MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 6 : Formules de Taylor et développements limités

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Janvier 2010

Chapitre VI

Formules de Taylor et développements limités

VI.1 Les Formules de Taylor

Dans le cas d'un polynôme de degré n, la connaissance de la valeur de P et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n en un point a, permet de déterminer P en tout point $x(= a + h) \in \mathbb{R}$. Cette propriété n'est plus vérifiée pour une fonction quelconque. La connaissance de la valeur de f et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n en un point a permet seulement de connaître une *approximation de la valeur de* $f(a+h)$*, à l'ordre* n *en* a (on verra une définition précise de cette expression plus loin), en la confondant avec la valeur en h d'un polynôme P_n, appelé "partie régulière" de sa formule de Taylor.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.1.1 La formule de Taylor pour les polynômes

Exercices :
Exercice A.1.1

Proposition VI.1.1. *Soit $P(x)$ une fonction polynôme de degré n, alors on a la formule*

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad \text{(VI.1.1)}$$

où $P'(.)$, $P''(.)$, ..., $P^{(n)}(.)$ dénotent les fonctions dérivées successives de la fonction polynôme P.

Démonstration - La relation (VI.1.1) est vérifiée si $\deg P = 0$ puisque, dans ce cas $P(x) = a_0 = P(0)$. Supposons la vérifiée pour $\deg P \leq n$. Soit P de degré $n+1$, on a

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + Q(x)$$

où $Q(x)$ est de degré au plus n. Nous avons alors la relation (voir exercice)

$$\frac{d^k}{dx^k}\, x^{n+1} = (n+1)n(n-1)\cdots(n+2-k)x^{n+1-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1$$

ce qui implique

$$P^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0), \quad \forall k = 0,\, 1, \ldots,\, n \text{ et } P^{(n+1)}(0) = a_{n+1}(n+1)!.$$

Alors, en utilisant aussi l'hypothèse de récurrence sur Q, nous arrivons à

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n + a_{n+1}x^{n+1}.$$

soit

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{P^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

VI.1.2 Le développement de Taylor avec reste de Lagrange

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Documents :
C6-D-1

Théorème VI.1.1 (Formule de Taylor-Lagrange). *Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Alors quel que soit h, tel que $a+h \in I$, il existe un $\theta \in]0,1[$, tel que :*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h). \quad \text{(VI.1.2)}$$

Remarquons que θ dépend de h. Avant de démontrer ce résultat, donnons la définition :

Définition VI.1.1. *L'expression (VI.1.2) s'appelle le* ***développement de Taylor de f, à l'ordre*** n*, au point* $x = a$ *avec* **reste de Lagrange**. *Le polynôme en* h

$$P_n(h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

s'appelle la ***partie régulière*** *de ce développement et la différence*

$$f(a+h) - P_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

*s'appelle le **reste de Lagrange de la formule de Taylor**.*

Démonstration du théorème - On remarque que si $h = 0$, la formule est évidemment vérifiée, on suppose maintenant $h \neq 0$. Soient donc a et h fixés (avec $a \in I$ et $a + h \in I$). Définissons tout d'abord le nombre C par l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + C \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

Nous allons démontrer que C peut s'écrire :

$$C = f^{(n+1)}(a + \theta h) \ \text{ avec } \ \theta \in]0, 1[.$$

Introduisons la fonction φ suivante

$$\varphi(x) = f(a+x) - f(a) - \frac{x}{1!} f'(a) - \frac{x^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) - C \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notons que φ est une fonction qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ sur I, puisque f est $(n+1)$ fois dérivable et que les autres termes sont des monômes en la variable x. D'autre part $\varphi(h) = 0$ et,

$$\forall k = 0, 1, \ldots, n \quad \varphi^{(k)}(0) = 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle $n+1$ fois (voir le document référencé) et donne ainsi l'existence de c compris entre 0 et h tel que

$$\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(a+c) - C = 0,$$

ce qui montre que

$$C = f^{(n+1)}(a+c) \quad \text{avec} \quad c \text{ compris entre } 0 \text{ et } h.$$

ce qui s'écrit aussi :

$$C = f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{avec} \quad \theta \in]0,1[.$$

Proposition VI.1.2 (Formule de Mac-Laurin). *Sous les hypothèses du théorème précédent et si $0 \in I$, alors pour tout $x \in I$ on a*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad \text{(VI.1.3)}$$

avec $\theta \in]0,1[$ (θ dépend de x).

VI.1.3 Les développements de Mac-Laurin de l'exponentielle et du logarithme

Exercices :
Exercice A.1.5

Exemples :
Exemple B.1.1

La fonction e^x admet, quel que soit n, une dérivée d'ordre n toujours égale à e^x. On obtient donc immédiatement son développement de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[,\ e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

La fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$ est dérivable et les dérivées s'écrivent :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \ldots \end{aligned}$$

soit

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

d'où, pour $x = 0$,

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ceci nous conduit au développement de Taylor-Lagrange suivant pour $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,+\infty[, \exists \theta \in]0,1[,\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.1.4 Les développements de Mac-Laurin des fonctions trigonométriques

Exercices :
Exercice A.1.6

Exemples :
Exemple B.1.2

Les dérivées de $\cos x$ s'écrivent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(2p)}(x) = (-1)^p \cos x, \qquad f^{(2p+1)}(x) = (-1)^{p+1} \sin x,$$

de sorte que

$$f^{(2p)}(0) = (-1)^p, \qquad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

Comme nous pouvons développer à un ordre pair ou impair, nous allons obtenir deux expressions de ce développement. Développons tout d'abord à un ordre pair $n = 2p$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[,\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin(\theta x), \tag{VI.1.4}$$

Développons maintenant $\cos x$ à un ordre impair $n = 2p+1$. Comme la dernière contribution non nulle à la partie régulière du développement est obtenue pour l'ordre $2p$, nous obtenons cette fois-ci :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[,\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \cos(\theta x), \tag{VI.1.5}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On notera que les parties régulières des formules (VI.1.4) et (VI.1.5) sont identiques. La façon d'écrire le reste dépend de l'ordre.

Les dérivées de $\sin x$ s'écrivent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin x, \qquad f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos x,$$

de sorte que

$$f^{(2p)}(0) = 0, \qquad f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p.$$

Nous pouvons développer $\sin x$, tout comme $\cos x$ précédemment, à un ordre pair ou impair et obtenir ainsi deux expressions de ce développement.

Développons tout d'abord $\sin x$ jusqu'a un ordre impair $n = 2p - 1$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \sin(\theta x).$$

Développons maintenant $\sin x$ jusqu'a un ordre pair $n = 2p$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \cos(\theta x).$$

VI.1.5 Le développement de Mac-Laurin de la fonction puissance

Exercices :
Exercice A.1.7

Soit la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$.
Commençons par $\alpha = m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(0) &= m(m-1)\cdots(m-p+1), \quad 0 \leq p \leq m, \\ f^{(p)}(0) &= 0, \quad m+1 \leq p. \end{aligned}$$

Ceci nous conduit aux développements suivants pour $(1+x)^m$:
- Si $0 \leq p \leq m-1$

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}x^p \\ &+ \frac{m(m-1)\cdots(m-p)}{(p+1)!}x^{p+1}(1+\theta x)^{m-p-1}. \end{aligned}$$

- Si $m \leq p$, il vient (et on reconnaît la formule du binôme de Newton)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \cdots + x^m.$$

Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(1+x)^\alpha$ est définie (pour $x > -1$) par :

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On voit ainsi (le calculer) que les dérivées s'écrivent :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ f^{(p)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

d'où, pour $x = 0$,

$$f^{(p)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1).$$

Ceci nous conduit au développement suivant pour $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p)}{(p+1)!}x^{p+1}(1+\theta x)^{\alpha-p-1}. \end{aligned}$$

VI.1.6 Le développement de Taylor avec reste de Young

Exercices :
Exercice A.1.8

Exemples :
Exemple B.1.3

Théorème VI.1.2 (Développement de Taylor-Young). *Soient f une fonction n fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$. Alors, il existe une fonction ε telle que*

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

et on peut écrire le développement de Taylor de f à l'ordre n sous la forme :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots \quad \text{(VI.1.6)}$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h) \quad \text{(VI.1.7)}$$

Démonstration - D'après les hypothèses faites on peut écrire le développement de Taylor avec reste de Lagrange de f au point a à l'ordre $n-1$:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

avec $\theta \in]0,1[$. On pose

$$\varepsilon(h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

θ (qui dépend de h) est borné, donc $lim_{h\to 0}(a+\theta h) = a$, d'autre part $f^{(n)}$ est continue, donc $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f^{(n)}(a+\theta h) = f^{(n)}(a) + n!\varepsilon(h).$$

Le développement de Taylor-Young est surtout utilisé lorsque l'on veut étudier le comportement de f au voisinage du point a. La formule (VI.1.7) n'a d'intérêt que pour h petit, sinon comme elle ne donne aucune information sur la fonction $\varepsilon(.)$, elle n'a pas grande utilité. C'est donc une représentation *locale* de f, par opposition au développement de Taylor-Lagrange ou Mac-Laurin qui eux donnent une représentation globale de f.

VI.2 Les développements limités

VI.2.1 Définition des infiniment petits et infiniment grands

Exercices :
Exercice A.1.9

Définition VI.2.1. *On dit que la fonction f (ou, que $f(x)$) est un* ***infiniment petit au voisinage de** a si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

De même on dit que $f(x)$ est un ***infiniment grand au voisinage de** a si*

$$|f(x)| \to +\infty \quad \textit{quand} \quad x \to a.$$

La définition s'étend de façon naturelle au cas où $a = \pm\infty$.

Si la fonction f est un infiniment grand au voisinage de a, alors la fonction $1/f$ est un infiniment petit au voisinage de a et inversement. On peut donc systématiquement ramener l'étude des infiniment grands à celle des infiniment petits, c'est ce que nous ferons dans la suite.

