Exercices du chapitre VIII avec corrigé succinct

Exercice VIII.1 Ch2-Exercice27

Soient les deux lois définies sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante. Étant donnés deux couples (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$, on pose :

- $(x, y) + (x', y') \stackrel{\text{Déf}}{=} (x + x',\ y + y')$ (addition),
- $(x, y) \times (x', y') \stackrel{\text{Déf}}{=} (xx' - yy',\ xy' + x'y)$ (multiplication)

Montrer que ce sont des lois de composition interne dans $\mathbb{R}^2$, que l'addition est commutative, associative, que son élément neutre est $(0, 0)$ et que l'opposé de (x, y) est $(-x, -y)$. Montrer que la multiplication est commutative, associative, que son élément neutre est $(1, 0)$ et que l'inverse de $(x, y) \neq (0, 0)$ est $(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2})$. Enfin, montrer que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Solution : Pour l'addition, les propriétés sont évidentes. La multiplication est commutative car $(x, y) \times (x', y') = (x', y') \times (x, y)$, son élément neutre est bien $(1, 0)$ puisque $(x, y) \times (1, 0) = (x, y)$, l'élément inverse de (x, y) est bien $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ puisque $(x, y) \times (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) = (1, 0)$. Enfin

$$(x, y)\times((x', y')+(x'', y'')) = (x, y)\times(x'+x'', y'+y'') = (x(x'+x'')-y(y'+y''), x(y'+y'')+y(x'+x''))$$

et

$$(x, y) \times (x', y') + (x, y) \times (x'', y'') = (xx' - yy', xy' + yx') + (xx'' - yy'', xy'' + yx'')$$

d'où la distributivité du produit par rapport à l'addition.

Exercice VIII.2 Ch2-Exercice28

1/ Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, et soit la somme $z + z'$ et le produit zz'. Ecrire $z + z'$ et zz' sous la forme canonique (règles d'addition et de multiplication " habituelles " - ne pas oublier que $i^2 = -1$).

2/ On suppose $z = (x, y) = x + iy$ non nul (c'est-à-dire $\neq (0, 0)$), vérifier que son inverse, c-à-d le nombre complexe z' tel que $zz' = z'z = 1$, est $(z' =)\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

Solution :

- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$,
  $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + i^2yy' + i(xy' + x'y) = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.
- $(x + iy)(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}) = 1$

Exercice VIII.3 Ch2-Exercice29

Montrer que les racines carrées d'un nombre réel négatif a, c'est-à-dire les solutions de $z^2 = a$ sont $\pm i\sqrt{-a}$.

Solution : Si l'on résout $(x + iy)(x + iy) = a$, on obtient $x^2 - y^2 + i2xy = a$, ce qui donne $x^2 - y^2 = a$ et $xy = 0$. Puisque $a < 0$, la seule solution (x et y sont réels) est donnée par $x = 0$ et $y = \pm i\sqrt{-a}$

Exercice VIII.4 Ch2-Exercice30

Calculer, en utilisant la formule du binôme de Newton, $(z+z')^3$ et $(z+z')^4$.

Solution : $(z+z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$ et
$(z+z')^4 = z^4 + 4z^3z' + 6z^2z'^2 + 4zz'^3 + z'^4$.

Exercice VIII.5 Ch2-Exercice31

Soit $z \neq \frac{1}{2}, z \in \mathbb{C}$, montrer que $\dfrac{2z+1}{2z-1} = \dfrac{4|z|^2-1}{|2z-1|^2} - i\dfrac{4\Im m\, z}{|2z-1|^2}$.

Solution : On multiplie numérateur et dénominateur par la quantié conjuguée du dénominateur. On obtient ainsi $|2z-1|^2$ au dénominateur et

$$(2z+1)(2\bar{z}-1) = 4|z|^2 + 2(\bar{z}-z) - 1 = 4|z|^2 - 1 - 4i\Im m\, z$$

au numérateur.

Exercice VIII.6 Ch2-Exercice32

En appliquant l'inégalité triangulaire successivement à $z = (z-z') + z'$ et $z' = (z'-z) + z$, montrer que

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

Solution : On a $|z| \leq |z-z'| + |z'|$ et $|z'| \leq |z-z'| + |z|$, d'où
$-|z-z'| \leq |z| - |z'| \leq |z-z'|$.

