MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 1 : L'expression mathématique

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Janvier 2010

▽

Chapitre I
L'expression mathématique

I.1 Opérations logiques élémentaires

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.1 Qu'est-ce que l'expression mathématique ?

Il s'agit de se familiariser à l'expression mathématique du raisonnement et à quelques règles de raisonnement logique constamment utilisées en mathématiques et ailleurs.

Ces règles permettent, à partir de **propositions** sur (ou **propriétés**, ou **relations** entre) des objets mathématiques (nombres, figures géométriques, fonctions, ...), connues ou posées comme vraies , de déduire d'autres propositions ou propriétés vraies.

Ici, le mot 'proposition' désigne tout énoncé sur les objets considérés auquel on peut attribuer une valeur de vérité. Par exemple :

– (P1) $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel,
– (P2) par deux points il passe une droite et une seule,
– (P3) une fonction dérivable est continue.

Quant à la vérité en question, il s'agit d'une **valeur logique** qui est l'un des deux mots **vraie** ou **fausse** (*principe du tiers exclu*). Ainsi (P1) est fausse et (P3) est vraie.

Un certain nombre de propositions sont considérées comme vérités premières, qui ne se déduisent pas d'autres propositions vraies. Certaines d'entre elles traduisent en langage mathématique les propriétés les plus évidentes des objets concrets auxquels on pense. On les appelle des **axiomes**. Par exemple, (P2) est un des axiomes de la géométrie euclidienne. Les autres propositions vraies le sont par déduction des axiomes ou d'autres propositions dont la vérité est déjà démontrée. Les axiomes sont en petit nombre et possèdent une cohérence interne, en ce sens qu'on ne peut déduire d'eux aucune proposition à la fois vraie et fausse.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Négation d'une proposition : non P

Exercices :
Exercice A.1.1

Définition I.1.1. *Si P est une proposition, sa* ***négation****, notée* **non** ***P****, est une proposition qui est fausse si P est vraie et qui est vraie si P est fausse.*

Il résulte de cette définition que **non(non** P**)** et P ont la même valeur logique, c'est à dire sont vraies simultanément ou fausses simultanément.

Par exemple

– P : Tous les dimanches je vais au restaurant,
  non P : Il existe au moins un dimanche où je ne vais pas au restaurant
– P : Je vais au restaurant au moins un dimanche de décembre,
  non P : Je ne vais jamais au restaurant le dimanche en décembre.

Remarque I.1.1. ***non*** *P se note aussi* $\neg \boldsymbol{P}$.

I.1.3 Disjonction de deux propositions : P ou Q

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Définition I.1.2. *Si P et Q sont deux propositions, la* ***disjonction****, notée* $\boldsymbol{P}$ **ou** $\boldsymbol{Q}$*, est une proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie et qui est fausse si les deux propositions sont fausses.*

On introduit maintenant la notion de table de vérité :

Définition I.1.3. *Soient P et Q deux propositions, R une proposition dépendant de P et Q (dans cet ordre). On associe à R le tableau suivant :*

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	

où les cases blanches seront remplies par la lettre V chaque fois que R est vraie et la lettre F si elle est fausse, selon les valeurs logiques (V ou F) de P et Q respectivement

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

indiquées sur la 1ère colonne et la 1ère ligne. Ce tableau s'appelle la ***table de vérité*** *de* R.

Par exemple si R **=** **(**P **ou** Q**)**, sa table de vérité s'écrit :

P	Q	P ou Q
V	***V***	***V***
V	***F***	***V***
F	***V***	***V***
F	***F***	***F***

Par exemple, si on considère les deux propositions :
- P : Tous les lundis je vais au cinéma,
- Q : Le 15 de chaque mois je vais au cinéma,

La proposition (P **ou** Q) est vraie si elle s'applique à quelqu'un qui va au cinéma tous les lundis ou à quelqu'un qui va au cinéma le 15 de chaque mois (il peut évidemment faire les deux). Elle est fausse dans tous les autres cas. En particulier elle est fausse s'il s'agit de quelqu'un qui ne va au cinéma que les lundis 15.

Attention, le 'fromage ou dessert' du restaurant n'est pas un 'ou mathématique' car il est exclusif.

Si dans une démonstration on veut utiliser l'hypothèse (P **ou** Q) est vraie, alors deux cas sont possibles :
- soit P est vraie et on utilise ce résultat dans la démonstration,
- soit P est fausse, alors Q est vraie et l'on utilise ces deux résultats dans la démonstration.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Pour montrer que (P **ou** Q) est vraie, il faut démontrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- soit P est vraie et donc (P **ou** Q) est vraie,
- soit P est fausse et ceci peut être utilisé pour montrer que Q est vraie.

Remarque I.1.2. *P **ou** Q se note aussi $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$.*

I.1.4 Equivalence de deux propositions : P $\Leftrightarrow$ Q

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Définition I.1.4. *L'équivalence de deux proposition P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ou fausses simutanément.*

On a donc la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, ce que l'on peu aussi exprimer par "P et Q sont équivalentes", on dit aussi que P (resp. Q) est une condition nécessaire et suffisante de Q (resp. P), ou que P (resp. Q) est vraie si et seulement si Q (resp. P) est vraie.

Par exemple :

$$\{\ \textbf{non}\ (\ \textbf{non}\ P)\} \Leftrightarrow P$$

$$\{P\ \textbf{ou}\ Q\} \Leftrightarrow \{Q\ \textbf{ou}\ P\}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\{2x = 4\} \Leftrightarrow \{x = 2\}$$

La disjonction est associative dans le sens où

$$\{P \textbf{ ou } (Q \textbf{ ou } R)\} \Leftrightarrow \{(P \textbf{ ou } Q) \textbf{ ou } R)\}$$

Si P est toujours fausse, alors (P **ou** Q) est équivalente à Q.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.5 Conjonction de deux propositions : P et Q

Exercices :
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Exemples :
Exemple B.1.1

Définition I.1.5. *Si P et Q sont deux propositions, la **conjonction**, notée **P et Q**, est la proposition qui est vraie si les deux propositions sont vraies et qui est fausse si au moins l'une des deux propositions est fausse.*

Il résulte de cette définition que les propositions (P **et** Q) et (Q **et** P) sont équivalentes.

Par exemple, soient les deux propositions :

- P : Tous les lundis je vais au cinéma,
- Q : Le 15 de chaque mois je vais au cinéma,

La proposition (P **et** Q) est vraie si elle s'applique à quelqu'un qui va au cinéma tous les lundis et le 15 de chaque mois. Elle est fausse dans tous les autres cas. Attention, (P **et** Q) ne correspond pas à : Tous les lundis 15 je vais au cinéma.

Soient deux propositions P et Q, vous montrerez en exercice les deux résultats suivants :

- la proposition **non** (P **et** Q) est équivalente à la proposition **(non** P**) ou (non** Q**)**,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– la proposition **non** **(**P **ou** Q**)** est équivalente à la proposition **(non** P**) et (non** Q**)**.
Pour démontrer ce genre de résultat, on peut aussi utiliser les tables de vérité, ce qui est plus technique et donc parfois plus facile.

La conjonction est associative dans le sens où (P **et** Q) **et** R est équivalente à P **et** (Q **et** R).

Si P est toujours vraie, alors (P **et** Q) est équivalente à Q.

Remarque I.1.3. *P **et** Q se note aussi $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$.*

I.1.6 Implication logique de deux propositions : $P \Rightarrow Q$

Exercices :
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14

Exemples :
Exemple B.1.2

Définition I.1.6. *Soient P et Q deux propositions, on appelle l'**implication logique (de** Q **par** P**)** la proposition, notée* $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$*, qui est vraie si*

- *soit P est fausse,*
- *soit P est vraie et Q est vraie.*

Elle est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse.

On a donc la table de vérité suivante :

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$
V	***V***	***V***
V	***F***	***F***
F	***V***	***V***
F	***F***	***V***

Attention, $P \Rightarrow Q$ n'est pas équivalente à $Q \Rightarrow P$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Implication logique de deux propositions : $P \Rightarrow Q$

L'implication se dit, en langage courant, 'P implique Q' et signifie que Q est vraie dès que P l'est. D'ailleurs pour prouver que cette implication est vraie, on n'a qu'une seule chose à faire : démontrer que *si* P est vraie, alors Q aussi l'est. Mais il faut faire attention car elle ne donne aucun renseignement sur Q si P est fausse, comme on le voit dans l'exemple suivant :

Soient 3 nombres réels x, y, z. On a l'implication (bien connue) suivante :

$$(x = y) \Rightarrow (xz = yz)$$

On voit sur cet exemple que quand la proposition (P) est fausse ($x \neq y$), la conclusion (Q) peut être vraie (si $z = 0$) ou fausse (si $z \neq 0$) .

Dans la pratique, par abus de langage, quand la notation ($P \Rightarrow Q$) est utilisée, on entend que cette implication est vraie : on dira 'démontrer $P \Rightarrow Q$' plutôt que 'démontrer que ($P \Rightarrow Q$) est vraie'.

Proposition I.1.1. *$P \Rightarrow Q$ est équivalente à ((**non** P) **ou** Q).*

Démonstration - On a vu dans le paragraphe référencé que ((**non** P) **ou** Q) est vraie si **non** P est vraie (donc P fausse) ou si **non** P est fausse (P vraie) et Q est vraie. Ceci correspond bien à $P \Rightarrow Q$.

Au lieu de dire que 'P implique Q' on dit aussi que 'P est une condition suffisante de Q' (pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit), ou que 'Q est une condition nécessaire de P' (si P est vraie, nécessairement Q l'est).