Définition VI.2.2. *On dit que les deux infiniment petits, au voisinage de a, $f(x)$ et $g(x)$* ***sont du même ordre** s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad \textit{avec} \quad l \neq 0.$$

Par exemple, au voisinage de 0 les infiniment petits $\sin x$ et x sont du même ordre puisque nous avons montré au chapitre précédent que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

De même les infiniment petits $1 - \cos x$ et x^2 sont du même ordre puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.2 Fonctions équivalentes

Définition VI.2.3. *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, sauf éventuellement en a. On dit que f et g sont **équivalentes** au voisinage de a et on écrit $\boldsymbol{f \sim g}$, si g est non nulle au voisinage de a (sauf éventuellement en a) et si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \qquad \text{(VI.2.1)}$$

– **Attention** : le fait que $f(a) = g(a)$ n'implique pas (VI.2.1) ; un contre-exemple trivial est donné par :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x,$$

alors $f(0) = g(0)$ et pourtant

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

– D'après cette définition, *aucune* fonction n'est équivalente à la fonction nulle.

– L'exemple ci-dessus montre aussi que la relation (VI.2.1) *n'est pas* équivalente à

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Définition VI.2.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[\omega_0, +\infty[$. On dit que f et g sont **équivalentes** quand $x \to +\infty$* (équivalentes au voisinage de l'infini*) et on écrit $\boldsymbol{f \sim g}$, si*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cette définition VI.2.4 n'implique pas que les limites de $f(x)$ et $g(x)$ soient définies : donnons un contre exemple

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x$$

alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \to 1 \quad \text{quand} \quad x \to +\infty$$

et pourtant ni f ni g n'a de limite quand $x \to +\infty$. Même remarque concernant la définition précédente.

VI.2.3 Ordre d'un infiniment petit

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Définition VI.2.5. *Soit $f(x)$ un infiniment petit au voisinage de a, on dit que f est **d'ordre p** , si les infiniment petits $f(x)$ et $(x-a)^p$ sont du même ordre. Dans ce cas si on pose $h = x - a$, on peut écrire*

$$f(a+h) = \alpha h^p + h^p \varepsilon(h), \quad \textit{avec} \quad \alpha \neq 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

*et $\alpha(x-a)^p$ est appelée **partie principale** de l'infiniment petit $f(x)$ au voisinage de a.*

Il est clair que $1 - \cos x$ est un infiniment petit d'ordre 2 au voisinage de 0 puisque $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Lorsque $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de a, on pose

$$g(h) = f(a+h).$$

Alors $g(h)$ est un infiniment petit au voisinage de 0. L'ordre de $f(x)$ est alors, par définition, l'ordre de g.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition VI.2.1. *Les opérations sur les infiniment petits : addition, multiplication par un réel, multiplication, quotient , conduisent aux résultats suivants (en supposant que les ordres écrits soient bien définis). On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ sont des infiniment petits au voisinage de 0, on note Ordre ($f(x)$), Ordre ($g(x)$), leurs ordres respectifs :*

- *i/ Ordre* $(f(x)+g(x)) \geq \min($*Ordre* $(f(x))$, *Ordre* $(g(x))$,
- *ii/ Pour tout $\lambda \neq 0$, Ordre* $(\lambda f(x))$ =*Ordre* $(f(x))$,
- *iii/ Ordre* $(f(x)g(x))$ =*Ordre* $(f(x))$+ *Ordre* $(g(x))$,
- *iv/ Si f est d'ordre strictement supérieur à g,*

$$\textbf{\textit{Ordre}}\,(f(x)/g(x)) = \textbf{\textit{Ordre}}\,(f(x)) - \textbf{\textit{Ordre}}\,(g(x)).$$

Démonstration - La démonstration est immédiate à partir des résultats sur les limites. À titre d'exercice montrons la première propriété. Supposons qu'au voisinage de 0

$$\text{Ordre}\,(f(x)) = m, \quad \text{Ordre}\,(g(x)) = n,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \beta x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

1. Si $m \neq n$, sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $m < n$. Il vient alors :

   $$(f+g)(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon(x),$$

   avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + x^{n-m}(\beta + \varepsilon_2(x))$.

   De façon plus précise, on vient de montrer que si $f(x)$ et $g(x)$ sont d'ordres différents alors on a

   $$\text{Ordre}\,(f(x)+g(x)) = \min(\text{Ordre}\,(f(x)), \text{Ordre}\,(g(x)).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. Par contre, si $m = n$, on a

$$(f+g)(x) = (\alpha+\beta)x^m + x^m(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)).$$

Deux cas se présentent :

(a) Si $(\alpha+\beta) \neq 0$, $(f+g)(x)$ est d'ordre m.

(b) Si $(\alpha+\beta) = 0$, il faut étudier l'ordre de $\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)$, si cet ordre existe et vaut p, alors $(f+g)(x)$ est d'ordre $m+p > m$

Une remarque concernant iv/, si f est d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de g, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas un infiniment petit.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.4 Définition des développements limités

Exercices :
Exercice A.1.14

Définition VI.2.6. *On dit que la fonction f admet un* ***développement limité à l'ordre n*** *($n \in \mathbb{N}$)* ***au voisinage de a*** *(ou plus simplement en a), si f est définie dans un voisinage de a et si l'on peut écrire dans ce voisinage*

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h), \tag{VI.2.2}$$

où, $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. L'expression polynomiale

$$P(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n$$

est appelée ***partie régulière*** *du développement limité et $h^n \varepsilon(h)$ est le terme* ***complémentaire****.*

Le terme $h^n \varepsilon(h)$ s'écrit aussi $o(h^n)$ ou $h^n o(1)$. En effet la fonction $o(h^k)$ est définie par

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h^k)}{h^k} = 0.$$

Ainsi $o(1)$ est telle que $\lim\limits_{h \to 0} o(1) = 0$ ce qui veut dire que $o(1) = \epsilon(h)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La forme de (VI.2.2) suggère que la formule de Taylor-Young est particulièrement bien adaptée pour trouver le développement limité. Par exemple, on obtient aisément le développement limité de :

$$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}h^p + h^p\varepsilon(h).$$

Définition VI.2.7. *On dit que la fonction f admet un* ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** $+\infty$*, si l'on peut écrire pour x suffisamment grand :*

$$f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

VI.2.5 Remarques sur les développements limités

Exercices :
Exercice A.1.15

– Attention, dans la définition du développement limité, il n'est pas dit que $\alpha_n \neq 0$. Autrement dit, la partie régulière d'un développement limité à l'ordre n est un polynôme en h, de degré *inférieur ou égal* (mais non nécessairement égal) à n (voir exercice) .
– Il est clair que si f a une limite quand $x \to a$, elle admet un développement limité au moins à l'ordre 0 en a. Inversement, si f admet un développement limité en a, cela implique que la fonction $f(x)$ a une limite $(= \alpha_0)$ quand $x \to a$. Le développement limité donne, en particulier, l'ordre de l'infiniment petit $f(x)-f(a)$ au voisinage de a si le polynôme $Q(h) = P(h) - \alpha_0$ n'est pas nul. En effet on peut écrire

$$f(a+h) - \alpha_0 = \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

et donc Ordre $(f(a+h)-\alpha_0)$ est donné par la *valuation* du polynôme Q, c'est-à-dire le plus petit indice j des coefficients α_j non nuls dans Q.
– Une fonction n'admet pas nécessairement un développement limité à un même ordre en tout point. Par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ admet un développement limité à n'importe quel ordre en tout point $a > 0$, mais en 0 elle n'admet qu'un développement à l'ordre 0. En effet si un développement de f à un ordre $n \geq 1$

existait en 0 on aurait pour $x > 0$:

$$\sqrt{x} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

(comme $f(0) = 0$ on a nécessairement $\alpha_0 = 0$) et en divisant les deux membres par $\sqrt{x}$, il viendrait :

$$1 = \alpha_1 \sqrt{x} + \alpha_2 x^{3/2} + \cdots + \alpha_n x^{n-1/2} + x^{n-1/2} \varepsilon(x),$$

ce qui est impossible (il suffit de prendre la limite quand $x \to 0$).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.6 Unicité du développement limité

Exercices :
Exercice A.1.16

Documents :
Document C.1.2

Proposition VI.2.2. *Le développement limité à un ordre n donné, s'il existe, est unique.*

Démonstration - Supposons que f admette un autre développement

$$f(a+h) = \beta_0 + \beta_1 h + \cdots + \beta_n h^n + h^n \tilde{\varepsilon}(h),$$

alors par différence nous aurions

$$0 = \alpha_0 - \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1)h + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)h^n + h^n(\varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h)). \tag{VI.2.3}$$

En prenant la limite de (VI.2.3) quand $h \to 0$, nous trouvons

$$0 = \alpha_0 - \beta_0$$

et donc (VI.2.3) peut se récrire, en divisant par h ($\neq 0$),

$$0 = \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_2 - \beta_2)h + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)h^{n-1} + h^{n-1}(\varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h)). \tag{VI.2.4}$$

Mais en prenant à nouveau la limite de (VI.2.4) quand $h \to 0$ nous trouvons $\alpha_1 = \beta_1$. Ainsi de proche en proche nos aboutissons à

$$0 = \alpha_n - \beta_n + \varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h),$$

ce qui, en prenant la limite quand $h \to 0$, donne $\alpha_n = \beta_n$, d'où finalement

$$0 = \varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h),$$

ce qui montre bien que $\varepsilon(h) = \tilde{\varepsilon}(h)$.