Exercice VIII.7 Ch2-Exercice33

Montrer que $\mathrm{Arg}\,(\frac{1}{z}) \equiv -\mathrm{Arg}\, z\ [2\pi]$.

Solution : $\mathrm{Arg}\,(z \times \dfrac{1}{z}) \equiv \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\,\dfrac{1}{z}\ [2\pi]$. On remarque alors que
$\mathrm{Arg}\,(z \times \dfrac{1}{z}) = \mathrm{Arg}\, 1, \equiv\ 0\ [2\pi]$.

Exercice VIII.8 Ch2-Exercice34

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, représenter un nombre complexe en précisant son module et son argument. Plus précisément donner la représentation graphique de 1, i, $1+i$ et $1-i$.

Solution : Voir la figure 1.1.

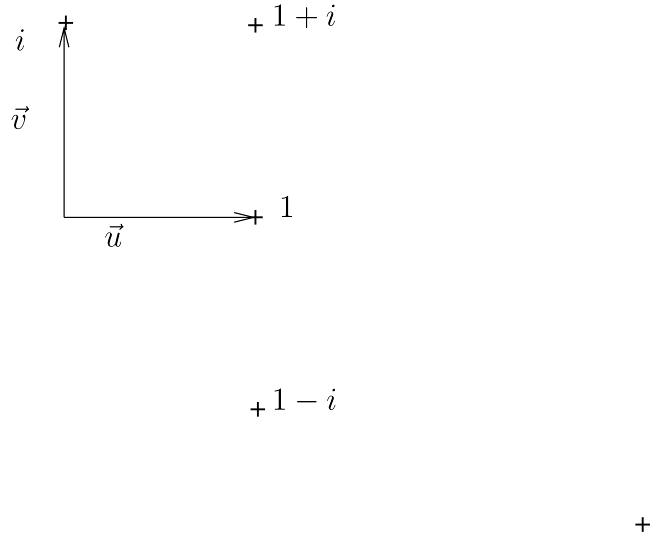

FIG. 1.1 – Représentation graphique de complexes

Exercice VIII.9 Ch2-Exercice35

Déduire de la formule de De Moivre que pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Arg} z^n \equiv n\operatorname{Arg} z\ [2\pi]$.

Solution : Si on pose $\theta = \operatorname{Arg} z$, alors on a $\operatorname{Arg}(z)^n = \operatorname{Arg}(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, d'où $\operatorname{Arg}(z)^n \equiv n\theta\ [2\pi]$.

Exercice VIII.10 Ch2-Exercice36

Déterminer les quatre racines de l'quation $z^4 + z^2 = 0$

Solution : $z^4 + z^2 = z^2(z^2+1)$, 0 est racine double, i est racine simple, $-i$ est racine simple.

Exercice VIII.11 Ch2-Exercice37

Donner les racines cubiques de l'unité (on les note habituellement $\{1, j, j^2\}$) et les représenter graphiquement. Justifier la notation j^2 et montrer que $\bar{j} = j^2$, $1 + j + j^2 = 0$.

Solution : $z^3 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ et $\operatorname{Arg} z = \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2$. On a donc les trois racines $z_1 = 1,\ z_2 = j\ = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = j^2\ = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (qui est bien le carré de j par la formule de De Moivre). Voir la figure 1.2. On voit aisément que z_3 est le conjugué de z_2 et que $z_2 + z_3 = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$.

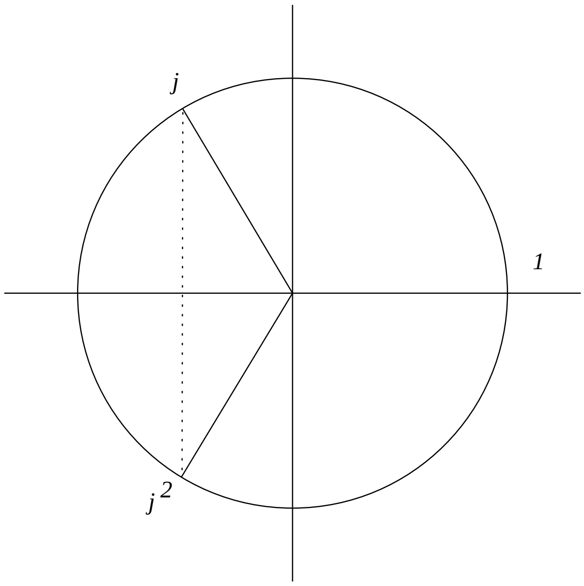

FIG. 1.2 – Racines cubiques de l'unité

Exercice VIII.12 Ch2-Exercice38

Déterminer les racines carrées de i et j.

