MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 3 : Suites numériques

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Janvier2010

Chapitre III

Suites numériques

III.1 Définition, convergence, propriétés

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.1 Définition d'une suite numérique

Exercices :
Exercice A.1.1

Définition III.1.1. *On appelle **suite de nombres réels** une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Cette application sera souvent notée $\boldsymbol{n \mapsto u_n}$ (au lieu de $n \mapsto u(n)$) et on dira que u_n est le **terme général de la suite**, on notera alors $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n\in\mathbb{N}}}$, ou plus simplement $(\boldsymbol{u_n})$, la suite ainsi définie.*

Les trois suites ci-dessous sont définies par la donnée de leur terme général :

$$u_n = n, \qquad u_n = \frac{1}{n},\ (n > 0), \qquad u_n = \frac{n}{n+1}, \ldots.$$

Étant donné un réel a, la suite $u_n = a$, est appelée ***suite constante***.

On peut aussi définir une suite par une relation de récurrence. Ainsi, a et u_0 étant des réels donnés, la suite $u_n = a + u_{n-1}$ est une ***suite arithmétique*** dont le terme général est $u_n = na + u_0$.

Une suite est donc une application particulière. Le point fondamental est que le domaine de définition est $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. D'autre part, l'objectif principal dans l'étude d'une suite n'est pas tant cette application elle-même que son comportement à l'infini. Ceci s'oppose notamment au cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ où l'on s'intéresse aussi à ce qui se passe autour des valeurs finies de la variable.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.2 Convergence d'une suite numérique

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

Définition III.1.2.

1. *On dit que la suite (u_n) **converge** ou qu'elle est **convergente** s'il existe un réel l (appelé **limite**) tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

*On dit que u_n **tend vers** l, et on écrit* $\boldsymbol{l = \lim_{n\to\infty}(u_n)}$.

2. *Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle **diverge** ou qu'elle est **divergente**.*
3. *On dit qu'une suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N)\ \Rightarrow\ (u_n > A).$$

*On dit qu'une suite (u_n) **tend vers** $-\infty$ si :*

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N)\ \Rightarrow\ (u_n < -A).$$

Remarquons que :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ converge vers 0
2. Pour tout ε (aussi petit soit-il), l' intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, contient tous les éléments de la suite sauf un nombre fini de termes, les N premiers.
3. Il résulte immédiatement de cette définition que la ***nature d'une suite*** (sa convergence ou non convergence) ne change pas, si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite, ou si l'on démarre la suite par un indice plus grand que 0.
4. La convergence de la suite (u_n) peut s'écrire entièrement avec des quantificateurs :

   $$\exists\, l \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

   Cette écriture avec uniquement des quantificateurs facilite l'expression de la ***divergence***.
5. On peut montrer que la définition de la convergence donnée plus haut est équivalente à :

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon).$$

Proposition III.1.1. *Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.*

Pour démontrer ce résultat il suffit d'utiliser l'inégalité $|\,|u_n| - |l|\,| \leq |u_n - l|$.

Convergence d'une suite numérique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.3 Exemples de suites et limite

Exercices :
Exercice A.1.4

Exemples :
Exemple B.1.1
Exemple B.1.2
Exemple B.1.3

Donnons quelques exemples :

1. La suite $u_n = -\frac{3n-2}{2n+5}$ a pour limite $l = -\frac{3}{2}$ car

$$|u_n - l| = \left| -\frac{3n-2}{2n+5} + \frac{3}{2} \right| = \frac{19}{4n+10}.$$

Nous voyons alors que pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de choisir l'entier N tel que

$$\frac{19}{4N+10} \leq \varepsilon \qquad \text{soit} \qquad N \geq \frac{19}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}.$$

Alors pour $n > N$ on a :

$$|u_n - l| = \frac{19}{4n+10} < \frac{19}{4N+10} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $u_n \to l$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. Examinons la suite
$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n.$$
On peut écrire
$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \frac{1}{2n},$$
puisque $\sqrt{n^2+1} \geq n$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on prend N entier tel que $N \geq \frac{1}{2\varepsilon}$, alors pour $n > N$ on a :
$$|u_n| = u_n \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} \leq \varepsilon,$$
ce qui montre que $u_n \to 0$.