Proposition VI.2.3. *La partie régulière du développement limité, au voisinage de 0, d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes pairs (resp. impairs).*

La démonstration est donnée dans le document référencé. Mais attention, ceci ne prouve pas que pour une fonction paire un développement limité à l'ordre $2n$ s'étend toujours à l'ordre $(2n+1)$ avec un dernier coefficient nul. La fonction

$$f(x) = x^2\sqrt{|x|}$$

par exemple est paire, admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (avec partie régulière nulle) mais n'admet pas en 0 de développement limité à l'ordre 3.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.7 Opérations sur les développements limités

Exercices :
Exercice A.1.17

Théorème VI.2.1. *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n au point a :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= P(h) + h^n \varepsilon_1(h), \\ g(a+h) &= Q(h) + h^n \varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

où P et Q sont deux polynômes, de degrés au plus n, qui représentent les parties régulières de f et g. Alors :

- *La fonction $f+g$ admet en a un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $P+Q$.*
- *Le produit λf (λ réel) admet en a un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est λP.*
- *Le produit $f.g$ admet en a un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en tronquant à l'ordre n le produit PQ.*

Démonstration - La démonstration des deux premiers points est évidente. Pour le produit on écrit

$$f(a+h)g(a+h) = P(h)Q(h) + h^n \left(P(h)\varepsilon_2(h) + Q(h)\varepsilon_1(h) + h^n \varepsilon_2(h)\varepsilon_1(h)\right). \qquad \text{(VI.2.5)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Or on peut écrire

$$P(x)Q(x) = \Pi(x) + x^{n+1}R(x)$$

où $\Pi(x)$ est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré $\leq n$ du produit PQ. Dans ces conditions, en posant

$$\varepsilon(h) \stackrel{\text{déf}}{=} hR(h) + P(h)\varepsilon_2(h) + Q(h)\varepsilon_1(h) + h^n\varepsilon_2(h)\varepsilon_1(h)$$

nos pouvons récrire (VI.2.5) sous la forme

$$f(a+h)g(a+h) = \Pi(h) + h^n\varepsilon(h),$$

ce qui constitue le développement limité du produit fg.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.8 Quotient de développements limités

Exercices :
Exercice A.1.18

Exemples :
Exemple B.1.4

Dans ce paragraphe, nous avons besoin de préciser la notion de la division suivant les **puissances croissantes** des polynômes. Regarder l'exemple référencé pour comprendre la façon pratique de mener les calculs.

Proposition VI.2.4. *Soient A et B deux polynômes, on suppose que le terme constant de B n'est pas nul. Alors quel que soit l'entier $k \geq 0$, il existe un couple unique de polynômes (Q, R) tel que*

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{k+1}R(x), \quad \textit{avec} \begin{cases} \textit{ou } Q = 0 \\ \textit{ou deg } Q \leq k \end{cases}$$

*Les polynômes Q et R s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division de A par B suivant les **puissances croissantes à l'ordre k**.*

La démonstration, qui n'est pas donnée, repose sur la même démarche que la division euclidienne. La principale différence consiste à ranger les termes des polynômes par ordre croissant de leurs degrés. Nous pouvons remarquer sur l'exemple référencé que le degré le plus bas des restes intermédiaires R_i augmente avec i. On arrête la division quand ce reste admet comme terme de plus bas degré un monôme de degré $\geq k+1$. On pose alors $R_i(x) = x^{k+1}R(x)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème VI.2.2. *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n au point a. On suppose en plus que $g(a) \neq 0$. Alors, le quotient f/g admet en a un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue comme quotient de la division suivant les* ***puissances croissantes***, *à l'ordre n, de P par Q.*

Démonstration - Écrivons les développements limités de f et g sous la forme

$$f(a+h) = A(h) + h^n \varepsilon_1(h), \qquad g(a+h) = B(h) + h^n \varepsilon_2(h),$$

comme $B(0)$ est non nul, nous pouvons effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n :

$$A(h) = B(h)Q(h) + h^{n+1}R(h) \quad \text{avec} \quad \deg Q \leq n.$$

Nous pouvons donc écrire

$$f(a+h) = B(h)Q(h) + h^{n+1}R(h) + h^n \varepsilon_1(h)$$

d'où

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \left(g(a+h) - h^n \varepsilon_2(h)\right) Q(h) + h^n \left(hR(h) + \varepsilon_1(h)\right) \\ &= g(a+h)Q(h) + h^n \left(hR(h) + \varepsilon_1(h) - Q(h)\varepsilon_2(h)\right) \end{aligned}$$

ce qui se met sous la forme

$$f(a+h) = g(a+h)Q(h) + h^n \varepsilon_3(h) \qquad \text{(VI.2.6)}$$

Par ailleurs, comme nous avons supposé que $g(a) \neq 0$, cela implique que

$$\varepsilon(h) \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_3(h)/g(a+h) \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0,$$

ce qui permet, en divisant les deux membres de (VI.2.6) par $g(a+h)$ d'obtenir

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = Q(h) + h^n \varepsilon(h)$$

ce qui montre le résultat.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.9 Composition des développements limités

Exercices :
Exercice A.1.19

Exemples :
Exemple B.1.5

Théorème VI.2.3. *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités, notés*

$$f(a+h) = \alpha_0 + R(h) + h^n \varepsilon_1(h),$$

où R est un polynôme de degré $\leq n$ et de valuation ≥ 1,

$$g(\alpha_0 + \delta) = Q(\delta) + \delta^n \varepsilon_2(\delta),$$

où Q est un polynôme de degré $\leq n$. Alors la fonction $\varphi = (g \circ f)$ admet au voisinage de a un développement limité, à l'ordre n, de la forme

$$\varphi(a+h) = S(h) + h^n \varepsilon(h),$$

où le polynôme S est obtenu en ne gardant que les n+1 termes de degré $\leq n$ du polynôme $Q \circ R$.

Démonstration - On a

$$\varphi(a+h) = g(f(a+h)) = g(\alpha_0 + R(h) + h^n \varepsilon_1(h)) = Q(\lambda(h)) + \lambda^n(h)\varepsilon_2(\lambda(h)),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où l'on a posé

$$\lambda(h) = R(h) + h^n \varepsilon_1(h),$$

(on a , en particulier, $\lambda(h) \to 0$ quand $h \to 0$, puisque la valuation de R est ≥ 1). Il est clair que l'on peut écrire (utilisant par exemple la formule des accroissements finis)

$$Q(\lambda(h)) = Q(R(h) + h^n \varepsilon_1(h)) = Q(R(h)) + h^n \varepsilon_3(h) = S(h) + h^n \varepsilon_4(h)$$

où S est le polynôme $Q(R)$ tronqué à l'ordre n et que l'on a également

$$\lambda^n(h) = (R(h) + h^n \varepsilon_1(h))^n = h^n \varepsilon_5(h),$$

(on utilise encore le fait que la valuation de R est ≥ 1). En regroupant ce qui précède on obtient

$$\varphi(a+h) = S(h) + h^n \varepsilon_4(h) + h^n \varepsilon_5(h) \varepsilon_2(\lambda(h)) = S(h) + h^n \varepsilon(h).$$

VI.2.10 Intégration des développements limités

Exercices :
Exercice A.1.20

Théorème VI.2.4. *Soit f une fonction continue au voisinage de a, admettant un développement limité à l'ordre n :*

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h),$$

alors toute primitive F de f admet le développement limité à l'ordre $n+1$:

$$F(a+h) = F(a) + \alpha_0 h + \alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + h^{n+1}\tilde{\varepsilon}(h).$$

Démonstration - La fonction

$$f(a+h) - (\alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n)\ (= h^n \varepsilon(h))$$

admet comme primitive s'annulant en zéro

$$F(a+h) - \left(\alpha_0 h + \alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1}\right) - F(a)$$

La formule des accroissements finis permet alors d'écrire :

$$F(a+h) - \left(\alpha_0 h + \alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1}\right) - F(a) = h\left((\theta h)^n \varepsilon(\theta h)\right),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

avec $\theta \in]0,1[$. Comme $(h \to 0) \Rightarrow (\theta h \to 0)$, nous avons bien le résultat annoncé :

$$F(a+h) - F(a) - \left(\alpha_0 h + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1}\right) = h^{n+1}\tilde{\varepsilon}(h).$$

avec $\tilde{\varepsilon}(h) = \theta^n \varepsilon(\theta h)$.

Attention, il n'y a pas de résultat analogue sur la dérivation. Plus précisément, une fonction f peut être dérivable au voisinage de zéro et admettre un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de zéro, sans que f' admette de développement limité en zéro. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2\cos(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = x + x\varepsilon(x), \quad \textbf{avec} \quad \varepsilon(x) = x\cos(\frac{1}{x}).$$

Par contre, f' n'est pas continue en 0 et n'admet pas de développement limité d'ordre 0.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.3 Applications des développements limités

VI.3.1 Calcul de limites par développements limités

Exemples :
Exemple B.1.6

Nous avons vu aux chapitres 3 et 4 des **formes indéterminées** $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$. Une autre forme indéterminée est 1^∞ (prenant son logarithme, on retrouve la forme $0 \times \infty$). Pour lever l'indétermination de la forme $\infty - \infty$, on met en facteur l'un des deux termes, généralement "le plus grand", et on ramène au cas $\frac{\infty}{\infty}$, qui n'est autre que $\dfrac{0}{0}$ écrit d'une autre façon, puis éventuellement au cas $0 \times \infty$, qui se ramène encore au cas $\dfrac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination de cette dernière forme, un moyen efficace consiste à mettre en évidence les parties principales des infiniment petits au numérateur et dénominateur. Ceci s'obtient bien souvent en utilisant les développements limités. Voici deux exemples simples dont l'un est traité ici et l'autre dans l'exemple référencé.