Solution : $|i| = 1, \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$, les racines carrées de i doivent vérifier :
$|z| = 1$ et $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, 1.$
D'où les deux racines
$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a bien sûr $z_1 = -z_0$.
On calcule de la même manière les racines carrées de j.

Exercice VIII.13 Ch2-Exercice39

Calculer les deux racines carrées de $-5 + 12i$.

Solution : On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = -5 + 12i$, on doit donc avoir :
$(a^2 - b^2 = -5, ab = 6) \Leftrightarrow (ab = 6, a^4 + 5a^2 - 36 = 0) \Leftrightarrow (ab = 6, a^2 = 4) \Leftrightarrow ((a = 2, b = 3)$ ou $(a = -2, b = -3))$
On obtient donc $z_0 = 2 + 3i, z_1 = -2 - 3i$

Exercice VIII.14 Ch2-Exercice40

On suppose que a, b, c sont réels, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

Rappeler l'expression des deux racines z_0, z_1 de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, distinguer les cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

On note r_0, r_1 les deux racines carrées de Δ, montrer que l'on a
$z_0 = \dfrac{-b + r_0}{2a}, z_1 = \dfrac{-b + r_1}{2a}$

Solution :
– si $\Delta > 0$, $z_0 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
– si $\Delta < 0$, $z_0 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Or Si $\Delta > 0$ les 2 racines carrées de Δ sont $r_0 = \sqrt{\Delta}$ et $r_1 = -\sqrt{\Delta}$.
Si $\Delta < 0$ les 2 racines carrées de Δ sont $r_0 = i\sqrt{-\Delta}$ et $r_1 = -i\sqrt{-\Delta}$.
Ce qui termine la démonstration.

Exercice VIII.15 Ch2-Exercice41

Résoudre l'équation du second degré : $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

Solution : On calcule $\Delta = -5 + 12i$, on a vu dans l'exercice VIII.13 que les deux racines carrées de Δ sont $r_1 = 2 + 3i, r_2 = -2 - 3i$, donc

$$z_1 = \frac{i + r_1}{2} = \frac{4i + 2}{2} = 2i + 1, z_2 = \frac{i + r_2}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

Exercice VIII.16 Ch2-Exercice42

Démontrer que

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ e^{i0} = 1,\ \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Solution : Ceci se déduit strictement de la proposition du paragraphe Argument d'un nombre complexe. En effet l'argument du produit est la somme des arguments et l'argument de l'inverse est l'opposé de l'argument.

Exercice VIII.17 Ch2-Exercice43

Démontrer les formules d'Euler

Solution : Faites la somme puis la différence de

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta.$$

Exercice VIII.18 Ch2-Exercice44

Montrer que $\sin^5\theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin\theta$.

Solution :

$$\sin^5\theta = \frac{1}{(2i)^5}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^5.$$

Les coefficients du binôme de Newton sont alors $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Il vous reste à finir le calcul ...

Exercice VIII.19 Ch8-Exercice1

Le polynôme $(1+i)X^2 - 3X + i$ peut-il être considéré comme un polynôme sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? Quel est le degré de ce polynôme ?

Solution : Puisque les coefficients sont complexes, le polynôme est défini sur $\mathbb{C}$. Son degré est évidemment 2.

Exercice VIII.20 Ch8-Exercice2

Montrer sur un exemple que la définition du produit de deux polynômes est cohérente avec le produit des fonctions polynomiales que vous connaissez (choisir par exemple $n = 2$ $m = 3$).