Corollaire I.1.1. ***non*** *($P \Rightarrow Q$) est équivalente à (P* ***et*** *(**non** Q)).*

Attention ! La négation d'une implication n'est pas une implication.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Enfin, l'implication est transitive, soit

$$\{(P_1 \Rightarrow P_2) \textbf{ et } (P_2 \Rightarrow P_3)\} \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3)$$

Proposition I.1.2. $(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\textbf{non } Q \;\Rightarrow\; \textbf{non } P)$

La démonstration est à faire en exercice.

Proposition I.1.3. $P \Leftrightarrow Q$ *est équivalent à* $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$

L'équivalence est transitive, soit

$$\{(P_1 \Leftrightarrow P_2) \textbf{ et } (P_2 \Leftrightarrow P_3)\} \Rightarrow (P_1 \Leftrightarrow P_3)$$

I.2 Quelques formes de raisonnements

Un raisonnement est une manière d'arriver à une conclusion en partant d'une (ou de plusieurs) hypothèse(s), et en utilisant les règles de déduction d'une proposition à partir d'une autre. Vous connaissez déjà le raisonnement par équivalence qui consiste à partir d'une proposition vraie (l'hypothèse par exemple) et à construire par équivalence d'autres propositions (qui sont donc vraies), dont la dernière est la conclusion. Vous connaissez le raisonnement par récurrence que nous formaliserons plus tard. Voici deux autres formes de raisonnement qui découlent des règles de logique précédentes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.1 Raisonnement à partir de la contraposée

Exercices :
Exercice A.1.15

La proposition I.1.2 donne une autre manière de démontrer que $P \Rightarrow Q$. En effet il est équivalent de montrer que (**non** Q) $\Rightarrow$ (**non** P), c'est-à-dire que si la proposition Q est fausse alors la proposition P est fausse, ce qui est parfois plus simple. C'est ce que l'on appelle un raisonnement par contraposée.

Un premier exemple emprunté à Racine est : 'Si Titus est jaloux, il est amoureux'. En effet, s'il n'est pas amoureux, il n'a aucune raison d'être jaloux !

Un deuxième exemple mathématique : Si n est un entier impair alors le chiffre des unités de n est impair. On va montrer la contraposée, à savoir :

$$\text{(le chiffre des unités de } n \text{ est pair)} \Rightarrow (n \text{ est pair}).$$

En effet, si le chiffre des unités de n est pair, on peut écrire $n = 10q+2p$ soit $n = 2(5q+p)$ c'est-à-dire n est pair.

Attention La proposition$(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\textbf{non } P \quad \Rightarrow \quad \textbf{non } Q)$ est fausse. Elle peut conduire à de nombreuses erreurs, par exemple la suivante : étant donné que 'tout homme est mortel', cet énoncé pourrait servir à prouver que 'toute vache est immortelle'.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Raisonnement par l'absurde

Exercices :
Exercice A.1.16

Le principe du raisonnement par l'absurde est le suivant : pour démontrer qu'une proposition R est vraie, on suppose le contraire (c'est-à-dire R fausse), et on essaye d'arriver à un résultat faux (absurde).

Par exemple, pour montrer qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif (alors que toute calculette possède un tel nombre puisque ses capacités de stockage ne sont pas infinies), on va supposer qu'il en existe un, noté a (donc $0 < a$ est tel qu'il n'existe aucun réel x tel que $0 < x < a$). Or le réel $\frac{a}{2}$ est tel que $0 < \frac{a}{2} < a$, ce qui contredit les hypothèses.

On peut appliquer ce principe par exemple à la proposition $(P \Rightarrow Q)$, notée R. On a vu dans les cours référencés que $(P \Rightarrow Q)$ s'écrit (Q **ou** (**non** P)) et que **non**(Q ou (**non** P)) est équivalente à ((**non** Q) **et** P). On peut donc montrer l'implication $(P \Rightarrow Q)$ en montrant que ((**non** Q) **et** P) est fausse. Plus précisément on suppose que P est vraie et Q est fausse et l'on démontre que cela aboutit à un résultat faux.

Par exemple, pour montrer que, n étant un entier, (n impair) $\Rightarrow$ (le chiffre des unités de n est impair), on va supposer à la fois que n est impair et que le chiffre de ses unités est pair, ce qui donne :

$$2m + 1 = 10q + 2p \;\Leftrightarrow\; 1 = 2(5q + p - m)$$

ce qui est impossible puisque 1 ne peut pas être le produit de deux entiers dont l'un est 2.

I.3 Notions sur les ensembles

I.3.1 Définition d'un ensemble

Un **ensemble** E est considéré comme une collection d'objets (mathématiques) appelés **éléments**.

- $\boldsymbol{x \in E}$ signifie x est un élément de E,
- $\boldsymbol{x \notin E}$ signifie x n'est pas un élément de E.

Un ensemble E est donc défini si, pour chaque objet x considéré, une et une seule des deux éventualités $x \in E$ et $x \notin E$ est vraie. En pratique, on définit un ensemble, soit en exhibant tous ses éléments, soit en donnant un critère permettant de vérifier la vérité de $(x \in E)$ ou de $(x \notin E)$. Par exemple l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls s'écrit $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

Dans la suite, nous supposerons connus les ensembles suivants :

- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels,
- l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs,
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels,
- l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- l'ensemble $\mathbb{R}_*$ des nombres réels non nuls,
- l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des nombres réels positifs ou nuls,
- l'ensemble $\mathbb{R}^-$ des nombres réels négatifs ou nuls.

Par exemple, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1+i \in \mathbb{C}$, $1+i \notin \mathbb{R}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3.2 Définition d'un sous-ensemble et de l'ensemble vide

Exercices :
Exercice A.1.17
Exercice A.1.18

Soit E un ensemble, une **partie** ou **sous-ensemble** de E est un ensemble A vérifiant la propriété suivante pour tout x :

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in E)$$

On dit aussi que ***A* est inclus dans *E***, et on note $\boldsymbol{A \subset E}$, par exemple $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

Pour montrer l'égalité de deux ensembles on procède par double inclusion, c'est-à-dire

$$(A = B) \;\Leftrightarrow\; \{(A \subset B) \textbf{ et } (B \subset A)\}$$

ou par équivalence, c'est-à-dire

$$(x \in A) \;\Leftrightarrow\; (x \in B)$$

qui est la traduction de la double inclusion.

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble qui ne contient aucun élément, c'est-à-dire qui est tel que la propriété $(x \in \emptyset)$ est fausse quel que soit x. Donc $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E. En effet $x \in \emptyset$ étant toujours fausse l'implication $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in E)$ est vraie.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.3.3 Intersection et union d'ensembles

Exercices :
Exercice A.1.19
Exercice A.1.20
Exercice A.1.21

Si A et B sont deux parties de E, on appelle **intersection** de A et B, notée $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ l'ensemble des éléments communs à A et B, et l'on a :

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \textbf{ et } (x \in B)).$$

Par exemple, soit $E = \mathbb{N}$, A l'ensemble des entiers multiples de 3, B l'ensemble des entiers multiples de 5, alors $A \cap B$ est l'ensemble des entiers multiples de 15. De manière générale, si A est l'ensemble des entiers multiples de n et B l'ensemble des entiers multiples de m, alors $A \cap B$ est l'ensemble des entiers multiples du plus petit multiple commun de n et m. (À propos vous souvenez-vous du calcul de ce plus petit multiple commun ?)

On appelle **union** de A et B, notée $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B, et l'on a : $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \textbf{ ou } (x \in B))$.

Ainsi, soit $E = \mathbb{N}$, A l'ensemble des entiers multiples de 3, B l'ensemble des entiers multiples de 5, alors $A \cup B$ est l'ensemble des entiers qui sont multiples de 3 ou de 5.

Soit E un ensemble quelconque, pour toutes parties A, B et C de l'ensemble E, on a les égalités ensemblistes suivantes :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

que l'on peut démontrer par équivalence.

I.3.4 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Exercices :
Exercice A.1.22

Cours :
Ensemble - définition

Soit E un ensemble, pour toute partie A de E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A s'appelle le **complémentaire** de A dans E et se note $\complement_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{E}\backslash\boldsymbol{A}$.

Lorsque, du fait du contexte, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E, on se contente souvent de noter $\complement\boldsymbol{A}$, le complémentaire de A dans E.

Par exemple,
- soit $E = \mathbb{N}$ et soit A l'ensemble des entiers pairs, alors $\complement A$ est l'ensemble des entiers impairs,
- soit $E = \mathbb{R}$ et soit $A = \{0\}$, alors $\complement A = \mathbb{R}_*$,
- soit $E = \mathbb{R}$ et soit $B = \{2\}$ alors $\complement B = \mathbb{R}\backslash\{2\}$,
- soit $E = \mathbb{R}$ et soit $A = \mathbb{R}^+$, alors $\complement A = \mathbb{R}_*^-$.

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, on a les propriétés suivantes
- $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$,
- $\complement(\complement A) = A$,
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$,
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

Notons bien que le complémentaire d'une intersection est l'union des complémentaires et de même le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Notons aussi que lorsque l'on définit un ensemble E comme l'ensemble des éléments vérifiant une propriété P, soit

$$E = \{x,\ P(x)\},$$

le complémentaire de E est l'ensemble des éléments vérifiant **non** P. De même, si A et B sont définis à l'aide des propriétés P et Q, alors $A \cap B$ est défini par P **et** Q et $A \cup B$ par P **ou** Q.