Soit à déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{Arc}\tan x}{x^2 \sin x},$$

qui est une forme indéterminée de la forme $0/0$. Calculant le développement limité de la fonction $\operatorname{Arc}\tan$ à l'ordre 3, nous obtenons pour le numérateur

$$x - \operatorname{Arc}\tan x = \frac{x^3}{3}(1 + \varepsilon_1(x)),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

tandis que le dénominateur s'écrit, à partir du développement de $\sin x$:

$$x^2 \sin x = x^3(1 + \varepsilon_2(x)).$$

D'où le résultat, en simplifiant par x^3 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{Arc}\tan x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{3}.$$

VI.3.2 Etude locale d'une courbe

L'équation de la tangente en x_0 à la courbe (C), d'équation $y = f(x)$, est donnée par

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pour situer la courbe par rapport à cette tangente, nous devons donc estimer la différence

$$D = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right),$$

pour les x proches de x_0. Or, la formule de Taylor-Young donne :

$$D = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + (x - x_0)^2 \varepsilon(x - x_0) = (x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x - x_0) \right).$$

Distinguons plusieurs cas :

- a/ $f''(x_0) > 0$. Pour x suffisamment proche de x_0, D est strictement positif : la courbe est située au dessus de la tangente (elle est convexe dans un voisinage de x_0).
- b/ $f''(x_0) < 0$. La courbe est au-dessous de sa tangente.
- c/ $f''(x_0) = 0$. Supposons $f'''(x_0) \neq 0$, on écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, et l'on voit sans difficulté que D change de signe quand x approche x_0 d'abord par valeurs plus petites puis par valeurs plus grandes que x_0. La courbe traverse sa tangente au point x_0. On a un point d'inflexion.

Le développement de Taylor Young permet également d'étudier les extrema, on a vu qu'une condition nécessaire est que $f'(x_0) = 0$. On a alors $D = f(x) - f(x_0)$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- a/ Si $f''(x_0) > 0$. Pour x suffisamment proche de x_0, D est strictement positif : x_0 réalise un minimum local.
- b/ Si $f''(x_0) < 0$, x_0 réalise un maximum local.
- c/ Si $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$, on a un point d'inflexion, donc pas d'extremum.

VI.3.3 Etude des branches infinies d'une courbe

Considérons comme exemple, le cas : $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

1. Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini on a une *branche parabolique* de *direction asymptotique 0y*.
2. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on a une *branche parabolique* de *direction asymptotique 0x*.
3. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha \neq 0$, la droite $y = \alpha x$ est la *direction asymptotique* de la courbe, et on doit encore distinguer deux cas :
   – Si $f(x) - \alpha x$ tend vers ∞ quand $x \to \infty$, on a encore une branche parabolique.
   – Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$, la courbe admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ comme asymptote. Sa position par rapport à cette asymptote dépend du signe de l'infiniment petit $D = f(x) - (\alpha x + \beta)$ quand x tend vers l'infini.

Pour faire l'étude dans le cas 3. il suffit d'avoir un développement limté au voisinage de l'infini de la fonction $\dfrac{f(x)}{x}$. En effet si on a :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{avec } a_2 \neq 0$$

On trouve alors

$$\alpha = a_0, \beta = a_1 \text{ et } D = f(x) - a_0 x - a_1 = \frac{1}{x}\left(a_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Pour x grand, $a_2 + \varepsilon(\frac{1}{x})$ a le signe de a_2, on en déduit donc la position de la courbe par rapport à l'asymptote d'équation $y = a_0 x + a_1$.

Si $a_2 = 0$, il faut trouver le premier terme non nul après a_2 dans le développement de $\frac{f(x)}{x}$ et faire un raisonnement similaire.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre VI

Exercice A.1.1 Ch6-Exercice1

Montrer par récurrence que

$$\forall k = 1,\, 2, \ldots,\, n, \quad \frac{d^k}{dx^k}\, x^n = n(n-1)\cdots(n+1-k)x^{n-k},$$

En déduire que

$$\frac{d^n}{dx^n}\, x^n = n!$$

puis que

$$\frac{d^k}{dx^k}\, x^n = 0,\ \forall k > n.$$

retour au cours

Solution

Exercice A.1.2 Ch6-Exercice2

Montrer que la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 n'est autre que la formule des accroissements finis.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch6-Exercice3

Montrer que si l'on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à un polynôme de degré n, on obtient la formule de Taylor pour les polynômes.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch6-Exercice4

Montrer que la formule de Mac-Laurin est une application directe de la formule de Taylor-Lagrange.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch6-Exercice5

Donner une approximation de $\ln 2$ en utilisant le développement de Taylor de $f(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre 2, 3, $\ldots$,6 et comparer à sa valeur exacte.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch6-Exercice6

Donner, à l'ordre 7, le développement de $\sin x$ et $\cos x$ au point $x = 0$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch6-Exercice7

Donner les développements de Mac-Laurin des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch6-Exercice8

1. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4.
2. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4. En déduire la limite de $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ quand x tend vers 0.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.9 Ch6-Exercice9

Montrer que les infiniment petits (au voisinage de 0) $\sin kx$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$) et x sont du même ordre et que les infiniment petits (au voisinage de 0) x^2 et $\sin x$ ne sont pas du même ordre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch6-Exercice10

On suppose que f est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de a et on pose $g(x) = f(a + x)$. Montrer que g est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de 0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch6-Exercice11

Soit la fonction $f(x) = x\sin(1/x)$, montrer que c'est un infiniment petit au voisinage de $x = 0$, mais que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^p}$ n'existe pas pour $p \geq 1$. En déduire que l'infiniment petit f n'a pas d'ordre entier non nul.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch6-Exercice12

Montrer que si f et g sont deux infiniment petits au voisinage de 0, on a

$$\textbf{Ordre}\,(f(x)g(x)) = \textbf{Ordre}\,(f(x)) + \textbf{Ordre}\,(g(x))$$

et en déduire que si f est d'ordre strictement supérieur à g, alors

$$\textbf{Ordre}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \textbf{Ordre}\,(f(x)) - \textbf{Ordre}\,(g(x)).$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch6-Exercice13

Soient $f(x) = x$ et $g(x) = -\sin x$. Quel est l'ordre des infiniment petits f, g et $f + g$? Conclusion ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch6-Exercice14

Montrer que si f admet un développement limité à l'ordre n en a, elle y admet un développement à n'importe quel ordre $m < n$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch6-Exercice15

Donner des exemples de développement limité dans lequel la partie régulière du développement est un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre du développement.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch6-Exercice16

Donner le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch6-Exercice17

Donner, à l'ordre 2, le développement limité de e^x et $\sin x$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $e^x \sin x$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Taylor.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch6-Exercice18

Donner le développement limité à l'ordre 7 de $\sin x$ et $\cos x$. Effectuer la division suivant les puissantes croissantes des deux parties principales pour montrer que le développement limité à l'ordre 7 de $\tan x$ est :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + 17\frac{x^7}{315} + x^7\varepsilon(x).$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch6-Exercice19

Donner le développement limité à l'ordre 5 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ (en utilisant celui de $(1+x)^{-1}$).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch6-Exercice20

Donner le développement limité de $(1-x^2)^{-1/2}$ à l'ordre 5. En déduire (par intégration) le développement limité de $\operatorname{Arc}\sin x$ à l'ordre 6. Comment calculeriez vous celui de $\operatorname{Arc}\tan x$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 TD6-Exercice1

1. Calculer un développement de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions : $\cos x$, $(1-\cos x)^2$, $\cos^2 x$. (Vérifier vos résultats en développant $(1-\cos x)^2$.)
2. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $\cos x$
   (a) en utilisant la formule de Taylor-Young qui permet d'exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$,
   (b) en développant $\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$ et en utilisant les développements connus de $\cos h$ et $\sin h$ au voisinage de 0.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2a Aide 1 Aide 2
Question 2b Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD6-Exercice2

Écrire les développements de Taylor-Young au voisinage de 0 des fonctions suivantes : $e^x\sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 2, $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 2.

Aide 1

Exercice A.2.3 TD6-Exercice3

On définit les fonctions hyperboliques suivantes

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

alors on a (le vérifier)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \ (\cosh x)' = \sinh x.$$

1. Donner l'ordre des infiniments petits (au voisinage de 0) et donner la partie principale des fonctions : $\sin x - x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\frac{x}{1+x}$, $\sqrt{1+x} - 1$.
2. Écrire les développements de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de a des fonctions : e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\frac{1}{1-x}$ $(a \neq 1)$, $\sqrt{x}$ $(a > 0)$.
3. Ecrire les développements de Taylor-Young au voisinage de a des fonctions : $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 $(a \neq -1)$, $\arctan x$ à l'ordre 2.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD6-Exercice4

1. Écrire les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions : $\dfrac{1}{1-x}, \dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Effectuer les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes : $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4, $\dfrac{e^x-1}{x}$ à l'ordre 2.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.5 TD6-Exercice5

Écrire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $\tan x$ à l'ordre 5, $\dfrac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 2, $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ à l'ordre 3, $\dfrac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4, $\dfrac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4, $\dfrac{x}{e^x-1}$ à l'ordre 2.
2. $\ln(1+\sin x)$ à l'ordre 3, $\ln(1+\cos x)$ à l'ordre 3, $\sqrt{\cos x}$ à l'ordre 4, $\sqrt{1+\cos x}$ à l'ordre 2, $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD6-Exercice6

Calculer le développement limité de la fonction f au voisinage de a à l'ordre 2 dans chacun des cas : $(f(x) = \tan x, a = \frac{\pi}{4})$, $(f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}, a = 1)$, $(f(x) = \sqrt{\tan x}, a = \frac{\pi}{4})$, $(f(x) = \sin(\pi \cos x), a = \frac{\pi}{3})$, $(f(x) = e^{\sin x}, a = \frac{\pi}{6})$, $(f(x) = \ln(\sin x), a = \frac{\pi}{3})$.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD6-Exercice7

On considère la fonction $f(x) = \ln|\cos x|$.

1. Donner le domaine de définition de f, réduire l'intervalle d'étude.
2. Donner le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative (C).
3. Quelle est, au voisinage de 0, la position de (C) par rapport à la parabole d'équation $y = -\dfrac{x^2}{2}$?

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD6-Exercice8

1. Calculer un développement limité de $e^{\sin x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
2. Calculer un développement limité de $\arctan(\sqrt{3}(\cos x + \sin x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. Calculer un développement limité de $\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD6-Exercice9

Déterminer les constantes a, b, c, d pour que les infiniment petits au voisinage de 0 soient d'ordre le plus élevé possible : $\tan x + a \sin x + b \sin^2 x$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + c \cos x + d \tan x$. Quelles sont alors les parties principales ?