Solution :

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ +(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + (a_1b_3 + a_2b_2)x^4 + a_2b_3x^5$$

Remarquons que si l'on utilise la formule générale

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

pour $k = 4$ pa exemple on obtient

$$c_4 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0$$

mais les coefficients b_4, a_3, a_4 sont nuls.

Exercice VIII.21 Ch8-Exercice3

Montrer, par contraposée, que si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Solution : La contraposée de

$$(AB = 0) \Rightarrow (A = 0) \text{ ou } (B = 0)$$

est

$$(A \neq 0) \text{ et } (B \neq 0) \Rightarrow (AB \neq 0).$$

Supposons donc que A et B soient des polynômes non nuls. Alors leur degré est défini et ils s'écrivent

$$A = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ B = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Le coefficient de x^{m+n} dans le produit AB est donné par

$$c_{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} a_i b_{k-i} = a_0b_{n+m} + \ldots + a_nb_m + \ldots + a_{n+m}b_0.$$

Or dans cette somme, seul le terme a_nb_m est non nul. En effet dans les termes qui le précèdent, ce sont les coefficients $(b_j)_{j=n+m,\ldots,m+1}$ qui sont nuls et dans les termes qui le suivent ce sont les termes $(a_i)_{i=n+1,\ldots,n+m}$ qui sont nuls. Le coefficient de x^{n+m} est donc non nul et le polynôme AB est donc non nul.

Exercice VIII.22 Ch8-Exercice4

Soit $A \in \mathbf{K}_n[X]$ et $B \in \mathbf{K}_n[X]$, montrer que $A + B \in \mathbf{K}_n[X]$, que $\alpha A \in \mathbf{K}_n[X]$ ($\alpha \in \mathbf{K}$). Est-ce que $AB \in \mathbf{K}_n[X]$?

Solution : Vous venez de voir que le degré de la somme de deux polynômes A et B est tel que

$$deg(A + B) \leq \max\{deg(A), deg(B)\}.$$

Donc, si $deg(A) \leq n$ et $deg(B) \leq n$, alors

$$\max\{deg(A), deg(B)\} \leq n$$

et donc $A + B \in \mathbf{K}_n[X]$. Si l'un des deux polynômes est nul, par exemple A, alors $A + B = A \in K_n[X]$. Il est évident que $deg(\alpha A) = deg(A)$ si $\alpha \neq 0$ et que $\alpha A = 0$ si $\alpha = 0$. Dans tous les cas on obtient un polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$.
Par contre deg(AB) =deg$A$+deg$B$ entraine seulement que $AB \in K_{2n}[X]$.

Exercice VIII.23 Ch8-Exercice5

Quel est le conjugué de $A = 3X^2 + (2i - 1)X + i$?

Solution :

$$\bar{A} = 3X^2 + (-2i - 1)X - i.$$

Exercice VIII.24 Ch8-Exercice6

Montrer que $X + 2$ est un diviseur de $X^4 - 16$. Donner les autres diviseurs de $X^4 - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

$$X^4 - 16 = (X^2 - 4)(X^2 + 4) = (X - 2)(X + 2)(X^2 + 4).$$

Exercice VIII.25 Ch8-Exercice7

Soit $A = BQ + R$ montrer que si D divise A et B, alors D divise R.

Solution : Si D divise A et B cela signifie qu'il existe deux polynômes S et T tels que

$$A = DS,\ B = DT$$

d'où

$$DS = DTQ + R$$

soit

$$R = D(S - TQ)$$

ce qui montre bien que D divise R.

Exercice VIII.26 Ch8-Exercice8

Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 1$ par $(X^2 + 1)(X - 1)^2$.

Solution : Avant d'effectuer la division développer le deuxième polynôme. Si vous ne faites pas d'erreurs de calcul, vous trouverez

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)(X - 1)^2 + (2X^3 - 2X^2 + 2X).$$

Exercice VIII.27 Ch8-Exercice9

- Diviser suivant les puissances croissantes le polynôme $A = X^4 + 1$ par $(X^2 + 1)(X - 1)^2$ de façon à pouvoir mettre X^2 en facteur dans le reste.
- Diviser suivant les puissances croissantes $Y^2 + Y + 2$ par $Y + 1$ de façon à pouvoir mettre Y^3 en facteur dans le reste.