Attention : la notation $\complement_E A$ suppose que A est inclus dans E, on a donc $\complement_E(\complement_E A) = A$, alors que la notation $B \backslash A$ définie par $x \in B \backslash A \Leftrightarrow x \in B, x \notin A$ ne suppose pas que A est inclus dans B, on a alors $B \backslash (B \backslash A) = A \cap B$.

Par exemple, $E = \mathbb{R}, A = [1,3], B = [2,5], B \backslash A =]3,5], B \backslash (B \backslash A) = [2,3] = A \cap B$, on montrerait de même que $A \backslash (A \backslash B) = [2,3]$.

I.3.5 Cardinal d'un ensemble

Exercices :
Exercice A.1.23
Exercice A.1.24

On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il a un nombre fini d'éléments. Le nombre de ses éléments est appelé **cardinal** de E et se note **card(*E*)**.

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, alors card(E)$= 3$.

On note $\boldsymbol{\mathcal{P}(E)}$ l'ensemble des parties de E.

Proposition I.3.1. *Le nombre des parties d'un ensemble fini de cardinal n est égal à 2^n.*

Démonstration - Il suffit de dénombrer le nombre des parties de $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

- partie vide $\emptyset$,
- parties ne contenant qu'un élément, il y en a n $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$,
- parties formées de deux éléments, il y en a C_n^2 de la forme $\{a_i, a_j\}$ avec $i \neq j$,
- $\ldots$
- parties formées de p éléments obtenues en prenant toutes les combinaisons de p éléments parmi n, il y en a C_n^p,
- $\ldots$
- E lui-même ($E \subset E$).

Le nombre d'éléments est donc

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cette dernière relation est une application de la formule du binôme de Newton qui est donnée en exercice.

I.3.6 Produit cartésien d'ensembles

Exercices :
Exercice A.1.25

Si E et F sont deux ensembles, le **produit cartésien** de E par F, noté $\boldsymbol{E \times F}$, est constitué des **couples** $\boldsymbol{(x, y)}$, où x décrit E et où y décrit F. Les couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Si E est un ensemble, le produit cartésien $E \times E$ se note $\boldsymbol{E^2}$.

Par exemple, le produit cartésien $\mathbb{R}^2$ est formé des couples de nombres réels ; ceux-ci permettent de déterminer un point du plan par ses coordonnées, lorsqu'on s'est donné un repère (appelé aussi repère cartésien) c'est-à-dire la donnée d'une origine O et de deux vecteurs non colinéaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le produit cartésien de E par lui-même n fois se note $\boldsymbol{E^n}$. Les éléments de E^n sont les **n-uples** $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ où les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartiennent à E.

Les n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ sont égaux si et seulement si on a $x_i = x'_i$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$.

Attention ! lorsque $E \neq F$, $E \times F$ est différent de $F \times E$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4 Quantificateurs

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.1 Proposition dépendant d'une variable : $P(x)$

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Si P est une proposition dont l'énoncé dépend de la valeur d'une variable x on peut la noter $\boldsymbol{P(x)}$ et considérer les cas particuliers $P(a)$ où a est une valeur particulière de x.

Par exemple, soit dans $\mathbb{R}$ la proposition suivante $P(x) : x^2 - 1 < 0$. Alors $P(2)$ est fausse et $P(0)$ est vraie, et plus généralement $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-1, +1[$.

Soit P une proposition dépendant de l'entier n, le **raisonnement par récurrence** permet de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa formalisation est à faire en exercice.

Soit E un ensemble, P une propriété dépendant d'une variable x de E, on est souvent amené à considérer l'ensemble des éléments a de E tels que $P(a)$ soit vraie (on dit aussi, les a qui vérifient la propriété P). On le note

$$\boldsymbol{A_P = \{x \in E,\ P(x)\}}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.2 Quantificateur universel : $\forall$

Exercices :
Exercice A.1.28
Exercice A.1.29

Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble de E, on écrit :

$$\boldsymbol{\forall x \in E,\ P(x).}$$

(La virgule dans cette 'phrase' peut être remplacée par un autre signe séparateur, couramment le point-virgule (;) ou le trait vertical (|)).

Si on reprend la notation A_P dfinie précédemment, on a alors :

$$(\forall x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow A_P = E.$$

Exemples

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$,
- $\forall x \in [2, +\infty),\ x^2 - 4 \geq 0$,
- $E \subset F$ s'écrit : $\forall x \in E,\ x \in F$.

Proposition I.4.1. *On a l'équivalence suivante :*

$$(\forall x \in E, (P(x) \text{ et } Q(x))) \ \Leftrightarrow\ ((\forall a \in E, P(a)) \text{ et } (\forall b \in E, Q(b)))$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - En effet $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies pour tout élément de E est bien équivalent à $P(x)$ est vraie pour tout élément de E et $Q(x)$ est vraie pour tout élément de E. On peut également démontrer cette proposition avec les ensembles, en effet :

$$A_P \cap A_Q = E \Leftrightarrow A_P = E \textbf{ et } A_Q = E.$$

I.4.3 Quantificateur existentiel : $\exists$

Exercices :
Exercice A.1.30
Exercice A.1.31
Exercice A.1.32

Exemples :
Exemple B.1.3

Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un élément x d'un ensemble E, on écrit :

$$\boldsymbol{\exists x \in E,\ P(x)}$$

qui se traduit par : 'il existe x appartenant à E tel que P(x) est vraie'.

S'il existe un unique élément x de E tel que P(x) est vraie, on écrira

$$\boldsymbol{\exists ! x \in E,\ P(x)}$$

Par exemple, $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$, mais $\exists ! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ ne peut pas s'écrire. Par contre, vous pouvez écrire

$$\exists ! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = 1.$$

La propriété $(\exists x \in E,\ P(x))$ se traduit par '$A_P \neq \emptyset$'.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition I.4.2. *On a l'équivalence suivante :*

$$\exists x \in E, \; ((P(x) \textbf{ ou } Q(x)) \; \Leftrightarrow \; (\exists a \in E, \; P(a)) \textbf{ ou } (\exists b \in E, \; Q(b))$$

Cette proposition est démontrée en exercice par double implication.

I.4.4 Quantificateurs multiples

Exercices :
Exercice A.1.33
Exercice A.1.34

Il s'agit simplement de successions de $\forall$ et $\exists$. Mais il faut faire très attention à l'ordre dans lequel on les écrit. Par contre on a le résultat évident suivant :

Proposition I.4.3. *Deux quantificateurs de même nature qui se suivent peuvent être échangés.*

Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geq 0.$$

De même

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x + y = 0.$$

Proposition I.4.4. *On a les équivalences suivantes :*

$$\textbf{non}(\forall x \in E,\ P(x)) \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in E,\ \textbf{non}\ P(a))$$

$$\textbf{non}(\exists a \in E,\ Q(a)) \ \Leftrightarrow\ (\forall x \in E,\ \textbf{non}\ Q(x))$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - La négation de 'la proposition P est vérifiée pour tout élément de E' est 'il existe au moins un élément de E pour lequel la proposition P est fausse'. Ce qui s'exprime mathématiquement par :

$$\textbf{non}\,(\forall x \in E,\ P(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists a \in E,\ \textbf{non}\ P(a)$$

On peut démontrer cette proposition avec les ensembles :

$$\textbf{non}(A_P = E) \Leftrightarrow (\exists a \in E, a \notin A_P) \Leftrightarrow (\exists a \in E,\ \textbf{non}\ P(a))$$

La deuxième proposition n'est que la négation de cette première proposition, si l'on appelle Q la proposition (**non** P).

Par exemple, la négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$ est $\exists a \in \mathbb{R},\ a \leq 0$.

Proposition I.4.5. *Soient E et F deux ensembles et P une proposition dépendant de deux indéterminées et à chaque couple d'éléments (a,b) du produit cartésien $E \times F$, on associe $P(a,b)$. Alors on a*

$$\textbf{non}\,(\forall a \in E,\ \exists b \in F,\ P(a,b)) \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in E,\ \forall b \in F,\ \textbf{non}\ P(a,b))$$

$$(\exists a \in E,\ \forall b \in F,\ P(a,b)) \ \Rightarrow\ (\forall b \in F,\ \exists a \in E,\ P(a,b))$$

Démonstration - La première est une application directe de la proposition précédente. La deuxième est admise ou laissée au lecteur courageux, vous pouvez là aussi utiliser les ensembles.

Attention ! L'implication inverse de celle de la proposition ci-dessus est fausse.

Attention ! $\exists x,\ \forall y$ n'a pas le même sens que $\forall y,\ \exists x$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.5 Relation d'équivalence

Exercices :
Exercice A.1.35

Documents :
Document C.1.1

Définition I.4.1. *On appelle* ***relation dans E*** *une partie de $E \times E$. Plus précisément, soit $\mathcal{R} \subset E \times E$, on dit que* ***x et y sont liés par la relation $\mathcal{R}$*** *si $(x, y) \in \mathcal{R}$. On écrit souvent $x\mathcal{R}y$ pour indiquer que x et y sont liés par la relation $\mathcal{R}$.*

Par exemple $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x \leq y\}$ définit une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et la relation associée est la relation (d'ordre) 'inférieur ou égal'. Autre exemple, $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathcal{R} = \{(p, q), (p', q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$ définit un exemple de relation qui va être appelée relation d'équivalence.