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD6-Exercice10

Calculer la limite lorsque $x \to 0$ des expressions : $\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$, $\dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\sin^2 x}$, $\dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$, $\dfrac{\sin x + 2 - 2\sqrt{1+x}}{\cos x - 1}$.

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.11 TD6-Exercice11

Calculer les limites de $f(x)$ lorsque $x \to a$ dans les cas suivants :

$$(f(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x^3}, a = 0), (f(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}, a = 0),$$

$$(f(x) = \frac{e^{-x}\sin x - x + x^2}{x^4}, a = 0), (f(x) = \frac{\sin x - \ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin x}, a = 0),$$

$$(f(x) = x\left((1+\tfrac{1}{x})^x - e\right), a = +\infty), (f(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{1 + \cos 4x}, a = \frac{\pi}{4}).$$

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.12 TD6-Exercice12

1. Tracer au voisinage de 0 les 4 courbes d'équation $y = x$, $y = \sin x$, $y = \ln(1 + x)$.
2. Utiliser un développement limité pour trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ au point d'abscisse 0. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.
3. On définit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$, montrer que la courbe d'équation $y = f(x)$ admet une droite tangente au point d'abscisse 0 dont on donnera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD6-Exercice13

Soit $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

1. Montrer que $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$ (préciser le signe).
2. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), soit a cette limite.
3. Calculer la limite de $f(x) - ax$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
4. Déterminer l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
5. Montrer que l'on aurait pu obtenir tous ces résultats en effectuant un développement limité de $\dfrac{f(x)}{x}$ à un ordre convenable.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 5 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14 TD6-Exercice14

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$, écrire un développement limité au voisinage de l'infini à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x)}{x}$.
2. En déduire l'équation de la droite asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
3. Mêmes questions avec les courbes d'équation $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $y = x \cos \dfrac{1}{x}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre VI

Exemple B.1.1 Approximation de $\ln(1+x)$

L'exemple ci-dessous va montrer comment utiliser les développements pour encadrer la valeur exacte cherchée. Soit $f(x) = \ln(1+x)$, le développement au voisinage de 0 s'écrit :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{h^{n+1}}{(1+\theta h)^{n+1}}, \qquad \text{(B.1.1)}$$

développement qui est valide pour $h \in]-1, +\infty[$. Prenons par exemple $n = 2$, et $h = 1$. Il vient

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3(1+\theta)^3} \quad \text{avec} \quad \theta \in]0, 1[.$$

Passons au calcul numérique. Connaissant $\ln 2 = 0.693\ldots$, on trouve facilement $\theta = 0.199\ldots$ Mais il est plus intéressant de procéder dans le sens inverse. Sans connaître la valeur exacte de θ, mais seulement les inégalités $0 < \theta < 1$, on déduit aisément de (B.1.1) un encadrement pour $\ln(1+h)$. Par exemple, pour $h = 1$, nous obtenons, avec $n = 2$:

$$0,541\,666\ldots = \frac{13}{24} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0,833\,333\ldots$$

ou, avec $n = 3$:

$$0,583\,333\ldots = \frac{7}{12} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4.2^4} = \frac{157}{192} = 0,817\,708\,333\ldots$$

Sur cet exemple, nous voyons que la qualité de l'approximation dépend du reste, donc du comportement de la dérivée d'ordre $n+1$. Dans le cas de la fonction *sinus* (voir l'exemple suivant), cette dérivée est bornée par 1 quel que soit n, tandis que dans le cas du logarithme, cette dérivée est seulement majorée (en valeur absolue) par $n!$.

retour au cours

Exemple B.1.1
Approximation de $\ln(1+x)$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Approximation de $\sin x$

La partie régulière du développement de $\sin x$ à l'ordre $2p+2$, est un polynôme de degré $2p+1$ qui s'écrit :

$$P_{2p+1}(h) \stackrel{\text{Déf}}{=} h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Prenons $h = 0.1$ radian ($\simeq 5,73$ degré), nous avons :

$$\begin{array}{rcc} \sin h & = & 0.09983341665 \\ P_1(h) & = & 0.1 \\ P_3(h) & = & 0.09983333333 \\ P_5(h) & = & 0.09983341666, \end{array}$$

Ce qui montre la qualité de l'approximation de $\sin h$ par $P_5(h)$.

Nous pouvons légitimement nous demander si cette approximation n'est intéressante que *localement*, c'est-à-dire pour h petit. Nous pouvons voir qu'il n'en est rien. Prenons $h = \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\begin{array}{rcc} \sin h & = & 1 \\ P_1(h) & = & 1.570832229 \\ P_3(h) & = & 0.924832229 \\ P_5(h) & = & 1.004524856 \\ P_7(h) & = & 0.999843101 \\ P_9(h) & = & 1.000003543... \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui montre là encore la convergence rapide de cette suite. Attention cependant, les termes de ce polynôme sont de signes alternés. Si l'on prend des valeurs suffisamment grandes de h, les valeurs calculées ne représenteront plus rien du tout

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3 Application du développement de Taylor-Young de $\cos x$

Le développement de Taylor-Young de la fonction $\cos x$ au voisinage de 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

Définissons la fonction

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{avec} \quad D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Pour $h \neq 0$, h petit nous pouvons écrire

$$f(h) = \frac{1 - (1 - \frac{h^2}{2} + h^3\varepsilon(h))}{h^2} = \frac{1}{2} + h\varepsilon(h). \tag{B.1.2}$$

Ainsi f admet une limite $(= \frac{1}{2})$ en $x = 0$ et nous pouvons prolonger f par continuité en 0 et définir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x = 0, \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

La formule (B.1.2) permet de montrer que la fonction $\tilde{f}$ est même dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet f est dérivable sur son domaine de définition $D(f)$ et il reste à étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0, or d'après (B.1.2) on a

$$\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0) = h\varepsilon(h),$$

ce qui montre que $\tilde{f}'(0) = 0$ est bien défini.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.4 Division suivant les puissances croissantes

Soient les polynômes $A(x) = 2 - x + x^2 - 3x^3$, $B(x) = 1 - x^2$ rangés suivant les puissances croissantes. Effectuons la division de A par B de façon à pouvoir mettre x^4 en facteur dans le reste.

$$
\begin{array}{rccccccc|c}
A(x) : & 2 & -x & +x^2 & -3x^3 & & & & 1-x^2 \\
\cline{9-9}
-B(x)Q_1(x) : & -2 & & 2x^2 & & & & & 2-x+3x^2-4x^3 \\
\cline{1-7}
R_1(x) : & & -x & +3x^2 & -3x^3 & & & & \\
-B(x)Q_2(x) : & & +x & & -x^3 & & & & \\
\cline{1-7}
R_2(x) : & & & 3x^2 & -4x^3 & & & & \\
-B(x)Q_3(x) : & & & -3x^2 & & +3x^4 & & & \\
\cline{1-7}
R_3(x) : & & & & -4x^3 & +3x^4 & & & \\
-B(x)Q_4(x) : & & & & +4x^3 & & -4x^5 & & \\
\cline{1-7}
R_4(x) : & & & & & 3x^4 & -4x^5 & &
\end{array}
$$

Nous avons ainsi obtenu :

$$2 - x + x^2 - 3x^3 = (1 - x^2)(2 - x + 3x^3 - 4x^3) + x^4(3 - 4x).$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.5 Exemple de composition de développements limités

Nous désirons calculer à l'ordre 5 le développement limité de $\varphi(x) = e^{\sin x}$, au voisinage de 0. Nous avons :

$$a = \alpha_0 = 0, \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x$$

et

$$R(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$
$$Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Calculons $Q \circ R$. Nous obtenons :

$$Q(R(x)) = 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^3 + \frac{1}{4!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^4 + \frac{1}{5!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^5$$

et S s'obtient en ne gardant que les termes de degré ≤ 5 dans le polynôme précédent, soit

$$S(x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{2x^4}{3!}\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3 - \frac{3x^5}{3!}\right) + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où le développement cherché

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + x^5\varepsilon(x). \tag{B.1.3}$$

À titre indicatif prenons $x = 0.1$ rad ($\simeq 5.73$ deg), nous obtenons :

$$e^{\sin x} = 1.104\,986\,830\ \ldots$$

et la partie régulière de (B.1.3) vaut

$$S(0.1) = 1.104\,986\,833\ \ldots$$

ce qui montre que le terme complémentaire est de l'ordre de 3.10^{-9}.

retour au cours

Exemple B.1.5
Exemple de composition de développements limités

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.6 Calcul de limite par dévelopements limités

Calculons la limite quand $x \to +\infty$ de

$$f(x) = (1 + \frac{a}{x})^x, \quad a \in \mathbb{R}_*$$

Nous obtenons ici une forme indéterminée de la forme 1^∞. En prenant le logarithme, nous obtenons :

$$\ln f(x) = x \ln(1 + \frac{a}{x}),$$

ce qui, en posant $h = \frac{1}{x}$, se ramène à l'étude au voisinage de 0 de la forme indéterminée

$$g(h) = \frac{\ln(1 + ah)}{h}$$

qui est de la forme $\frac{0}{0}$. Nous allons donc utiliser le développement limité de $\ln(1 + ah)$ qui est

$$\ln(1 + ah) = ah + h\varepsilon(h)$$

et donc

$$g(h) = a + \varepsilon(h)$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} g(h) = a.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Nous avons ainsi établi que :

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \to e^a \quad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre VI

Document C.1.1 Formule de Taylor-Lagrange - démonstration

Théorème C.1.1. *Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Alors quel que soit h tel que $a+h \in I$, il existe un $\theta \in]0,1[$, tel que l'on a la relation :*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h). \quad \text{(C.1.1)}$$

Démonstration - Soient donc a et h fixés (avec $a+h \in I$) et définissons tout d'abord le nombre C par l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + C \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{(C.1.2)}$$

puis introduisons la fonction φ suivante

$$\varphi(x) = f(a+x) - f(a) - \frac{x}{1!} f'(a) - \frac{x^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) - C \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \text{(C.1.3)}$$

Notons que φ est une fonction qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ sur I, puisque f est $(n+1)$ fois dérivable et que les autres termes sont des monômes en la variable x.

