^2}$ qui tend vers -1 quand x tend vers 0.

f n'admet pas de limite en 0 puisque la limite à droite est différente de la limite à gauche.

Exercice IV.6 Ch4-Exercice6

Montrer que f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a qui sont égales.

Solution :

1. Si f admet une limite l en a , alors l est limite à gauche et limite à droite en a .
2. Réciproquement, écrivons que $f(a+0) = f(a-0) = l$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1, (a < x < a + \eta_1) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2, (a - \eta_2 < x < a) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$

Il suffit alors de prendre $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ pour montrer que f admet une limite en a égale à l .

Exercice IV.7 Ch4-Exercice7

Soit la fonction $x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, définie sur \mathbb{R}^* . Trouver une suite (x_n) qui tend vers 0 et telle que $(f(x_n))$ ne tend pas vers 1. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ (si elle existe) est différente de 1.

Solution : Soit la suite $x_n = -\frac{1}{n}$, alors cette suite tend vers 0 et la suite $f(x_n) = -\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ tend vers -1 . D'où la limite en 0 ne peut être égale à 1 puisque l'on a exhibé une suite (x_n) qui tend vers 0 alors que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers 1.

Exercice IV.8 Ch4-Exercice8

En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Solution : Si l'on regarde (voir la figure (??)). sur un graphique la longueur d'arc de cercle (de rayon 1) correspondant à un angle au centre θ (exprimé en radian), on a, pour $\theta \in [0, \pi/2]$: $0 \leq \sin \theta \leq \theta$. Si l'on fait tendre θ vers $0+$, alors $\sin \theta$ tend vers 0. Si maintenant on prend $\theta \in [-\pi/2, 0]$, alors on a $\theta \leq \sin \theta \leq 0$ et si l'on fait tendre θ vers $0-$, alors $\sin \theta$ tend vers 0. La fonction $\sin \theta$ ayant une limite à droite égale à la limite à gauche en 0, sa limite en 0 est égale à 0.

Exercice IV.9 Ch4-Exercice9

1. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et que $|f(x)| \leq g(x)$ pour $x > A > 0$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Soient trois fonctions f_1, f_2 et g telles que $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ pour $x > A > 0$. Si f_1 et f_2 ont même limite l à l'infini, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.

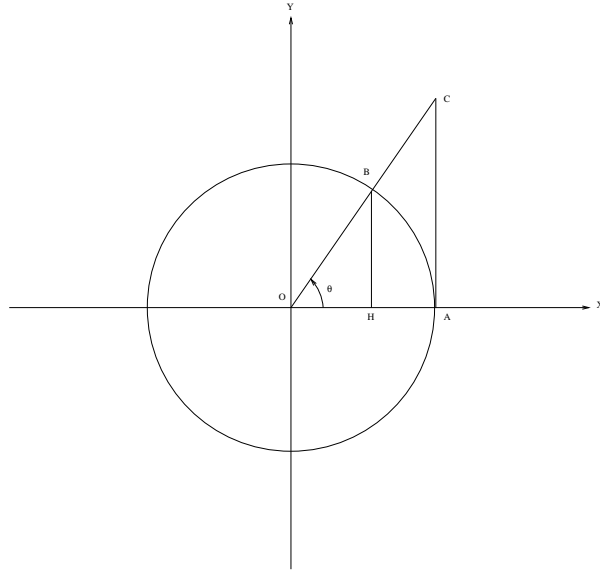


FIG. 1.1 – longueur d'arc et sinus

3. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x+2} = 1$.

Solution :

1. Écrivons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, (x > B) \Rightarrow (g(x) < \varepsilon).$$

Or pour $x > A > 0$, on a $|f(x)| \leq g(x)$, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C = \max\{A, B\} > 0, (x > C) \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon).$$

2. De même que pour la première question on refait les démonstrations du théorème de comparaison IV.1.4 en remplaçant $\exists \eta$ par $\exists B > 0$ et $0 < |x - a| < \eta$ par $x > B$.
3. Pour $x > 0$, on a $0 < \frac{x+3}{x+2} - 1 = \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{x}$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+2} - 1\right) = 0$ soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x+2} = 1$.

Exercice IV.10 Ch4-Exercice10

On suppose que la fonction f est strictement négative (resp. positive) au voisinage d'un point a , quel est le signe de la limite de f au point a ? Donner un exemple de chacun des cas.

Solution : Puisque $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) au voisinage de a , en appliquant le résultat sur la comparaison des limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$).