Définition I.4.2. *On appelle* ***relation d'équivalence*** *une relation qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

- *elle est* ***réflexive*** *: $(x, x) \in \mathcal{R}$,*
- *elle est* ***symétrique*** *: $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$,*
- *elle est* ***transitive*** *: $\{(x, y) \in \mathcal{R} \,\text{et}\, (y, z) \in \mathcal{R}\} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.*

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on écrit souvent $\boldsymbol{x \equiv y}$, ou $\boldsymbol{x \sim y}$, au lieu de $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Dans un ensemble quelconque, la relation x 'est égal à' y est une relation d'équivalence. À partir d'une relation d'équivalence, on peut définir des classes d'équivalence (voir le document référencé).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La relation d'équivalence est d'ailleurs une généralisation de la relation d'égalité. Elle est présente partout en mathématiques. Elle permet, lorsque l'on étudie certains objets mathématiques, de n'en conserver que les propriétés pertinentes pour le problème considéré.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre I

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch1-Exercice1

Soit la proposition P : n est un entier impair,

- Donner (**non** P) lorsque l'on considère que n est un entier,
- Donner (**non** P) lorsque l'on considère que n est un réel,

et en conclure que la réponse dépend du contexte.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch1-Exercice2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les deux propositions :
- P : n est un entier pair,
- Q : n est un entier impair,

La proposition (P **ou** Q) est-elle vraie pour tout n ? Quel est le résultat si l'on considère $n \in \mathbb{R}$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch1-Exercice3

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient les deux propositions :

- $P : x \leq 0$,
- $Q : x \geq 0$,

La proposition (P **ou** Q) est-elle vraie, quel que soit x ? Même question si l'on remplace Q par : $x > 0$. Même question enfin, si l'on remplace P par $x < 0$ et Q par $x > 0$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch1-Exercice4

On suppose que la proposition (P **ou** Q) est vraie. Comment doit être la proposition P pour être sûr que la proposition Q est vraie ? Application : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soient les deux propositions

- P : f est impaire ($f(-x) = -f(x)$, quel que soit x réel),
- Q : f est dérivable,

et on suppose que (P **ou** Q) est vraie pour les fonctions que l'on va considérer. Soit $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = 1$ si $x > 0$, $f_2(x) = -1$ si $x < 0$ et $f_2(0) = 0$. Peut-on en déduire que les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables ?

retour au cours

Solution

Exercice A.1.5 Ch1-Exercice5

Montrer que $(P$ **ou** $Q)$**ou** R est équivalente à P **ou** $(Q$ **ou** $R)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch1-Exercice6

Donner un théorème qui s'énonce comme une condition nécessaire et suffisante. Il y en a bien sûr un très grand nombre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch1-Exercice7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les deux propositions :

- P : n est pair,
- Q : n est impair,

La proposition (P **et** Q) est-elle vraie ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch1-Exercice8

Soient les deux propositions :

– P : x est un réel tel que $x \leq 0$,

– Q : x est un réel tel que $x \geq 0$,

Énoncer la proposition (P **et** Q) ?

retour au cours

Solution

Exercice A.1.9 Ch1-Exercice9

Soient trois propositions P, Q et R, montrer les résultats suivants :
- **non** (P **et** Q) $\Leftrightarrow$ (**non** P) **ou** (**non** Q),
- **non** (P **ou** Q) $\Leftrightarrow$ (**non** P) **et** (**non** Q).
- (P **et** Q)**ou** R $\Leftrightarrow$(P **ou** R)**et** (Q **ou** R).
- (P **ou** Q)**et** R $\Leftrightarrow$ (P **et** R)**ou** (Q **et** R).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch1-Exercice10

Montrer que (P **et** Q)**et** R est équivalente à P **et** (Q **et** R).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch1-Exercice11

Montrer que si Q est toujours vraie, alors quelle que soit la proposition P on a $P \Rightarrow Q$. Illustrer ce résultat par un exemple.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch1-Exercice12

Soit f une fonction réelle et soient les deux propositions :
- P : f est dérivable sur $[a, b]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[a, b]$,
- Q : f est croissante sur $[a, b]$,

P est-elle une condition nécessaire de Q ? (Quelle implication faut-il considérer ?) P est-elle une condition suffisante de Q ? Q est-elle une condition nécessaire de P ? Q est-elle une condition suffisante de P ? (Justifier toutes les réponses).

retour au cours

Solution

Exercice A.1.13 Ch1-Exercice13

Sachant que $P \Rightarrow Q$ s'écrit ((**non** P) **ou** Q) montrer que

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\textbf{non } Q \;\Rightarrow\; \textbf{non } P)$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch1-Exercice14

- Montrer que si Q est une proposition fausse, alors $P \Leftrightarrow (P\,\textbf{ou}\,Q)$. Donner un exemple.
- Montrer que, si R est une proposition vraie, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \{(P\,\textbf{et}\,R) \Rightarrow Q\}$. Ainsi, pour démontrer une implication, on peut adjoindre à P toute vérité déjà établie, ce qui peut faciliter la démonstration. Donner un exemple.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch1-Exercice15

Montrer par contraposée que si n est un entier premier avec 6 alors n est impair. (On rappelle que n est un entier premier avec l'entier p si n et p n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.)

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch1-Exercice16

Démontrer par l'absurde le résultat suivant

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon)\ \Rightarrow a \leq b$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch1-Exercice17

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par : $A = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$, est-ce que $A \subset B$ ou $B \subset A$? (Justifier le résultat.)

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch1-Exercice18

Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ (x > 0)$ **ou** $(x \leq 0)\}$, montrer par double inclusion que $E = \mathbb{R}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch1-Exercice19

Soit $E = \mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire l'espace tout entier), soit A un plan de l'espace passant par l'origine et B une droite de l'espace passant par l'origine. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$ en fonction de la position de la droite par rapport au plan.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch1-Exercice20

Soient A et B deux parties d'un ensemble E

1. On suppose dans cette question que $A \subset B$. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$. Que se passe-t-il si $A = \emptyset$?
2. Montrer que
   (a)
   $$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \text{ et } \ B = \emptyset).$$
   (b)
   $$(A = \emptyset \text{ ou } \ B = \emptyset) \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$
   L'implication réciproque réciproque est-elle vraie ?
   (c)
   $$(A = E \text{ ou } \ B = E) \Rightarrow A \cup B = E.$$
   L'implication réciproque réciproque est-elle vraie ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch1-Exercice21

Pour toutes parties A, B et C de l'ensemble E, montrer les égalités ensemblistes suivantes :

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch1-Exercice22

Pour toutes parties A et B de l'ensemble E, montrer que :
- $\complement(\complement A) = A$, ($A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$)
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch1-Exercice23

Soit $E = \{1, 2, 3\}$, montrer, en les énumérant, que le nombre de parties de E est égal à 8.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch1-Exercice24

Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^n b^n$$

On rappelle que $0! = 1$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.25 Ch1-Exercice25

Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ est différent de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch1-Exercice26

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier n, formaliser le raisonnement par récurrence pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.27 Ch1-Exercice27

Soit P une propriété dépendant d'une variable x, et soit $A_P = \{x \in E,\, P(x)\}$ l'ensemble des éléments qui vérifient cette propriété. Montrer que

1. $$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (A_P \subset A_Q)$$

2. $$A_{(P \text{ ou } Q)} = A_P \cup A_Q.$$

3. $$A_{(P \text{ et } Q)} = A_P \cap A_Q.$$

4. $$A_{(\text{ non } P)} = \complement A_P.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch1-Exercice28

En raisonnant par double implication, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R};\ ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow (a = 0,\ b = 0,\ c = 0).$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch1-Exercice29

Soit E un ensemble et soient les deux propositions :

- $\forall x \in E, (P(x)$ **ou** $Q(x))$,
- $(\forall a \in E, P(a))$ **ou** $(\forall b \in E, Q(b))$.

Trouver laquelle implique l'autre. Donner un contre-exemple pour l'implication qui n'est pas valable.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch1-Exercice30

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, montrer que : $\exists c \in \mathbb{R}, a < c < b$. La démonstration sera ‘constructive’, c’est-à-dire que pour démontrer l’existence d’un tel c, vous allez en donner un explicitement.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.31 Ch1-Exercice31

Montrer que

$$\exists x \in E, \; ((P(x) \;\textbf{ou}\; Q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists a \in E, \; P(a)) \;\textbf{ou}\; (\exists b \in E, \; Q(b))$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.32 Ch1-Exercice32

Montrer que

$$(\exists x \in E,\ P(x) \textbf{ et } Q(x)) \Rightarrow (\exists a \in E,\ P(a)) \textbf{ et } (\exists b \in E,\ Q(b))$$

puis trouver un contre-exemple mathématique pour démontrer que la réciproque est fausse.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.33 Ch1-Exercice33

Montrer que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},, x + y = 0$ est vraie, alors que la proposition $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ est fausse.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.34 Ch1-Exercice34

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n) = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$, une suite de nombres réels. Nous nous intéresserons plus loin dans le cours à la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon,\ \exists N,\ \forall n \geq N\ ,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$$

que l'on peut écrire

$$\forall \varepsilon,\ \exists N,\ P(N, \varepsilon)$$

En vous aidant d'un graphique, interprétez cette proposition, puis donner sa négation en précisant ce qu'est **non** $P(N, \varepsilon)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.35 Ch1-Exercice35

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathcal{R} = \{(p,q),(p',q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$, montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 TD1-Exercice1

Écrire la négation des propositions suivantes : (on utilisera les quantificateurs)

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \leq 2$ et $g(x) = 0$.
2. Quel que soit n dans $\mathbb{Z}$, $n \leq 0$ ou $n > 0$.
3. Il existe au moins un x dans $\mathbb{R}$ tel que $e^x > 1$.
4. Il existe un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que $e^x = 1$.
5. Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x}$ existe.
6. n est un entier positif implique que $n^3 - n$ est multiple de 3.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 5 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 6 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD1-Exercice2

Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété satisfaite ou non par les éléments de E. Quel est le seul sous-ensemble A de E pour lequel l'implication

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \Rightarrow (\exists x \in A,\ P(x)),$$

est fausse ?