– (i) Par définition $\varphi(0) = 0$ et, d'après le choix de C, nous avons également $\varphi(h) = 0$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0,h]$ (en supposant $h > 0$, sinon on se place dans l'intervalle $[h,0]$), et il existe donc un point $\xi_1 \in]0,h[$ tel que

$$\varphi'(\xi_1) = 0, \quad \text{(C.1.4)}$$

avec

$$\varphi'(x) = f'(a+x) - f'(a) - xf''(a) - \frac{x^2}{2!}f'''(a) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a) - C\frac{x^n}{n!}. \quad \text{(C.1.5)}$$

- (ii) Nous avons donc (C.1.4) et, d'après la relation (C.1.5)

  $$\varphi'(0) = 0.$$

  Nous pouvons alors appliquer le théorème de Rolle à φ' sur l'intervalle $[0, \xi_1]$. Il existe donc $\xi_2 \in]0, \xi_1[$ tel que

  $$\varphi''(\xi_2) = 0, \quad \text{(C.1.6)}$$

  avec

  $$\varphi''(x) = f''(a+x) - f''(a) - xf'''(a) - \cdots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(a) - C\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

- (iii) Nous nous retrouvons ainsi dans une situation analogue à la précédente puisque l'on a (C.1.6) et clairement

  $$\varphi''(0) = 0.$$

  De proche en proche nous arrivons à la situation suivante : il existe

  $$\xi_n \in]0, \xi_{n-1}[\subset]0, \xi_{n-2}[\subset \cdots \subset]0, h[$$

  tel que

  $$\varphi^{(n)}(\xi_n) = 0 \quad \text{(C.1.7)}$$

  avec

  $$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(a+x) - f^{(n)}(a) - Cx. \quad \text{(C.1.8)}$$

– (iv) Il résulte de (C.1.7) et (C.1.8) que $\varphi^{(n)}$ est dérivable pour $x \in [0,h]$ et vérifie :

$$\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(\xi_n) = 0,$$

de sorte que le théorème de Rolle s'applique à $\varphi^{(n)}$: il existe $c \in]0,\xi_n[\subset]0,h[$ tel que

$$\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(a+c) - C = 0,$$

ce qui montre que

$$C = f^{(n+1)}(a+c) \quad \text{avec} \quad c \in]0,h[. \tag{C.1.9}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$C = f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{avec} \quad \theta \in]0,1[. \tag{C.1.10}$$

Le théorème est alors démontré puisqu'avec C donné par (C.1.10), les formules (C.1.1) et (C.1.2) sont identiques.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Développements limités des fonctions paires

Proposition C.1.1. *La partie régulière du développement limité, au voisinage de 0, d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes pairs (resp. impairs).*

Démonstration - Soit f une fonction paire admettant le développement limité à l'ordre $(2n+1)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2n} x^{2n} + \alpha_{2n+1} x^{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$$

alors en changeant x en $(-x)$, nous obtenons :

$$f(-x) = \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2n} x^{2n} - \alpha_{2n+1} x^{2n+1} - x^{2n+1}\varepsilon(-x),$$

Comme $f(x) = f(-x)$, en soustrayant les deux développements nous obtenons :

$$0 = 2\left(\alpha_1 x^1 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{2n+1} x^{2n+1}\right) + x^{2n+1}\left(\varepsilon(x) + \varepsilon(-x)\right).$$

Or la fonction $g \equiv 0$, admet comme unique développement le développement identiquement nul, de sorte que :

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$$

(ce qui implique que $x^{2n+1}\varepsilon(x)$ est une fonction paire, ce qui est cohérent). Le cas où f est impaire se traiterait de manière analogue.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

F

I

Solution de l'exercice A.1.1

La récurrence se fait sur k.

- Pour $k = 1$, on a $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.
- Supposant que la relation est vraie pour k, on a alors

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}(n(n-1)\cdots(n+1-k)x^{n-k}) = n(n-1)\cdots(n-k)x^{n-k-1}.$$

Les deux autres résultats s'en déduisent immédiatement.

Retour à l'exercice ▲

Si l'on fait $n = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

où $0 < \theta < 1$. On retrouve la formule des accroissements finis avec $b = a + h$ et $c = a + \theta h$ est bien compris entre a et b.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

En effet, si P est un polynôme de degré n, alors $P^{(n+1)}(x) = 0$ et donc le reste dans la formule de Taylor-Lagrange est nul. On retrouve ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

Si on pose $a = 0$ et $h = x$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule de Mac-Laurin.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7(1+\theta x)^7}$$

Les approximations successives donnent :

$$\ln 2 = 1 - 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3} = 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3}$$

$$\ln 2 = 1 - 0.5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4(1+\theta)^4} = 0.833 - \frac{1}{4(1+\theta)^4}$$

$$\ln 2 = 0.583 + \frac{1}{5(1+\theta)^5}$$

$$\ln 2 = 0.749 - \frac{1}{6(1+\theta)^6}$$

$$\ln 2 = 0.606 - \frac{1}{7(1+\theta)^7}$$

et la valeur exacte est

$$\ln 2 = 0.693\ldots$$

On voit que les restes ne sont pas négligeables et qu'il faut quelques itérations supplémentaires pour avoir la deuxième décimale exacte ... puisque le terme que l'on rajoute est en $\frac{1}{n}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

On obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\sin(\theta x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\cos(\theta x)$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Calculons les dérivées successives de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \cdots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

d'où le développement de Mac-Laurin à l'ordre n :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}\frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

Les dérivées de $\sinh x$ et $\cosh x$ se calculent aisément, et on obtient à l'ordre 2p :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\cosh(\theta x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\sinh(\theta x)$$

Les développements à l'ordre $2p+1$ sont aussi faciles à écrire.

Retour à l'exercice ▲

1. On a
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{\pi}{4}+x\cos\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{x^3}{3!}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{x^4}{4!}\sin\frac{\pi}{4}+x^4\varepsilon(x)$$
et en remplaçant par les valeurs numériques
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)+x^4\varepsilon(x).$$

2. Le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de 0 est :
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+x^4\varepsilon(x).$$
Alors
$$\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}+x\varepsilon(x)$$
et donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

Les fonctions $\sin kx$, x et x^2 tendent vers 0 quand $x \to 0$, ce sont donc des infiniment petits au voisinage de 0. Puisque

$$\lim_{x\to 0} k\frac{\sin kx}{kx} = k$$

les infiniment petits $\sin kx$ et x sont du même ordre. Par contre

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{\sin x}{x} = \infty$$

ce qui montre que $\sin x$ et x^2 ne sont pas des infiniment petits du même ordre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

$$f(x) = \alpha(x-a)^p(1+\varepsilon(x-a))$$

d'où

$$g(x)(= f(a+x)) = \alpha x^p(1+\varepsilon(x))$$

et donc g est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

Il est clair que

$$|f(x)| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$$

aussi la fonction f tend vers 0 quand x tend vers 0. Par contre

$$\frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \sin \frac{1}{x}$$

et puisque $p - 1 \geq 0$, le terme $\frac{1}{x^{p-1}}$ est soit égal à 1, soit tend vers l'infini et le terme $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. D'où l'infiniment petit f n'a pas d'ordre.

Retour à l'exercice ▲

Soient m et n les ordres respectifs des infiniment petits f et g au voisinage de 0 :

$$f(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon_1(x), \quad g(x) = \beta x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

En faisant le produit, il vient :

$$f(x)g(x) = \alpha\beta x^{m+n} + x^{m+n}(\beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))$$

et la fonction

$$\varepsilon(x) = \beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

tend vers 0 quand x tend vers 0. Pour le quotient, il suffit d'écrire

$$f(x) = g(x)\,\frac{f(x)}{g(x)}$$

et d'appliquer le résultat précédent.

Retour à l'exercice ▲

L'ordre des infiniment petits x et $\sin x$ est évidemment 1. Par contre

$$x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x))$$

et donc $f + g$ est d'ordre 3. Il n'y a donc pas de résultat général sur l'ordre d'une somme de deux infiniment petits lorsqu'ils sont du même ordre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Soit

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

alors

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m + h^m(\alpha_{m+1} h + \cdots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m}\varepsilon(h))$$

et la fonction $\alpha_{m+1} h + \cdots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m}\varepsilon(h)$ tend évidemment vers 0 quand h tend vers 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

Un exemple trivial est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$$

dans lequel l'ordre du développement est 4 et le polynôme est de degré 3.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ étant paire, il suffit de ne calculer que les termes pairs du développement, soit

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + x(\cdots)$$

ce qui donne $f''(0) = -2$ d'où

$$f(x) = 1 - x^2 + x^3\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

A l'ordre 2, le développement de e^x et $\sin x$

$$e^x \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x))(x + x^2\varepsilon_2(x))$$

soit

$$e^x \sin x = x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Vous pouvez calculer les dérivées de $e^x \sin x$ pour vérifier ce résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Il faut diviser suivant les puissances croissantes les deux polynômes suivants :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

Le développement de $(1+y)^{-1}$ s'obtient en faisant $\alpha = -1$ dans celui de $(1+y)^{\alpha}$:

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^5\varepsilon(y)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^5\varepsilon(x).$$

Les calculs sont beaucoup moins importants que si l'on avait dû calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 4.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

On prend le développement de $(1+y)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + y^2\varepsilon(y)$$

soit

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

soit en intégrant ($\operatorname{Arc}\sin x$ est une fonction impaire) :

$$\operatorname{Arc}\sin x = C + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

Or $C = \operatorname{Arc}\sin 0 = 0$, donc

$$\operatorname{Arc}\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

La dérivée de $\operatorname{Arc}\tan x$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$, dont nous avons calculé un développement limité dans l'exercice A.1.19. Il suffit alors d'intégrer ce développement limité pour obtenir celui de $\operatorname{Arc}\tan x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.1

Le développement de Taylor-Young nécessite le calcul des dérivées de $(1-\cos x)^2$ et $\cos^2 x$. Pensez à simplifier les expressions en utilisant les relations de $\sin 2x$ par exemple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x),$$

$$(1 - \cos x)^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_2(x),$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon_3(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.1

Vérifier vos calculs sachant que

$$(1 - \cos x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x + 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Pour exprimer un développement d'ordre 4 d'une fonction au voisinage d'un point a, on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a) + h^4\varepsilon(h).$$

Retour à l'exercice ▲

On obtient :

$$\cos(\frac{\pi}{4}+h) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}) + h^4\varepsilon(h).$$

Retour à l'exercice ▲

On peut aussi écrire :

$$\cos(\frac{\pi}{4}+h) = \cos\frac{\pi}{4}\cos h - \sin\frac{\pi}{4}\sin h,$$

et considérer les développements de $\cos h$ et $\sin h$ au voisinqge de 0. On retrouve alors les résultats de la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.2

$$e^x\sqrt{1+x^2} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x),$$
$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Attention l'ordre d'un infiniment petit n'a rien à voir avec l'ordre d'un développement de Taylor ! Voir le paragraphe ordre d'un infiniment petit.