Vous verrez dans les exemples référencés trois méthodes numériques pour calculer, de manière approchée, l'intégrale d'une fonction dont on ne connaît pas la primitive. Ceci revient à construire des suites dont la vitesse de convergence (notion qualitative ici, définie précisément dans les cours d'analyse numérique) dépend de la méthode considérée.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.4 Unicité de la limite

Exercices :
Exercice A.1.5

Proposition III.1.2. *La limite d'une suite convergente est unique.*

Démonstration - Supposons qu'il existe deux limites distinctes l_1 et l_2. Sans restreindre la généralité, nous pouvons noter l_1 la plus grande des deux, soit $l_1 > l_2$. Posons $\epsilon = (l_1 - l_2)/2$, alors puisque u_n converge vers l_1 et l_2 respectivement :

$$\begin{array}{l} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } (n > N_1) \Rightarrow (|u_n - l_1| < \epsilon), \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } (n > N_2) \Rightarrow (|u_n - l_2| < \epsilon)) \end{array}$$

On obtient alors pour $n > \max(N_1, N_2)$:

$$2\epsilon = l_1 - l_2 = |l_1 - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < 2\epsilon$$

ce qui est absurde.

Lorsque vous étudiez la suite $u_n = (-1)^n$, vous avez envie de dire que pour n pair la suite est constante $u_{2n} = 1$ donc convergente et pour n impair la suite est aussi constante $u_{2n+1} = -1$ donc convergente, ce qui est faux puisque cela donnerait une suite convergente avec deux limites distinctes ! L'erreur de raisonnement est que vous considérez deux sous-suites et non pas la suite dans sa totalité dont les termes oscillent constamment de 1 à -1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.5 Suite majorée ou minorée

Exercices :
Exercice A.1.6

Définition III.1.3. *Une suite (u_n) est dite* ***majorée*** *(resp.* ***minorée****) s'il existe un réel M (resp. m) tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M \text{ (resp. } m \leq u_n).$$

Une suite (u_n) est dite ***bornée****, si elle est à la fois majorée et minorée.*

En reprenant les définitions du chapitre2, on voit que la suite (u_n) est majorée si et seulement si l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble majoré, il en est de même pour minorée ou bornée. On a donc un résultat similaire à celui démontré dans le chapitre 2, à savoir :

Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M$.

D'autre part on remarque que pour qu'une suite soit majorée, il suffit qu'il existe un nombre réel M' tel que $u_n \leq M'$ à partir d'un certain rang N. En effet,

$$M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, M'\}$$

est alors un majorant de la suite complète.

De même une suite est bornée s'il existe un réel M positif, tel que, à partir d'un certain rang N, on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (N \leq n) \ \Rightarrow \ (|u_n| \leq M).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition III.1.3. *Tout suite convergente est bornée.*

Démonstration - Partons de la définition de la convergence et donnons nous un $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) étant convergente, possède une limite l et il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Comme, par ailleurs :

$$(|u_n - l| < \varepsilon) \Leftrightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon),$$

si on définit les nombres M et m par

$$M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, l + \varepsilon), \quad m = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, l - \varepsilon)$$

on vérifie bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; m \leq u_n \leq M.$$

III.1.6 Suite croissante ou décroissante

Exercices :
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

Définition III.1.4. *Une suite (u_n) est dite* ***croissante*** *(resp.* ***décroissante****) si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \text{ (resp. } u_{n+1} \leq u_n).$$

Une suite est dite ***monotone*** *si elle est* ***croissante*** *ou* ***décroissante****.*

Théorème III.1.1. *Toute suite croissante et majorée est convergente. De même, toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Démonstration - Puisque (u_n) est une suite majorée, l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. D'après la propriété de la borne supérieure définie pour tout sous-ensemble non vide borné de $\mathbb{R}$ au chapitre précédent, A admet une borne supérieure L. La caractérisation de la borne supérieure permet de dire que $\forall \varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad L - \varepsilon < u_N \leq L.$$

Mais comme la suite est croissante, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N) \Rightarrow (L - \varepsilon < u_N \leq u_n).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

D'autre part, comme L est un majorant de u_n, nous avons ainsi montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; (n > N) \; \Rightarrow \; (L - \epsilon < u_n \leq L),$$

soit

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists N \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; (n > N \; \Rightarrow \; 0 \leq L - u_n < \epsilon),$$

ce qui montre le résultat.

On démontre de la même manière qu'une suite décroissante et minorée est convergente.