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.3 TD1-Exercice3

Soit E et F deux ensembles. Soit f une application qui à tout élément de E fait correspondre un élément, noté $f(x)$ de F. Soit la proposition

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)).$$

1. Écrire la négation de cette proposition.
2. Écrire la contraposée de l'implication.
3. Écrire la négation de la contraposée.
4. Comparer les deux négations obtenues en 1) et 3).

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD1-Exercice4

Soient P et Q deux propositions. Les propositions ci-dessous sont-elles exactes ?

1. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.
2. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.
3. $P \Rightarrow (P \textbf{ ou } Q)$.
4. $P \Rightarrow (P \textbf{ et } Q)$.
5. $Q \Rightarrow (P \textbf{ ou } Q)$.
6. $(P \textbf{ et } Q) \Rightarrow Q$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 5 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 6 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD1-Exercice5

Soit n un entier relatif et $P(n)$ la proposition suivante :

$$(n^2 \text{ est pair}) \Rightarrow (n \text{ est pair})$$

1. Écrire la contraposée de $P(n)$ et démontrer que cette proposition est vraie.
2. Redémontrer cette proposition par l'absurde (on pourra calculer $n^2 - n$).

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD1-Exercice6

Soit E un ensemble. Soient A, B deux sous-ensembles de E. Démontrer que :

1. $A \cap B = A \iff A \subset B$.
2. $A \cup B = A \iff B \subset A$ (on pourra passer aux complémentaires).

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.7 TD1-Exercice7

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. On rappelle que $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$. Montrer que

$$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C.$$

2. On pose :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   Montrer que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD1-Exercice8

Démontrer par récurrence que

1. pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $2^n > n$,
2. pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p (entier que l'on déterminera), on a l'inégalité $2^n > n^2$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD1-Exercice9

1. Soit $P(x)$ une propriété des éléments de E. Déterminer la négation des propositions suivantes :
   (a) $\forall\, x \in E,\ P(x)$
   (b) $\exists\, x \in E,\ P(x)$
   (c) $\exists !\, x \in E,\ P(x)$
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer la négation des propositions suivantes :
   (a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 2$
   (b) $\forall\, x \geq 2,\ f(x) \geq 2$
   (c) $\forall\, x \leq 2,\ f(x) \leq 2$
   (d) $\exists\, !x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2$

   Quels sont les liens logiques entre ces propositions ?

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1
Question 1c Aide 1 Aide 2
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1 Aide 2
Question 2d Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD1-Exercice10

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x + y = 0$
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R};\ x + y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ xy = 1$
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R};\ xy = 1$
5. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R};\ x + y = x$

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1 Aide 2
Question 5 Aide 1

Exercice A.2.11 TD1-Exercice11

1. (a) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$. Laquelle des deux propositions

   i. $\forall x \in \mathbb{R},\ (P(x)$ **ou** $Q(x))$,

   ii. $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x))$ **ou** $(\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x))$

   entraîne l'autre ?

   (b) On note $P(x)$ la propriété *"x est positif ou nul"* et $Q(x)$ la propriété *"x est inférieur ou égal à 1999"*. Les propositions i. et ii. sont-elles vraies ou fausses ?

2. (a) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$. Laquelle des deux propositions

   i. $\exists x \in \mathbb{R},\ (P(x)$ **et** $Q(x))$,

   ii. $(\exists a \in \mathbb{R},\ P(a))$ **et** $(\exists b \in \mathbb{R},\ Q(b))$

   entraîne l'autre ?

   (b) Trouvez un exemple de propriétés $P(x)$ et $Q(x)$ montrant que les propositions i. et ii. ne sont pas équivalentes.

   (c) Les deux propositions suivantes

   i. $\exists x \in \mathbb{R},\ (P(x)$ **et** $Q(x))$,

   ii. $(\exists x \in \mathbb{R},\ P(x))$ **et** $(\exists x \in \mathbb{R},\ Q(x))$

   sont-elles équivalentes ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?
   (a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (P(x)$ **et** $Q(x))$,
   (b) $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x))$ **et** $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ Q(x))$
4. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (P(x)\ \textbf{ou}\ Q(x)) \Longrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x))\ \textbf{ou}\ (\exists\, x \in \mathbb{R},\ Q(x))$$

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 1b Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre I

Exemple B.1.1

Soient les deux propositions :
- P : n est un entier multiple de 3,
- Q : n est un entier pair,

La proposition **(**P **et** Q**)** est : n est un entier multiple de 6 (car 3 et 2 sont premiers entre eux).

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2

L'implication suivante est vraie :

$$(1 = 2) \Rightarrow \text{'Tous les nombres sont nuls'}.$$

En effet, si $1 = 2$, en retranchant 1 des deux membres de cette égalité on obtient $0 = 1$, puis en multipliant par un nombre x quelconque, on voit que $x = 0$.

Cet exemple montre qu'à partir d'une proposition fausse, on peut démontrer n'importe quoi.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3

‘Il existe des martiens riches et honnêtes’ implique ‘il existe des martiens riches et il existe des martiens honnêtes’. Par contre, ‘il existe des martiens riches et il existe des martiens honnêtes’ n’implique pas ‘Il existe des martiens riches et honnêtes’ (ce ne sont pas forcément les mêmes). Cet exemple montre que la réciproque de

$$(\exists x \in E,\ P(x) \textbf{ et } Q(x)) \Rightarrow (\exists a \in E,\ P(a)) \textbf{ et } (\exists b \in E,\ Q(b))$$

est fausse.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

C.1 Documents du chapitre I

Document C.1.1 Classes d'équivalence

Définition C.1.1. *Étant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on appelle* ***classe d'équivalence*** *de l'élément $a \in E$ la partie* $\hat{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{E}$ *définie par :*

$$\hat{a} = \{x \in E \mid x\mathcal{R}a\}.$$

Tous les éléments de $\hat{a}$ sont donc équivalents entre eux. On appelle ***ensemble quotient de E par*** $\boldsymbol{\mathcal{R}}$*, que l'on note* $\boldsymbol{E/\mathcal{R}}$*, l'ensemble constitué des classes d'équivalences des éléments de E.*

L'ensemble des classes d'équivalences constitue une **partition** de E, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles de E deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à E. En effet tout élément $a \in E$ appartient à la classe $\hat{a}$. Par ailleurs s'il existe $x \in \hat{a} \cap \hat{b}$ alors on a $x\mathcal{R}a$ et $x\mathcal{R}b$ et donc, d'après la transitivité, $a\mathcal{R}b$ ce qui implique $\hat{a} = \hat{b}$. Donc $\hat{a} \neq \hat{b} \Rightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$, ce qui correspond bien à une partition.

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathcal{R} = \{(p,q),(p',q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$, alors la classe d'équivalence de (p,q) avec $q \neq 0$ est l'ensemble des (p',q') , $q' \neq 0$, tels que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. On peut alors construire un ensemble, noté $\mathbb{Q}$, comme l'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation d'équivalence précédente. Un élément de $\mathbb{Q}$, qui est appelé nombre rationnel, est donc la classe d'équivalence d'un couple $(p,q), q \neq 0$ et on le note, par abus de langage, $\frac{p}{q}$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

R

S

Solution de l'exercice A.1.1

- **non** P : n est un entier pair,
- **non** P : $n \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier impair (ce peut être un entier pair ou un rationnel non entier ou un irrationnel).

Retour à l'exercice ▲

La proposition (P **ou** Q) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition (P **ou** Q) est fausse si n est un réel non entier.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

La proposition (P **ou** Q) est vraie, quel que soit x dans les deux premiers cas.Elle est fausse dans le troisième, pour $x = 0$ et vraie pour $x \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

D'après la définition, si (P **ou** Q) est vraie et si P est fausse alors Q est nécessairement vraie. En effet si Q était fausse, puisque P est fausse alors la proposition (P **ou** Q) serait fausse !

Pour la fonction f_1, la proposition P est fausse, donc la proposition Q est vraie.

Pour la fonction f_2, la proposition P est vraie, on ne peut donc pas conclure sur la proposition Q (et vous qu'en pensez-vous ?).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

$(P$ **ou** $Q)$**ou** R est vraie si et seulement si $(P$ **ou** $Q)$ est vraie ou R est vraie, c'est à dire si et seulement si P est vraie ou Q est vraie ou R est vraie. Le résultat est le même pour la deuxième proposition.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Le théorème de Pythagore est une condition nécessaire et suffisante (l'énoncer).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

La proposition (P **et** Q) est fausse, quel que soit l'entier naturel n.