Retour à l'exercice ▲

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

d'où

$$\sin x - x = -\frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

ce qui donne comme partie principale

$$-\frac{1}{3!}x^3.$$

L'ordre de l'infiniment petit est donc 3.
Faites de même pour les autres fonctions.

Retour à l'exercice ▲

$$\sinh x = x + x\varepsilon(x),$$

l'ordre de l'infiniment est donc 1. La fonction $\cosh x$ n'est pas un infiniment petit (pourquoi ?).

$$\frac{x}{1+x} = x + x\varepsilon(x),$$

l'ordre de l'infiniment est donc 1.

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} + x\varepsilon(x),$$

l'ordre de l'infiniment est donc 1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.3

Vous pouvez les écrire sous la forme $f(a+h)$ et éventuellement remplacer ensuite $(a+h)$ par x, d'où h par $x-a$.

Retour à l'exercice ▲

Ainsi

$$e^{a+h} = e^a(e^h) = e^a(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)),$$

qui peut se récrire

$$e^x = e^a(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{6} + (x-a)^3\varepsilon(x-a)).$$

Tout calcul fait :

$$\cos(a+h) = \cos a - h\sin a - \frac{h^2}{2}\cos a + \frac{h^3}{6}\sin a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\sin(a+h) = \sin a + h\cos a - \frac{h^2}{2}\sin a - \frac{h^3}{6}\cos a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\cosh(a+h) = \cosh a + h\sinh a + \frac{h^2}{2}\cosh a + \frac{h^3}{6}\sinh a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\sinh(a+h) = \sinh a + h\cosh a + \frac{h^2}{2}\sinh a + \frac{h^3}{6}\cosh a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\frac{1}{1-(a+h)} = \frac{1}{1-a} + \frac{h}{(1-a)^2} + \frac{h^2}{(1-a)^3} + \frac{h^3}{(1-a)^4} + h^3\varepsilon(h),$$

soit encore

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \frac{(x-a)^3}{(1-a)^4} + (x-a)^3\varepsilon(x-a).$$

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a}(1 + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{8a^2} + \frac{h^3}{16a^3} + h^3\varepsilon(h)).$$

Retour à l'exercice ▲

La solution est :

$$\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{x-a}{1+a} - \frac{(x-a)^2}{2(1+a)^2} + (x-a)^2\varepsilon(x-a),$$

$$\arctan x = \arctan a + \frac{x-a}{1+a^2} - \frac{a(x-a)^2}{(1+a^2)^2} + (x-a)^2\varepsilon(x-a).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Pensez au développement de $(1+u)^{\alpha}$ au voisinage de 0 et composer avec le développement de u. Pour les deux premières, vous pouvez aussi utiliser le quotient des deux polynômes.

Retour à l'exercice ▲

- Pour $\alpha = -1$ et $u = -x$, on obtient :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x),$$

On pourrait obtenir le même résultat en divisant 1 par $1+x$. - On prend $\alpha = -1$ et $u = x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^p x^{2p} + x^{2p}\varepsilon(x),$$

si $n = 2p$ c'est à dire n est pair, et

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^p x^{2p} + x^{2p+1}\varepsilon(x),$$

si $n = 2p+1$ c'est à dire n est impair. - On prend $\alpha = -1/2$ et $u = -x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(frac(-x^2)^2 2 + ... + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-p+1)(frac(-x^2)^p p! + x^{2p}\varepsilon(x),$$

si $n = 2p$ c'est à dire n est pair, et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(frac(-x^2)^2 2 + ... + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-p+1)(frac(-x^2)^p p! + x^{2p+1}\varepsilon(x),$$

si $n = 2p+1$ c'est à dire n est impair.

Retour à l'exercice ▲

Pensez au quotient des développements limités.

Retour à l'exercice ▲

Le développement de $\cos x$ à l'ordre 4 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x).$$

D'où

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x).$$

On ne peut faire le quotient de développements limités lorsque le dénominateur s'annule, ce qui est le cas de x. Mais on comprend aisément que pour obtenir un développement d'ordre n de $f(x)/x$, il suffit de développer $f(x)$ à l'ordre $n+1$ et de diviser par x.

Retour à l'exercice ▲

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) - 1),$$

soit

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les résultats sur le quotient des développements limités en n'oubliant pas que le dénominateur ne doit pas s'annuler.

Retour à l'exercice ▲

Le développement de $\tan x$ à l'ordre 5 s'obtient en effectuant le quotient de la partie régulière du développement de $\sin x$ à l'ordre 5, soit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x),$$

par la partie régulière du développement de $\cos x$ à l'ordre 5, soit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x),$$

ce qui donne

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x).$$

De même, on obtient

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x).$$

Attention, x s'annule en $x = 0$, mais puisque

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x),$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^5\varepsilon(x).$$

Attention, $\sin x$ s'annule en $x = 0$! On écrit alors

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)},$$

soit

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\varepsilon(x)} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{7x^4}{360} + x^4\varepsilon(x).$$

Il en est de même pour la dernière fonction dont vous montrerez que son développement limité donne

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

On essaye de se ramener à des développements de fonctions connues en composant des développements connus. Attention lorsque l'on compose des développements il faut une compatibilité entre les points au voisinage desquels on développe !

Retour à l'exercice ▲

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x),$$

d'où, en composant

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

Il y a une difficulté dans le suivant puisque $\cos x$ ne s'annule pas en $x = 0$. On peut considérer que $\cos x - 1$ s'annule en $x = 0$ et écrire

$$\ln(1+\cos x) = \ln(2+\cos x - 1) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{\cos x - 1}{2}).$$

On écrit alors le développement de $\frac{\cos x-1}{2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0

$$\frac{\cos x - 1}{2} = -\frac{x^2}{4} + x^3\varepsilon(x),$$

ce qui donne

$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + x^3\varepsilon(x).$$

Pour les suivants on compose avec des développements de $(1+u)^{1/2}$. On obtient, tous calculs faits,

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4\varepsilon(x),$$

à condition décrire que

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}.$$

De même

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}(1 - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x))$$

à condition décrire que

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2+(\cos x - 1)} = \sqrt{2}\sqrt{1+(\cos x-1)/2}.$$

Pour la suivante, il faut faire attention au développement de e^x qu'il faut exprimer au voisinage de 1 et non de 0 :

$$e^{\sqrt{1+x}} = e(1+\frac{x}{2}+x^2\epsilon(x)).$$

Pour la dernière pensez à passer en $\ln$:

$$(1+x)^{1/x} = e(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}+x^2\epsilon(x)).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.6

Il n'y a aucune difficulté théorique. Il s'agit d'utiliser le développement de Taylor-Young, ce qui nécessite le calcul des deux premières dérivées des fonctions au point a.

Retour à l'exercice ▲

Voici les résultats :

$$\tan(u + \frac{\pi}{4}) = 1 + 2u + 2u^2 + u^2\epsilon(u),$$

soit en posant $x = u + \frac{\pi}{4}$ ou $u = x - \frac{\pi}{4}$

$$\tan(x) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + (x - \frac{\pi}{4})^2\epsilon((x - \frac{\pi}{4})).$$

De même, si l'on ne donne plus que la deuxième forme :

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \ln 2 + (\frac{1}{2} - 2\ln 2)(x-1) + (3\ln 2 - \frac{9}{8})(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon((x-1)),$$

$$\sqrt{\tan x} = 1 + (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + (x - \frac{\pi}{4})^2\epsilon((x - \frac{\pi}{4})),$$

$$\sin(\pi\cos x) = 1 - \frac{3\pi^2(x - \frac{\pi}{3})^2}{8} + (x - \frac{\pi}{3})^2\epsilon((x - \frac{\pi}{3})),$$

$$e^{\sin x} = \sqrt{e}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{8}(x - \frac{\pi}{6})^2 + (x - \frac{\pi}{6})^2\epsilon((x - \frac{\pi}{6}))),$$

$$\ln(\sin x) = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{3})^2 + (x - \frac{\pi}{3})^2\epsilon((x - \frac{\pi}{3})).$$

Retour à l'exercice ▲

Le domaine de définition est évidemment :

$$D_f = x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

et pour le domaine détude, utilisez la périodicité de $|\cos x|$.

Retour à l'exercice ▲

La période de $|\cos x|$ est π (pourquoi ?). De plus la fonction est paire ce qui ramène le domaine détude à $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Retour à l'exercice ▲

Cette question a été traitée en terminal et ne pose aucune difficulté puisque $|\cos x| = \cos x$ sur l'intervalle considéré.

Retour à l'exercice ▲

Il faut utiliser le développement limité de f à un ordre suffisant pour pouvoir en déduire le signe de $f(x)+\frac{x^2}{2}$ au voisinage de 0.