Par exemple $\sqrt{|x|} > 0$ (resp. $-\sqrt{|x|} < 0$) pour tout x , donc évidemment dans un voisinage de 0, et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{|x|} = 0$).

Exercice IV.11 Ch4-Exercice11

Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ en utilisant la composition des fonctions.

Solution : Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} 1 - y^2 = 1$ et que $\lim_{z \rightarrow 1} \sqrt{z} = 1$ en composant toutes ces fonctions et en appliquant le théorème sur la composition des limites, on obtient que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1$.

Exercice IV.12 Ch4-Exercice12

Montrer que $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Solution : Remarquons que, si $A > 0$, $(\sqrt{x} > A) \Leftrightarrow (x > A^2)$. On a donc

$$\forall A > 0, \exists B = A^2 (> 0), (x > B) \Rightarrow (\sqrt{x} > A).$$

Exercice IV.13 Ch4-Exercice13

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a et telles que $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$. Montrer que si f est minorée, au voisinage de a , par un réel strictement positif, alors $f(x)g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$.

Solution : f est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a , donc

$$\exists m > 0, \exists \alpha > 0, \{x \in]a - \alpha, a + \alpha[\Rightarrow f(x) > m > 0\}.$$

D'autre part $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$, donc :

$$\forall B > 0, \exists \beta > 0, (0 < |x - a| < \beta) \Rightarrow (g(x) > B),$$

pour $A > 0$ donné, on prend $B = A/m$, $\eta = \min\{\alpha, \beta\}$ et on obtient que :

$$(0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow (f(x)g(x) > Bm (= A)),$$

ce qui montre que $f(x)g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$.

Exercice IV.14 Ch4-Exercice14

Soit f telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec $l > 0$.

1. Montrer, en utilisant la définition de la limite qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - a| < \eta$ alors $f(x) > \frac{l}{2}$.
2. On suppose que $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$, montrer que $f(x)g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$.
3. Montrer que les résultats précédents sont encore valables quand x tend vers l'infini.
4. Appliquer ce résultat pour calculer la limite de $\frac{x+1}{2x-1}e^x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Solution :

1. Écrivons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$

Puisque $l > 0$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{l}{2}$, on a donc l'existence de η tel que :

$$(0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow \left(\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}\right),$$

ce qui prouve le résultat.

2. On applique l'exercice IV.13 puisque l'on vient de montrer que f est minorée par $\frac{l}{2} > 0$ dans un voisinage de a .

3. Les résultats précédents se démontrent même si a est infini. En effet on remplace $0 < |x - a| < \eta$ par $x > C > 0$.

4. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+1/x}{2-1/x} = \frac{1}{2} (> 0)$$

et $e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, d'où $\frac{x+1}{2x-1}e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice IV.15 Ch4-Exercice15

Voici quelques exemples d'indéterminations que vous allez traiter.

($\frac{0}{0}$) Soit $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = x^\beta$, où α et β sont deux réels positifs. Donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ en fonction des valeurs de α et β .

($\frac{\infty}{\infty}$) Inspirez-vous du cas ($\frac{0}{0}$) pour trouver un exemple.

($\infty - \infty$) Soit $f(x) = x$, $g(x) = x - h(x)$. Il est clair que le comportement de $(f - g)(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ peut être très différent selon celui de la fonction h . Trouver une fonction h qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, telle que g tend aussi vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

($0 \times \infty$) Comment peut-on se ramener à la forme ($\frac{0}{0}$) ?

Solution :

1. On a $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{\alpha-\beta}$, soit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ +\infty & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$$

2. On prend $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, on fait tendre x vers 0 par valeurs supérieures, on a les mêmes résultats.

3. Il suffit de prendre $h(x) = \frac{x}{2}$. Par contre si l'on prend $h(x) = 1$, on ne trouve absolument pas le même résultat pour $f - g$.
4. En écrivant $f.g = \frac{f}{1/g}$, on voit que cette forme indéterminée peut-être ramenée à la forme $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Exercice IV.16 Ch4-Exercice16

En utilisant le fait que $\sin x$ et $\cos x$ sont continues en 0, montrer que $\sin x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Solution : On écrit que $\sin x = \sin((x - a) + a)$ et on utilise les relations trigonométriques

$\sin((x-a)+a) - \sin a = \sin(x-a) \cos a + \cos(x-a) \sin a - \sin a = \sin a(\cos(x-a) - 1) + \sin(x-a) \cos a$
et donc

$$|\sin(x - a + a) - \sin a| \leq |\sin a| |\cos(x - a) - 1| + |\cos a| |\sin(x - a)|$$

On utilise alors le fait que $\lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1$ et on considère $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists \eta_1 > 0, (|y| < \eta_1) \Rightarrow (|\sin y| < \varepsilon / |\cos a|)$$

$$\exists \eta_2 > 0, (|y| < \eta_2) \Rightarrow (|\cos y - 1| < \varepsilon / |\sin a|)$$

Si on pose $y = x - a$ et si on prend $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, on obtient

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < 2\varepsilon$$

ce qui montre la continuité de $\sin x$ au point a .