Solution :

- Tout d'abord
  $$(X^2 + 1)(X - 1)^2 = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$
  Le résultat donne
  $$1 + X^4 = (1 - 2X + 2X^2 - 2X^3 + X^4)(1 + 2X) + X^2(2 - 2X + 4X^2 - 2X^3),$$
  ce qui n'a rien à voir avec la division euclidienne ...
- On a
  $$2 + Y + Y^2 = (2 - Y + 2Y^2)(1 + Y) - 2Y^3.$$

Exercice VIII.28 Ch8-Exercice10

Montrer que dans $\mathbf{K}[X]$ tout polynôme de degré 1 est irréductible. Peut-on trouver un polynôme de degré 2 qui soit irréductible dans $\mathbb{C}[X]$?

Solution : Si un polynôme A de degré 1 admettait un diviseur D qui ne soit ni un polynôme constant, ni βA, on aurait

$$A = DQ$$

et Q ne pourrait pas être un polynôme constant. A serait donc le produit de deux polynômes de degré strictement positif dont le degré serait supérieur ou égal à 2, ce qui est impossible. A est donc irréductible.
Puisque vous savez qu'un polynôme de degré 2 a deux racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues, il n'est donc jamais irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice VIII.29 Ch8-Exercice11

Soient $x_1 = i$, $x_2 = 4 + i$, $x_3 = 3$. Existe-t-il un polynôme de degré 2 qui s'annule en ces trois points ? Un polynôme de degré 3 ? Un polynôme de degré 4 ? Si oui, en donner un.

Solution : Un polynôme de degré 2 a au plus deux racines distinctes. Il ne peut donc pas s'annuler en trois points distincts. Un polynôme de degré 3 à coefficients complexes qui s'annule en ces trois points est

$$A = (X - i)(X - 4 - i)(X - 3).$$

Tout polynôme qui admet A comme diviseur s'annule en (x_1, x_2, x_3). Un polynôme de degré 4 serait par exemple

$$B = X\,A.$$

Exercice VIII.30 Ch8-Exercice12

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$A = X^4 + 3X^2 + 2.$$

Solution : Ce pôlynôme s'écrit

$$A = (X^2 + 2)(X^2 + 1)$$

soit, puisque les deux polynômes ont des racines complexes évidentes

$$A = (X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)(X - i)(X + i).$$

Exercice VIII.31 Ch8-Exercice13

Soient $x_1 = i, x_2 = 4, x_3 = 3$, existe-t-il un polynôme de degré 3 à coefficients réels qui s'annule en ces trois points ? Un polynôme de degré 4 à coefficients réels ? Si oui en donner un.

Solution : Un polynôme à coefficients réels est tel que si un nombre complexe est racine de ce polynôme, son conjugué est aussi racine. Donc si x_1 est racine d'un polynôme A à coefficients réels, $\bar{x}_1$ est racine de A. Le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré qui a pour racines (x_1, x_2, x_3), s'écrit donc

$$A = \alpha(X - x_1)(X - \bar{x}_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. C'est donc un polynôme de degré 4 et non pas 3 ! Bien vérifier que bien que x_1 et $\bar{x}_1$ ne sont pas réels, les coefficients de A sont réels.

Exercice VIII.32 Ch8-Exercice14

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$A = X^5 - X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 2X - 2.$$

Solution : Ce pôlynôme s'écrit

$$A = (X^2 + 2)(X^2 + 1)(X - 1)$$

et puisque les deux premiers polynômes n'ont pas de racines réelles, on ne peut factoriser davantage dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice VIII.33 Ch8-Exercice15

Soit le polynôme

$$A = X^7 + 3X^6 + 5X^5.$$

Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ a-t-on $A^{(k)}(0) = 0$ (ne pas calculer les dérivées) ?