Retour à l'exercice ▲

La proposition (P **et** Q) s'énonce $x = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

– **non** (P **et** Q) est vraie si et seulement si (P **et** Q) est fausse, c'est-à-dire si et seulement si l'une des deux propositions est fausse, soit (**non** P) **ou** (**non** Q) est vraie.
– Si l'on appelle R la proposition (**non** P) **et** S la proposition (**non** Q) on peut alors appliquer le résultat précédent, soit **non** (R **et** S) est équivalente à (**non** R) **ou** (**non** S), ou en prenant la négation (R **et** S) est équivalente à **non** ((**non** R) **ou** (**non** S)). Si l'on revient aux propositions P et Q, cela s'écrit (**non** P) **et** (**non** Q) est équivalente à **non** (P **ou** Q).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

(P **et** Q)**et** R est vraie si et seulement si (P **et** Q) est vraie et R est vraie, c'est à dire si et seulement si P est vraie et Q est vraie et R est vraie. Le résultat est le même pour la deuxième proposition.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

$P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(nonP)ouQ$, or si Q est vraie, alors $(nonP)ouQ$ est vraie.
Ainsi $-3 > 0 \Rightarrow 10 > 0$ est une implication vraie !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

P n'est pas une condition nécessaire de Q car Q n'implique pas P puisqu'une fonction peut être croissante sans être dérivable. Ceci signifie aussi que Q n'est pas une condition suffisante de P.

Par contre $P \Rightarrow Q$ ce qui veut dire que Q est une condition nécessaire de P ou que P est une condition suffisante de Q.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

De manière évidente (**non** $Q \Rightarrow$ **non** P) s'écrit (**non** (**non** Q) **ou** (**non** P)) ce qui est équivalente à ((**non** P) **ou** Q).

Retour à l'exercice ▲

– P est vraie implique (P **ou** Q) est vraie. Réciproquement si (P **ou** Q) est vraie, puisque Q est fausse, alors P est vraie. Par exemple

$$n \text{ est pair } \Leftrightarrow n \text{ est pair } \textbf{ou } (10 \text{ est impair}).$$

– En utilisant le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (**non** P) **ou** Q et le fait que **non** $P \Leftrightarrow$ (**non** P) **ou** (**non** R) puisque R est vraie, on a

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\textbf{ non } P) \textbf{ ou } Q) \Leftrightarrow (((\textbf{ non } P) \textbf{ ou } (\textbf{ non } R)) \textbf{ ou } Q)$$

et comme

$$((\textbf{ non } P) \textbf{ ou } (\textbf{non} R) \Leftrightarrow \textbf{ non } (P \textbf{ et } R)$$

on arrive à

$$\{\textbf{non } (P \textbf{ et } R)\} \textbf{ ou } Q, \quad \text{soit} \quad (P \textbf{ et } R) \Rightarrow Q.$$

Par exemple,

$$\text{le triangle } T \text{est isocèle} \Leftrightarrow T \text{ a deux côtés de même longueur}$$

est équivalente à

$$(\text{le triangle } T \text{est isocèle}) \textbf{ et } (\text{un triangle a trois côtés}) \Leftrightarrow T \text{ a deux côtés de même longueur}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

Supposons que n soit un entier pair, alors n admet 2 pour diviseur qui est aussi un diviseur de 6 et donc n n'est pas premier avec 6.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

Supposons que la proposition $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon)$ **et** $(a > b)$ est vraie. Posons $\varepsilon = a - b$, alors $a < b + (a - b)$, soit $a < a$, ce qui est absurde !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

$B \subset A$ **car si** $x \in B$**, alors** $x \geq 1$ **donc** $x > 0$ **soit** $x \in A$**.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

On a $E \subset \mathbb{R}$ car $x \in E \Rightarrow x \in \mathbb{R}$. D'autre part si $x \in \mathbb{R}$, alors on a $(x > 0)$ ou $(x \leq 0)$, d'où $\mathbb{R} \subset E$.

Retour à l'exercice ▲

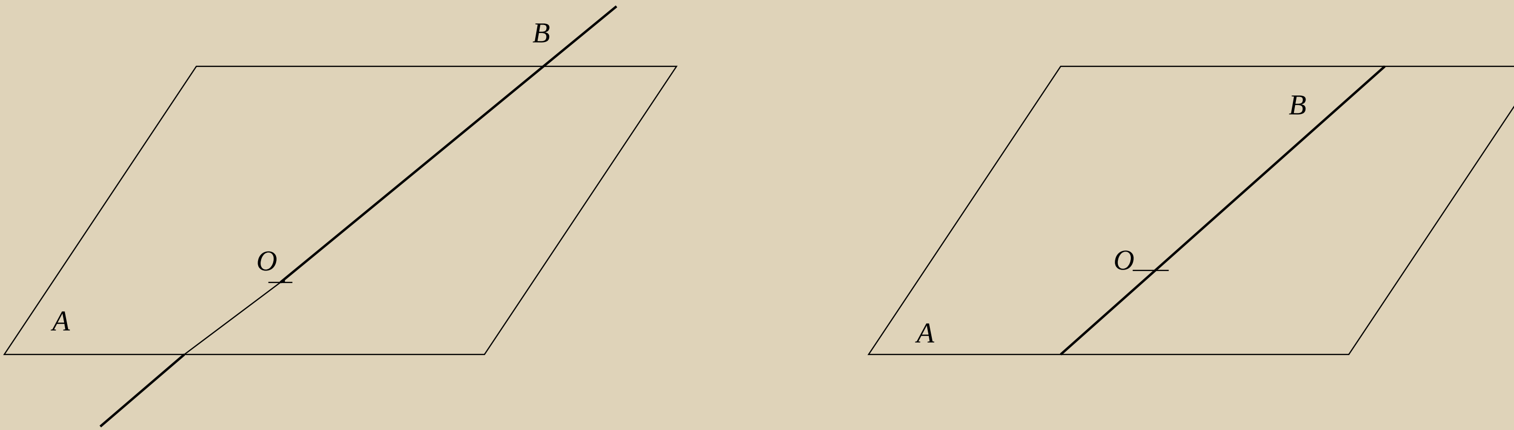

FIG. C.1.1 – plan et droite

$A \cap B = \{0\}$ si la droite n'est pas dans le plan et $A \cap B = B$ si la droite est dans le plan.

$A \cup B$ est l'ensemble des points qui sont soit dans le plan soit sur la droite si la droite n'est pas dans le plan, et $A \cup B = A$ si la droite est dans le plan.

Retour à l'exercice ▲

1. $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$ même si $A = \emptyset$ (remarquez que la proposition $x \in (\emptyset \cap B)$ est alors toujours fausse).
2. (a) On appelle P la proposition $A \cup B = \emptyset$, Q la proposition $(A = \emptyset$ et $B = \emptyset)$, on montre non $Q \Rightarrow$ non P. En effet si A est non vide ou B non vide, il existe un x appartenant à A ou il existe un x appartenant à B, donc il existe un x appartenant à $A \cup B$ donc $A \cup B \neq \emptyset$.

   On montre de même que non $P \Rightarrow$ non Q.

   (b) On raisonne par contraposée, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors il existe x appartenant à $A \cap B$, donc x appartient à A et x appartient à B, donc $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

   L'implication réciproque est fausse, choisir par exemple $E = \mathbb{R}, A = [0,1], B = [3,4]$.

   (c) Si $A = E$ alors $A \cup B = E$, donc $A = E$ ou $B = E$ implique $A \cup B = E$, l'implication réciproque est fausse, choisir $E = \mathbb{R}, A = [0, +\infty[, B =]-\infty, 2]$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

On raisonne par équivalence :

$$x \in A \cap (B \cap C) \ \Leftrightarrow \ x \in A \textbf{ et } x \in B \cap C \ \Leftrightarrow \ x \in A \textbf{ et } x \in B \textbf{ et } x \in C$$

d'où

$$x \in A \cap (B \cap C) \ \Leftrightarrow \ x \in (A \cap B) \textbf{ et } x \in C \ \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

Il en est de même pour l'union.

Pour la troisième :

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \textbf{ et } (x \in B \textbf{ ou } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in B) \textbf{ ou } (x \in A \ \textbf{ et } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Faire de même pour la quatrième.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

Toutes les égalités se démontrent par équivalence, par exemple :

$$x \in \complement(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; x \notin (A \cap B) \;\Leftrightarrow\; (x \notin A) \textbf{ ou } (x \notin B) \;\Leftrightarrow\; (x \in \complement A) \textbf{ ou } (x \in \complement B)$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

Les parties de E sont : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, **E.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

Pour n=1, la formule donne $a + b = a + b$!

Si on suppose que la formule est vraie pour $n - 1$, on démontre qu'elle est vraie pour n en écrivant

$$(a + b)^n = (a + b)^{n-1}(a + b)$$

On regroupe les termes de la forme $a^{n-k}b^k$ qui proviennent soit de

$$a \times C_{n-1}^{k} a^{n-1-k} b^k,$$

soit de

$$b \times C_{n-1}^{k-1} a^{n-1-(k-1)} b^{k-1}.$$

En utilisant la relation sur les C_n^p, on trouve le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

En effet le couple $(1, 1+i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ **mais il n'appartient pas à** $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ **puisque** $1+i$ **n'est pas un nombre réel.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

Le raisonnement par récurrence s'écrit :

- Montrer que $P(0)$ est vraie.
- Pour $n \geq 1$, supposer que $P(n-1)$ est vraie et montrer alors que $P(n)$ est vraie.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

1. Il ne faut pas partir de l'hypothèse directement, mais de ce que l'on demande de démontrer. Pour montrer que $A_P \subset A_Q$, on prend un élément quelconque de A_P et on démontre qu'il est dans A_Q. En effet, si $x \in A_P$, alors $P(x)$ est vraie et donc $Q(x)$ est vraie ($P \Rightarrow Q$) ce qui implique que $x \in A_Q$.