Exercice IV.17 Ch4-Exercice17

Écrire la définition de : f n'est pas continue au point a . Montrer alors que la fonction de Heaviside H définie par $H(x) = 0$ pour $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour $x > 0$ n'est pas continue en 0, quelle que soit la valeur qu'on lui attribue au point $x = 0$.

Solution : H n'est pas continue au point a s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \eta > 0, \exists x \text{ tel que } (|x - a| < \eta) \text{ et } (|H(x) - H(a)| \geq \varepsilon)$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on choisit $\eta > 0$ quelconque.

1. Si $H(0) \geq \frac{1}{2}$, posons $x = -\frac{\eta}{2}$, alors

$$(|x| < \eta) \text{ et } (|H(x) - H(0)| = H(0) \geq \varepsilon)$$

2. Si $H(0) \leq \frac{1}{2}$, posons $x = \frac{\eta}{2}$, alors

$$(|x| < \eta) \text{ et } (|H(x) - H(0)| = 1 - H(0) \geq \varepsilon)$$

Ä

Exercice IV.18 Ch4-Exercice18

Démontrer en utilisant les suites que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0.

Solution : On peut prendre par exemple $x_n = \frac{1}{n}$. Alors $f(x_n) = 1$ et cette suite ne tend pas vers $f(0) = 0$!

Exercice IV.19 Ch4-Exercice19

Connaissant la continuité des fonctions élémentaires montrer que, par exemple, les fonctions $\sin x^p$, e^{-x^2} , $\ln(x^2 + 1)$, ... sont des fonctions continues en tout point de \mathbb{R} . Construire des fonctions continues assez compliquées...

Solution : Ce sont toutes des composées de fonctions continues ...

Exercice IV.20 Ch4-Exercice20

Soit $p(x)$ un polynôme de degré impair à coefficients réels. En utilisant le fait que $p(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow \pm\infty$, montrer qu'il existe a et b tels que $p(a) > 0$ et $p(b) < 0$. En déduire qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Solution : Supposons que le coefficient du plus haut degré est positif. Puisque $p(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, cela donne :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, (x > B) \Rightarrow (p(x) > A).$$

Il existe donc au moins $b \in \mathbb{R}$ tel que $p(b) > 0$. On fait le même raisonnement en $-\infty$ et on obtient $a \in \mathbb{R}$ tel que $p(a) < 0$. Puisqu'un polynôme est une fonction continue et que $p(a)p(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $p(c) = 0$.

Refaire le raisonnement lorsque le coefficient du plus haut degré est négatif.

Exercice IV.21 Ch4-Exercice21

On suppose que $a \leq b$, soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans ce segment. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Solution : Soit $g(x) = f(x) - x$, alors $g(a) = f(a) - a$ et puisque $f(x) \in [a, b]$, alors $g(a) \geq 0$, on montre de même que $g(b) \leq 0$. Si g s'annule en a ou b , alors un point fixe de f est a ou b . Si g ne s'annule ni en a ni en b , alors $g(a)g(b) < 0$ et $\exists c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ et c est un point fixe de f .

Exercice IV.22 Ch4-Exercice22

Quelle est l'image du segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $\sin x$, par $\cos x$?

Solution : L'image par $\sin x$ de $[-\pi/2, +\pi/2]$ est $[-1, 1]$ et par $\cos x$ c'est $[0, 1]$.

Exercice IV.23 Ch4-Exercice23

Peut-on prolonger par continuité la fonction $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ en 0 ?

Solution : Puisque l'on a montré dans l'exemple IV.2 que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, on peut donc prolonger cette fonction par continuité.

Exercice IV.24 Ch4-Exercice24

Montrer que si f est une fonction strictement monotone définie sur un intervalle I , alors elle est injective.

Solution : Soit $x \neq y$, alors soit $x < y$ et $f(x) < f(y)$ (f est strictement croissante), soit $x > y$ et $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas on obtient $f(x) \neq f(y)$, ce qui est la définition d'une fonction injective.