Solution : Puisque

$$A = X^5(X^2 + 3X + 5)$$

la racine $x = 0$ est de multiplicité 5 et donc $A^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, \ldots, 4$ et $A^{(5)}(0) \neq 0$. Puisque le polynôme A est de degré 7, alors $A^{(k)}(x) = 0$ pour $k > 7$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, et donc en particulier pour $x = 0$. Pour ce qui est de $A^{(6)}(0)$ et $A^{(7)}(0)$, vous pouvez utiliser la formule de Taylor on obtient $A^{(6)}(0) = 6! \times 3$, $A^{(7)}(0) = 7!$ et plus précisément $A^{(5)}(0) = 5! \times 5$

Exercice VIII.34 Ch8-Exercice16

La fraction rationnelle

$$F = \frac{X^3 - X^2 + X - 1}{3X^2 - X - 2}$$

est-elle irréductible ? Dans le cas contraire, la simplifier.

Solution : On voit que $x = 1$ est racine du numérateur et du dénominateur. On peut donc factoriser par $x - 1$ le numérateur et le dénominateur :

$$F(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{3x^2 - x - 2} = \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(3x + 2)}$$

ce qui donne, après simplification

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{3x + 2}.$$

Puisque $x = -\dfrac{2}{3}$ n'est pas racine du numérateur, cette fraction est irréductible alors que la fraction de l'énoncé n'était pas irréductible.

Exercice VIII.35 Ch8-Exercice17

Calculer la partie entière de

$$F = \frac{X^4+1}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

Solution : On a calculé dans l'exercice VIII.26 la division euclidienne du numérateur par le dénominateur et on a trouvé

$$\frac{x^4+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^3-2x^2+2x}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

La partie entière est donc le polynôme constant 1.

Exercice VIII.36 Ch8-Exercice18

Montrer la proposition suivante :

Soient deux fractions rationnelles F et $\hat{F}$ alors

$$\mathcal{E}(F+\hat{F}) = \mathcal{E}(F) + \mathcal{E}(\hat{F}).$$

où l'on a noté $\mathcal{E}(F)$ la partie entière de F.

Solution : On a

$$F = E + \frac{P_0}{Q},\ \hat{F} = \hat{E} + \frac{\hat{P}_0}{\hat{Q}}$$

ce qui donne

$$F + \hat{F} = E + \hat{E} + \frac{P_0}{Q} + \frac{\hat{P}_0}{\hat{Q}}.$$

Si l'on réduit au même dénominateur la somme des deux fractions :

$$F + \hat{F} = E + \hat{E} + \frac{P_0\hat{Q} + \hat{P}_0 Q}{Q\hat{Q}}.$$

Or $deg(P_0) < deg(Q)$ et $deg(\hat{P}_0) < deg(\hat{Q})$, d'où

$$deg(P_0\hat{Q} + \hat{P}_0 Q) \leq max\{deg(P_0\hat{Q}), deg(\hat{P}_0 Q\} < deg(Q) + deg(\hat{Q})$$

soit

$$deg(P_0\hat{Q} + \hat{P}_0 Q) < deg(Q\hat{Q}).$$

On a donc la bonne décomposition pour calculer la partie entière de $F + \hat{F}$, ce qui montre la proposition.

Exercice VIII.37 Ch8-Exercice19

Soit la fraction rationnelle
$$F = \frac{X^2 - X + 2}{(X-1)^3 X}$$
Mettre F la sous la forme de la décomposition (VIII.4.2).

Solution : On effectue le changement de variable $y = x - 1$, et on obtient
$$F(x) = \frac{y^2 + y + 2}{y^3(y+1)}.$$
Il reste à effectuer la division suivant les puissances croissantes de $y^2 + y + 2$ par $y + 1$ de façon à pouvoir mettre y^3 en facteur dans le reste, ce qui a été fait dans l'exercice VIII.27. On a obtenu
$$2 + y + y^2 = (2 - y + 2y^2)(1 + y) - 2y^3$$
ce qui donne
$$F(x) = \frac{2 - y + 2y^2}{y^3} - \frac{2}{y+1},$$
soit
$$F(x) = \frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} - \frac{2}{y+1}.$$
On peut alors revenir à x, ce qui donne
$$F(x) = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}.$$

Exercice VIII.38 Ch8-Exercice20

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{2X+3}{X^2 - 5X + 6}.$$
Solution : La décomposition en éléments simples est de la forme :
$$\frac{2x+3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$
On multiplie par $(x-3)$ ce qui donne
$$\frac{2x+3}{x-2} = A + \frac{B(x-3)}{x-2},$$
et on fait $x = 3$
$$9 = A.$$
On fait de même pour B et on trouve $B = -7$.