   Faire la réciproque de la même manière.
2. $x \in A_{P \text{ou } Q} \Leftrightarrow P(x)$ ou $Q(x)$ est vraie $\Leftrightarrow x \in A_P$ ou $x \in A_Q \leftrightarrow x \in A_P \cup A_Q$.
3. les autres égalités se montrent de manière similaire.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

Il y a de nombreuses manières de démontrer l'implication $\Rightarrow$. Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0 \ \Rightarrow\ c = 0 \text{ (obtenu pour } x = 0)$$

Si une fonction est identiquement nulle, alors sa dérivée est identiquement nulle, ... On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2ax + b = 0 \ \Rightarrow\ b = 0 \text{ (obtenu à nouveau pour } x = 0)$$

et enfin $2a = 0$.

La réciproque est évidente.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

La deuxième implique la première car soit tout élément de E vérifie la proposition P et donc (P ou Q), soit tout élément de E vérifie la proposition Q et donc (P ou Q).

Par contre si tout élément de E vérifie la proposition (P ou Q) cela n'entraîne pas que tous les éléments vérifient P ou que tous les éléments vérifient Q. Par exemple soit $E = \mathbb{R}$ et soit $P(x)$ la proposition $x \geq 0$ et $Q(x)$ la proposition $x < 0$, alors tout nombre réel est soit positif ou nul, soit négatif, mais cela ne veut pas dire que tous les réels sont positifs ou nuls ou que tous les réels sont négatifs.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.30

On prend $c = a + \frac{b-a}{2}$, il est facile alors de montrer que $a < c < b$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.31

Pour montrer l'implication $\Rightarrow$, on appelle c l'élément de E qui vérifie (P **ou** Q). Ceci signifie que c vérifie P ou c vérifie Q de sorte que la proposition de droite est vérifiée. La réciproque se fait aussi simplement.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.32

Soit c l'élément qui vérifie (P **et** Q), ceci signifie que c vérifie P et c vérifie Q de sorte que la proposition de droite est vérifiée. Par contre la réciproque n'est pas vraie car il n'y a aucune raison pour que "$a = b$" ! Par exemple si $E = \mathbb{R}$, P est la proposition $x > 0$ et Q est la proposition $x < 0$, alors il existe au moins un réel positif, il existe au moins un réel négatif, mais il n'y a aucun réel qui soit à la fois négatif et positif.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.33

En effet on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y = -x$ tel que $x + y = 0$. Par contre il n'existe pas de nombre réel tel que, si on lui rajoute n'importe quel réel, le résultat soit toujours 0.

Retour à l'exercice ▲

La définition signifie que quel que soit l'intervalle centré en l sur la droite réelle (aussi petit soit-il !), tous les éléments de la suite sont dans cet intervalle à partir d'un certain rang. C'est en réalité la définition de la limite d'une suite. La négation de cette proposition est

$$\exists \varepsilon, \forall N, \textbf{non } P(n, \varepsilon)$$

Et la proposition **non** $P(n, \varepsilon)$ s'écrit $\exists n \geq N$ et (on dit 'tel que') $|u_n - l| > \varepsilon$.

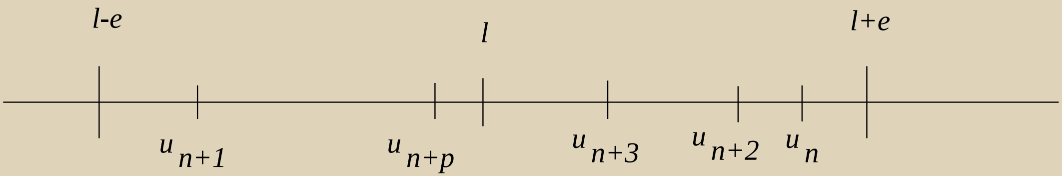

FIG. C.1.2 – convergence de la suite

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.35

Les propriétés de la relation d'équivalence sont trivialement vérifiées. Si tel n'est pas le cas, poser des questions !

Par exemple, la relation est réflexive car pq=pq ...

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.1

Utiliser les quantificateurs ou, si vous ne les avez pas encore vus, raisonnez en français.

Retour à l'exercice ▲

La négation de "une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble" est "il existe au moins un élément de l'ensemble qui ne la vérifie pas".

Retour à l'exercice ▲

La négation de (P et Q) est (non P ou non Q).

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.1

La solution est donc : Il existe au moins un élément a de $\mathbb{R}$ tel que $f(a) > 2$ ou $g(a) \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.1

Utiliser les quantificateurs ou, si vous ne les avez pas encore vus, raisonnez en français, sachant que "quelque soit" est équivalent à "pour tout".

Retour à l'exercice ▲

La négation de "une propriété est vraie pour tout élément d’un ensemble" est "il existe au moins un élément de l’ensemble qui ne la vérifie pas".

Retour à l’exercice ▲

La négation de (P ou Q) est (non P et non Q).

Retour à l'exercice ▲

La solution est donc : Il existe au moins un élément p de $\mathbb{Z}$ tel que $p > 0$ et $p \leq 0$. (Ce qui est évidemment faux, mais c'est la négation d'une proposition qui est toujours vraie !)

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les quantificateurs ou, si vous ne les avez pas encore vus, raisonnez en français.

Retour à l'exercice ▲

La négation de "une propriété est vraie pour au moins un élément d'un ensemble" est "la propriété est fausse pour tous les éléments de l'ensemble".

Retour à l'exercice ▲

La solution est donc : Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $e^x \leq 1$. (Cette proposition est-elle vraie ?)

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.1

Attention la négation de "il existe un unique élément vérifiant P" comporte deux cas possibles.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.1

La négation de "il existe un unique élément" est : "tout élément ne vérifie pas P" ou "il existe deux éléments distincts vérifiant P".

Retour à l'exercice ▲

La solution est donc : (Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $e^x \neq 1$) ou (il existe deux réels $x_1 \neq x_2$ tels que $e^{x_1} = e^{x_2} = 1$).
(Cette proposition est-elle vraie ?)

Retour à l'exercice ▲

Il s'agit d'une implication $P \Rightarrow Q$. Quelle est la négation d'une implication ?

Retour à l'exercice ▲

non $(P \Rightarrow Q)$ **est équivalente à** $(P$ **et** $($**non** $Q))$**.**

Retour à l'exercice ▲

La solution est donc : $x \geq 0$ et $\sqrt{x}$ n'existe pas.

Retour à l'exercice ▲

Il s'agit d'une implication $P \Rightarrow Q$. Quelle est la négation d'une implication ?

Retour à l'exercice ▲

non ($P \Rightarrow Q$) est équivalente à (P et (non Q)).

Retour à l'exercice ▲

La solution est donc : n est un entier positif et $n^3 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la négation de la proposition.

Retour à l'exercice ▲

La proposition

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \text{ et } (\forall x \in A,\ \text{ non } P(x))$$

est vraie pour quel ensemble ? Dans le cas général, elle est fausse, pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.2

La solution est : A est l'ensemble vide (revoir la définition de l'ensemble vide dans le paragraphe Sous-ensemble, ensemble vide). Effectivement dès qu'il y a un élément dans l'ensemble, celui-ci ne peut vérifier P et non P. Par contre, comme il n'y a pas délément dans l'ensemble vide, on peut dire que tous les éléments de l'ensemble vide vérifient n'importe quelle propriété.

Retour à l'exercice ▲

Revoir les négations des quantificateurs et de l'implication.

Retour à l'exercice ▲

La solution est : $\exists x \in E$ **,** $\exists y \in F$**,** **(**$x \neq y$**) et (**$f(x) = f(y)$**).**

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la contraposée de l'implication ?

Retour à l'exercice ▲

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$.

Retour à l'exercice ▲

La solution est : $\forall x \in E, \forall y \in E,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$.

Retour à l'exercice ▲

La solution est : $\exists x \in E$, $\exists y \in F$, **(**$f(x) = f(y)$**) et (**$x \neq y$**).**

Retour à l'exercice ▲

Quel lien y a-t-il entre une proposition et sa contraposée ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe : Raisonnement par contraposée

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit ((non P) ou Q).

Retour à l'exercice ▲

La proposition s'écrit donc : (non Q) ou ((non P) ou Q). Voir le paragraphe Disjonction de deux propositions pour les propriétés du "ou".

Retour à l'exercice ▲

Par commutativité et associativité du "ou", la proposition s'écrit aussi : ((non Q) ou Q) ou (non P). Elle est donc toujours vraie (pourquoi ?)

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (non P) ou Q.

Retour à l'exercice ▲

La proposition s'écrit donc : (non P) ou ((non P) ou Q). Voir le paragraphe Disjonction de deux propositionspour les propriétés du "ou".

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.4

Par commutativité et associativité du "ou", la proposition s'écrit aussi : ((non P) ou Q). À quoi cela vous fait-il penser ? Cette proposition est-elle toujours vraie ?

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (non P) ou Q.

Retour à l'exercice ▲

La proposition s'écrit donc : (non P) ou (P ou Q). Voir le paragraphe Disjonction de deux propositions pour les propriétés du "ou".

Retour à l'exercice ▲

Par associativité du "ou", la proposition s'écrit aussi : ((non P) ou P) ou (Q) . Elle est donc toujours vraie (pourquoi ?)

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (non P) ou Q.

Retour à l'exercice ▲

La proposition s'écrit donc : (non P) ou (P et Q). Cette proposition est-elle toujours vraie ?

Retour à l'exercice ▲

Il est clair que si P est vraie et Q est fausse, la proposition n'est pas vraie.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (non P) ou Q.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.4

La proposition s'écrit donc : (non Q) ou (P ou Q). Voir le paragraphe Disjonction de deux propositions pour les propriétés du "ou".