Retour à l'exercice ▲

Il s'agit de composer des développements limités. Remarquez que $\cos x$ est positif au voisinage de 0, ce qui simplifie f.

Retour à l'exercice ▲

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) = \ln(1+u).$$

Utilisez alors le développement de $ln(1+u)$ au voisinage de $u=0$ pour conclure

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Il s’agit de composer les développements limit’es de fonctions. Il faut donc faire attention auc conditions de compatibilité et à l’ordre des développements considérés.

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.8

$\sin 0 = 0$, **donc on développe** $\sin x$ **et** e^x **au voisinage de** 0 **à l'ordre 4. On obtient**

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{24} + x^4\epsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Il s’agit de composer les développements limit’es de fonctions. Il faut donc faire attention auc conditions de compatibilité et à l’ordre des développements considérés.

Retour à l’exercice ▲

$\sqrt{3}(\cos 0 + \sin 0) = \sqrt{3}$, il faut donc développer $\arctan u$ au voisinage de $\sqrt{3}$ à l'ordre 2 (utilisez un développement de Taylor-Young). On obtient

$$\arctan(\sqrt{3}(\cos x + \sin x)) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}x}{4} - \frac{5\sqrt{3}x^2}{16} + x^2\epsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Il s'agit de composer les développements limités de fonctions. Il faut donc faire attention aux conditions de compatibilité et à l'ordre des développements considérés.

Retour à l'exercice ▲

$\frac{1-0}{1+0} = 1$, il faut donc développer $\arctan u$ au voisinage de 1 à l'ordre 3 (utilisez un développement de Taylor-Young). On obtient

$$\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.9

L'ordre d'un infiniment petit au voisinage de 0 est donné par le premier terme non nul du développement limité en 0. Il faut donc calculer les constantes a et b (ou c et d pour la deuxième fonction) qui vont éliminer le terme em x, puis le terme en x^2 et éventuellement, si c'est possible le terme en x^3 ...

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.9

$$\tan x + a \sin x + b \sin^2 x = (x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + x^5\varepsilon(x) + a(x - \frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)) + b(x^2 - 2\frac{x^4}{3!} + x^5\varepsilon(x)).$$

Pour annuler le terme en x, il faut que $1 + a = 0$ et pour annuler le terme en x^2, il faut que $b = 0$. On obtient alors

$$\tan x + a \sin x + b \sin^2 x = (x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + x^5\varepsilon(x) - (x - \frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)) = \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x),$$

ce qui donne un infiniment petit d'ordre 3. Résolvez le second de la même manière et vous trouverez : $c = -1$, $d = \frac{1}{2}$ et un infiniment petit d'ordre 2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.10

Il s'agit de formes indéterminées donc vous lèverez l'indétermination en développant le numérateur et le dénominateur en 0 à un ordre suffisant, qu'il n'est pas toujours facile d'estimer a priori.

Retour à l'exercice ▲

Par exemple, le premier donne :

$$\frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2 + x^2\varepsilon(x)}.$$

On simplifie alors par x^2, puis on passe à la limite quand x tend vers 0 :

$$\frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{2}.$$

Vous ferez les limites suivantes de la même manière, et vous trouverez

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\sin^2 x} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2 - 2\sqrt{1+x}}{\cos x - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.11

Il s'agit de formes indéterminées donc vous lèverez l'indétermination en développant le numérateur et le dénominateur en a à un ordre suffisant, qu'il n'est pas toujours facile d'estimer a priori.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.11

Les premiers ne posent pas de difficultés particulières :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x^3} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} = 1.$$

$$\frac{e^{-x}\sin x - x + x^2}{x^4} \to \infty \text{ quand } x \to 0,$$

car après simplification le numérateur tend vers une constante alors que le dénominateur tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin x} = \frac{1}{2}.$$

Dans le suivant on fait tendre x vers l'infini, il faut donc poser $u = 1/x$ pour se ramener à faire tendre u vers 0 et donc pouvoir utiliser les développements limités en 0. On trouve alors

$$\lim_{x\to\infty} x\left((1+\frac{1}{x})^x - e\right) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}\left((1+u)^{\frac{1}{u}} - e\right) = -\frac{e}{2}.$$

La dernière fait intervenir un développement au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, ce qui donne

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{1 + \cos 4x} = \frac{1}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Tracer les courbes ne pose aucune difficulté mis à part qu'il faut savoir comment elles se situent l'une par rapport aux autres. Pour cela utiliser les développements limités en 0 pour connaitre le signe des différences des différentes questions.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.12

On rappelle que l'équation de la tangente au point a à la courbe représentative de $y = f(x)$ est donné par la partie régulière du développement limité de f en a à l'ordre 1. Donc la position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par les termes suivants du développement limité.

Retour à l'exercice ▲

L'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ et la courbe est au-dessous de la tangente pour $x > 0$ et au-dessus pour $x < 0$.

Retour à l'exercice ▲

On procède de même que dans la question précédente et on trouve une tangente d'équation $y = 1$ avec une courbe qui est toujours au-dessous de sa tangente.

Retour à l'exercice ▲

Le plus simple est de "sortir" x de la racine. Mais attention à la valeur de $\sqrt{x^2}$.

Retour à l'exercice ▲

Pour $x > 0$, on obtient

$$f(x) = x(2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})$$

et pour x<0

$$f(x) = x(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})$$

On en déduit facilement alors que $f(x)$ tend vers l'infini avec le même signe quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. (Quel est ce signe ?)

Retour à l'exercice ▲

Si vous avez factorisé par x dans la question précédente, la réponse est évidente.

Retour à l'exercice ▲

On obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3\ , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Souvenez-vous de vos réflexes de terminal quand vous aviez une expression de la forme $\sqrt{a} - b$ qui donnait une forme indéterminée en faisant tendre x vers l'infini.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$f(x) - 3x = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

soit

$$f(x) - 3x = x\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

Il n'est pas alors difficile de passer à la limite quand x tend vers $+\infty$.

Faire le même raisonnement quand x tend vers $-\infty$.

Retour à l'exercice ▲

Si l'on appelle b la limite de la question précédente, il faut démontrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote. Il faut donc calculer $f(x) - ax - b$ lorsque x tend vers l'infini et démontrer que la limite de cette quantité est égale à (à quoi au fait ?)

Retour à l'exercice ▲

Il faut donc démontrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0$ naturellement ! c'est la définition de l'asumptote. Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut de plus voir si c'est par valeurs positives ou par valeurs négatives. Ce calcul nécessite une fois de plus la même astuce qu'en terminal.

Retour à l'exercice ▲

Calculons $f(x) - ax - b$ au voisinage de $+\infty$.

$$f(x) - 3x - \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

soit

$$f(x) - 3x - \frac{1}{2} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})}.$$

Le dénominateur tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et est toujours positif. Il suffit de simplifier le numérateur qui donne

$$\frac{3}{4x} - \frac{1}{4x^2}.$$

Ce numérateur tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ce qui justifie que $y = 3x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et ce numérateur est positif au voisinage de $+\infty$. La courbe est donc au-dessus de l'asymptote.

Il vous reste à faire le même raisonnement au voisinage de $-\infty$ mais avec la droite $y = x - \frac{1}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.2.13

L'utilisation du développement limité de $\frac{x}{x}$ au voisinage de l'infini va beaucoup simplifier les calculs. Quel changement de variable faut-il faire pour se ramener au voisinage de 0 ?

Retour à l'exercice ▲

Au voisinage de $+\infty$, on a vu que

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

On pose $u = \frac{1}{x}$ et l'on utilise la composition des Développements limités.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 5, Exercice A.2.13

On utilise le développement limité de $\sqrt{1+v}$ au voisinage de $v=0$ et on applique les règles sur la composition des Développements limités :

$$2+\sqrt{1+(u+u^2)} = 2+1+\frac{(}{1}2(u+u^2)-\frac{1}{8}(u+u^2)^2+u^2\varepsilon(u) = 3+\frac{1}{2}u-\frac{3}{8}u^2+u^2\varepsilon(u).$$

Finissez le calcul en revenant à la variable x.

Retour à l'exercice ▲

Si l'on revient à la variable x

$$f(x) = 3x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

Ceci redonne léquation de l'asymptote puisque

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x - \frac{1}{2}) = 0$$

et la position de la courbe par rapport à l'asymptote puisque $\frac{3}{8x}$ tend vers 0 par valeur positive quand x tend vers $+\infty$.

Faitesle même raisonnement au voisinage de $-\infty$.

Retour à l'exercice ▲

Pour effectuer un développement limité au voisinage de l'infini, on se ramène au voisinage de 0 par un changement de variable. Lequel ?

Retour à l'exercice ▲

On pose $u = \frac{1}{x}$. Alors la quantité à développer est la suivante :

$$u\frac{1}{e^u - 1} = u\frac{1}{u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon(u)}$$

soit

$$u\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + u^2\varepsilon(u)} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + u^2\varepsilon(u).$$

Il vous reste à revenir à la variable x.

Comprenez-vous pourquoi on a du développer l'exponentielle à l'ordre 3 ?

Retour à l'exercice ▲

Reportez-vous à la méthode exposée dans la dernière question de l'exercice A.1.13.

Retour à l'exercice ▲

On part du développement à l'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de l'infini, soit

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}),$$

ce qui donne

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{12x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

Déduisez alors l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Retour à l'exercice ▲

L'équation de l'asymptote est $y = x - \frac{1}{2}$ car

$$lim_{x \to \infty}(f(x) - x + \frac{1}{2}) = 0$$

et la courbe est au dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{3}{8x}$ tend vers 0 par valeur positive quand x tend vers $+\infty$. Et au voisinage de $-\infty$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.14

Il suffit d'appliquer la méthode exposée dans les questions précédentes. Si vous n'y arrivez pas c'est que le raisonnement n'a pas été compris. Si, après avoir relu les aides, cela ne vous satisfait toujours pas, demandez de l'aide à un enseignant.

Retour à l'exercice ▲