Exercice VIII.39 Ch8-Exercice21

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2X+1}{(X-2)^3}.$$

Solution : La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

On multiplie par $(x-2)^3$ et on fait $x = 2$ ce qui donne

$$A = 5.$$

Par identification, on obtient

$$5 + B(x-2) + C(x-2)^2 = 2x + 1.$$

Ce qui donne aisément $C = 0$ (coefficient de x^2) puis $B = 2$ (coefficient de x).

Exercice VIII.40 Ch8-Exercice22

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{X^4+1}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

Solution : On a déjà calculé dans le cours la décomposition de cette fraction dans $\mathbb{C}(X)$, en particulier la partie entière a déjà été déterminée. On doit donc maintenant décomposer la fraction F_1 dans $\mathbb{R}(X)$

$$F = 1 + 2F_1,\ F_1 = \frac{X^3 - X^2 + X}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

$$F_1(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}. \tag{1.1}$$

Le calcul de d est inchangé par rapport à celui effectué dans $\mathbb{C}$ dans le cours. On utilise d'autres idées pour calculer a, b, c.

– Multipliant les deux membres de (1.1) par x et faisant tendre x vers l'infini, on a

$$1 = a + c.$$

– Faisant $x = 0$ dans les deux membres de (1.1) on obtient

$$0 = b - c + d.$$

– Réduisant les deux membres de (1.1) au même dénominateur, on obtient l'égalité

$$\frac{x^3 - x^2 + x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x-1)^2 + (x^2+1)(cx - c + d)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

et l'identification des coefficients de x au numérateur donne

$$1 - a - 2b + c.$$

On a ainsi trois équations à trois inconnues et la résolution de ces trois équations donne aisément $b = 0$ puis $c = d = \frac{1}{2}$ et enfin $a = \frac{1}{2}$.
En comparant à ce qui a été trouvé dans $\mathbb{C}(X)$, on peut vérifier que

$$\frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{4}}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}}{x+i}.$$

Exercice VIII.41 Ch8-Exercice23

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2X^3+X^2+3X+1}{(X^2+1)(X^2+2)}.$$

Solution : La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ est de la forme :

$$\frac{2x^3+x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Par identification, on obtient

$$(Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) = 2x^3+x^2+3x+1.$$

On identifie les coefficients des puissances de x, ce qui donne un système d'équations.
Les équations

$$A+C=2,\ 2A+C=3,$$

donnent

$$A=C=1.$$

Les équations

$$B+D=1,\ 2B+D=1,$$

donnent

$$B=0,\ D=1.$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ est de la forme

$$\frac{2x^3+x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+\sqrt{2}i} + \frac{D}{x-\sqrt{2}i}.$$

Les coefficients peuvent s'obtenir en multipliant des deux côtés par l'un des dénominateurs puis à prendre la valeur de x qui annule ce dénominateur. Ainsi, en multipliant par $(x-i)$ puis en posant $x=-i$, on obtient

$$\frac{2i-1-3i+1}{(-2i)(-1+2)} = A$$

soit $A = 1/2$. On peut calculer de la même manière $C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$. En utilisant l'unicité de la décomposition et en prenant le conjugué de la décomposition, on obtient

$$A = \bar{B},\ C = \bar{D}.$$

Exercice VIII.42 Ch8-Exercice24

Intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6}.$$

Solution : On utilise la décomposition en éléments simples de l'exercice VIII.38 et on intègre, ce qui donne :

$$9\ln|x-3| - 7\ln|x-2| + Cte.$$

Exercice VIII.43 Ch8-Exercice25

Intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3}.$$

Solution : On utilise la décomposition en éléments simples de l'exercice VIII.39 et on intègre, ce qui donne :

$$-\frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)^2} - 2\frac{1}{x-2} + Cte.$$

Exercice VIII.44 Ch8-Exercice26

Intégrer la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{2x^3+x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Solution : On utilise la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de l'exercice VIII.41 et on intègre, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + Cte.$$