Retour à l'exercice ▲

Par commutativité et associativité du "ou", la proposition s'écrit aussi : ((non Q) ou Q) ou (P) . Elle est donc toujours vraie (pourquoi ?)

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (non P) ou Q.

Retour à l'exercice ▲

La proposition s'écrit donc : non(P et Q) ou Q. Récrire la négation et voir le paragraphe Disjonction de deux propositions pour les propriétés du "ou".

Retour à l'exercice ▲

La proposition s'écrit donc : ((non P) ou (non Q)) ou Q et par associativité du "ou" : (non P) ou ((non Q) ou Q). Elle est donc toujours vraie (pourquoi ?)

Retour à l'exercice ▲

La contraposée d'une implication est aussi une implication, mais attention à l'ordre des propositions. Voir le paragraphe : Raisonnement par contraposée.

Retour à l'exercice ▲

La contraposée s'écrit :

$$(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ est impair})$$

La démonstration est évidente si vous savez "écrire" un nombre inpair.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe : Raisonnement par l'absurde.

Retour à l'exercice ▲

On suppose que n^2 est pair et que n est impair et on arrive à une contradiction en évaluant $n^2 - n$ et en comparant la parité des deux membres de l'égalité.

Retour à l'exercice ▲

Raisonnez par double implication, c'est à dire montrer que

$$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$$

puis que

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer que

$$A \cap B = A \;\Rightarrow\; A \subset B$$

on suppose que $A \cap B = A$ et on montre que $A \subset B$, ce qui se démontre comment ?

Retour à l'exercice ▲

La définition de l'intersection implique que $A \cap B \subset B$. (Si vous n'en êtes pas convaincu, démontrez le.)

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.6

Pour montrer la deuxième implication, on suppose que $A \subset B$ et on démontre que $A \cap B = A$. Puisqu'il faut montrer une égalité d'ensembles, on procède par double inclusion.

Retour à l'exercice ▲

L'une des inclusions est toujours vraie (laquelle ?). L'autre découle directement de l'hypothèse.

Retour à l'exercice ▲

On peut aussi raisonner par double implication comme dans la question précédente ou on peut passer au complémentaire. Quel est le complémentaire de $A \cup B$? Voir le paragraphe : Ensembles -complémentaire.

Retour à l'exercice ▲

Le commencement du raisonnement est :

$$A \cup B = A \;\Leftrightarrow\; \complement(A \cup B) = \complement A.$$

Continuez ...

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.6

En utilisant la question précédente, on démontre que $\complement A \subset \complement B$, soit le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.7

Pour démontrer que

$$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C$$

on procède par équivalence.

$$x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) \;\Leftrightarrow\; (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et non}(x \in B \text{ et } x \in C)$$

Continuer l'équivalence et utiliser la distributivité du "et" par rapport au "ou".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.7

En continuant l'équivalence, on trouve

$$(x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin C).$$

La deuxième proposition du "ou" est toujours fausse (pourquoi ?). Il ne reste donc que la première qui vous permet de finir la démonstration.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.7

Remplacer $\triangle$ par sa définition et utiliser les propriétés de l'intersection et de la réunion. Voir le paragraphe : Ensembles -intersection et union.

Retour à l'exercice ▲

On obtient :

$$(A \triangle B) \cap C = ((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C)$$

Comparer alors avec le membre de droite de l'égalité à démontrer et utiliser la question précédentes.

Retour à l'exercice ▲

On rappelle que le raisonnement par récurrence consiste à démontrer que $P(n)$ est vraie pour $n_0$puis à démontrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$.

Retour à l'exercice ▲

Si on suppose $P(n)$ vraie, est-ce que $P(n+1)$ est vraie ?

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n \geq n+1 \text{ dès que } n \geq 1$$

On vérifie de plus que $P(0)$ est vraie. $P(1)$ est vraie.

Donc la récurrence permet de montrer de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Retour à l'exercice ▲

On rappelle que le raisonnement par récurrence consiste à démontrer que $P(n)$ est vraie pour le premier entier de l'ensemble considéré (ici $n = p$ et on cherche p) puis à démontrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq p$.

Retour à l'exercice ▲

$P(1)$ **n'est pas vraie.** $P(2)$ **? ... jusqu'à ce que P(p) soit vraie.**

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.8

$p = 5$ est le premier entier pour lequel $P(p)$ est vraie. Pour montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ on démontre que $P(n+1)$ est vraie en utilisant l'hypothèse $P(n)$, soit, par exemple,

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$$

et pour finir il reste à étudier le signe d'un trinôme.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.9

Attention la négation de $\forall\, x \in E, P(x)$ **est** $\exists x \in E,$ **non** $P(x)$ **et non pas** $\exists x \notin E,$ **non** $P(x)$**.**

Retour à l'exercice ▲

Solution : $\forall\, x \in E,\ \textbf{non}\ P(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.9

Attention la négation de "il existe un unique élément vérifiant P" comporte deux cas possibles.

Retour à l'exercice ▲

Solution : $\{\forall x \in E, \text{ non } P(x)\}$ **ou** $\{\exists x \in E, \exists y \in E, (x \neq y)$ **et** $P(x)$ **et** $P(y)\}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 2.$

Retour à l'exercice ▲

Attention, l'ensemble E est représenté par $\{x \in \mathbb{R},\ x \geq 2\}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution : $\exists\, x \geq 2,\ f(x) < 2.$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.9

Attention, l'ensemble E **est représenté par** $\{x \in \mathbb{R},\ x \leq 2\}$**.**

Retour à l'exercice ▲

Solution : $\exists\, x \leq 2,\ f(x) > 2.$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2d, Exercice A.2.9

Attention la négation de "il existe un unique élément vérifiant P" comporte deux cas possibles.

Retour à l'exercice ▲

Solution : $\{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 2\}$ **ou** $\{\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R},\ (x \neq y)$ **et** $f(x) = f(y) = 2\}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.9

Le seul lien logique est $(a) \Rightarrow (b)$.

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer l'existence d'un élément il suffit de l'exhiber.

Retour à l'exercice ▲

La proposition est vraie. En effet étant donné un réel x quelconque, il existe toujours un élément $y = -x$ tel que $x + y = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Attention à l'ordre des quantificateurs !

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.10

La proposition est fausse. En effet il ne peut pas exister de réel tel que en lui ajoutant n'importe quel réel on obtienne 0. Si vous avez du mal à comprendre cela, montrez que la négation de la proposition est toujours vraie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.10

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.10

La proposition est fausse. En effet, si vous prenez $x = 0$, il n'existe pas de réel y tel que $xy = 1$!

Retour à l'exercice ▲

Si cette proposition ne vous "inspire" pas, vous pouvez étudier sa négation

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.10

La proposition est fausse. En effet il ne peut pas exister de réel tel que en le multipliant par n'importe quel réel on obtienne 1. Par contre la négation de la proposition est toujours vraie puisque pour tout réel x il existe un réel y tel que $xy \neq 1$ (on peut prendre $y = \frac{2}{x}$ si x est non nul et $y = 1$ si $x = 0$).

Retour à l'exercice ▲

Cette proposition est évidemment vraie. Que vaut y ?

Retour à l'exercice ▲

Pour vous aider, vous pouvez imaginer que vous coloriez en rouge les réels qui vérifient P et en bleu ceux qui vérifient Q.

Retour à l'exercice ▲

Dans le cas de la première proposition, $\mathbb{R}$ est entièrement coloré en rouge et bleu (il n'y a plus de blanc). Dans le cas de la deuxième proposition, soit $\mathbb{R}$ est tout bleu, soit $\mathbb{R}$ est tout rouge.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1a, Exercice A.2.11

Vous auriez pu également traiter cette question en utilisant les ensembles A_P et A_Q.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1a, Exercice A.2.11

La proposition ii. implique la proposition i. car si ii. est vraie soit tous les réels vérifient P, soit tous les réels vérifient Q et donc on est sûr qu'un réel quelconque vérifie soit P soit Q.

Retour à l'exercice ▲

La réponse est évidente ! i. est vraie et ii. est fausse ! Conclusion : les deux propositions sont-elles équivalentes ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.11

C'est évidemment i.⇒ii. En effet si i. est vraie, alors il existe un réel x pour lequel $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies, et, en prenant $a = b = x$, ii. est vraie.

Retour à l'exercice ▲

Pensez aux réels négatifs et aux réels positifs, par exemple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.11

On peut prendre pour $P(x) : x > 0$ et pour $Q(x) : x < 0$. Dans ce cas, i. est fausse (montrez-le) et ii. est vraie (donnez des valeurs pour a et b).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.11

Que pensez-vous des deux propositions $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ P(x))$ **et** $(\exists\, a \in \mathbb{R},\ P(a))$ **?**

Retour à l'exercice ▲

Les deux propositions $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ P(x))$ et $(\exists\, a \in \mathbb{R},\ P(a))$ son évidemment équivalentes et l'on vient donc de démontrer que i. et ii. ne sont pas équivalentes.

Retour à l'exercice ▲

Cette proposition est démontrée dans le paragraphe Quantificateur universel.

Retour à l'exercice ▲

Le plus simple est de démontrer la contraposée.

Retour à l'exercice ▲

Si tous les éléments d'un ensemble vérifient une propriété et qu'un élément au moins vérifie une autre propriété alors il est clair qu'il existe au moins un élément qui vérifie les deux propriétés.

Retour à l'exercice ▲