Proposition III.1.4. *Soit (u_n) une suite croissante convergeant vers une limite l, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq l$.*

Démontrer cette proposition en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.7 Somme de suites numériques convergentes

Exercices :
Exercice A.1.10

Définition III.1.5. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels.*

On appelle ***somme*** *de ces deux suites la suite* $(\boldsymbol{s_n})$ *dont le terme général est défini par* $\boldsymbol{s_n = u_n + v_n}$.

On peut aussi multiplier une suite (u_n) par un nombre réel λ, ce qui donne la suite $(\boldsymbol{\lambda u_n})$.

Théorème III.1.2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *deux suites convergentes dont on notera* $\hat{u}$ *et* $\hat{v}$ *les limites respectives. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \hat{u}+\hat{v}, \tag{III.1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda u_n) = \lambda\hat{u}. \tag{III.1.2}$$

Démonstration - La démonstration pour la somme est faite en exercice. Pour le produit par un scalaire, on peut écrire :

Si $\lambda = 0$, la suite (λu_n) est la suite nulle, elle converge bien vers $\lambda\hat{u} = 0$.

On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$.

$$|\lambda u_n - \lambda\hat{u}| = |\lambda||(u_n - \hat{u})|$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La suite (u_n) converge, donc pour tout $\epsilon > 0$ donné,

$$\exists N,\ (n > N) \Rightarrow (|u_n - \hat{u}| < \frac{\epsilon}{|\lambda|})$$

Ce qui permet de conclure.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.8 Comparaison de deux suites

Exercices :
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12

Exemples :
Exemple B.1.4

Théorème III.1.3. *(Théorème de comparaison)*

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente de limite* $\hat{u}$*. On a*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0 \ \Rightarrow\ \hat{u} \geq 0.$$
2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes de limites respectives* $\hat{u}$ *et* $\hat{v}$*. On a*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \ \Rightarrow\ \hat{u} \leq \hat{v}.$$
3. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes ayant la même limite* l *et soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq w_n \leq v_n.$$
Alors la suite (w_n) *est convergente et a pour limite* l*.*
4. *Soit* (v_n) *une suite convergeant vers* 0 *et soit la suite* (u_n) *telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq v_n.$$
Alors la suite (u_n) *tend vers* 0*.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Quelques remarques avant de démontrer ce théorème :

Les points 1 et 2 ne permettent pas de démontrer que des suites convergent, ils permettent seulement, quand on connait la convergence des suites , d'avoir des propriétés sur les limites. Par contre les points 3 et 4 permettent de démontrer que, sous certaines conditions, des suites convergent.

Pour le point 2, même si l'on avait l'inégalité stricte

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n,$$

on n'obtiendrait, à la limite, que l'inégalité large $\hat{u} \leq \hat{v}$.

Cela signifie que l'inégalité stricte devient, à la limite, une inégalité large. En effet, soient les deux suites de terme général $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors on a bien $u_n < v_n$, mais la limite est nulle pour les deux suites.

Démonstration -

1. Nous allons raisonner par contraposée et supposons que $\hat{u} < 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{u} < \hat{u} + \varepsilon < 0$. Or la convergence de (u_n) implique que pour cet ε on a

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n > N) \Rightarrow \hat{u} - \varepsilon < u_n < \hat{u} + \varepsilon.$$

   On obtient donc des indices n pour lesquels $u_n < \hat{u} + \varepsilon < 0$ ce qui est la négation de $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

2. La démonstration découle immédiatement du point précédent. En effet, on peut récrire la proposition à démontrer sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \geq 0 \Rightarrow \hat{v} - \hat{u} \geq 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En posant $w_n = u_n - v_n$ et $\hat{w} = \hat{v} - \hat{u}$, on obtient une suite convergente (somme de deux suites convergentes dont les limites s'ajoutent) à laquelle on peut appliquer la proposition précédente, ce qui donne le résultat.

3. Pour démontrer que la suite (w_n) est convergente, écrivons les convergences des suites (u_n) et (v_n) vers l :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n > N_1) \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n > N_2) \Rightarrow l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon.$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, on pose $N = \max(N_1, N_2)$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n > N) \Rightarrow l - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < l + \varepsilon,$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n > N) \Rightarrow l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite (w_n) est convergente de limite l.

4. A démontrer en exercice.

Corollaire III.1.1. *Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit (u_n) une suite bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.*

Démontrez ce corollaire en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.9 Produit de suites numériques convergentes

Définition III.1.6. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels.*

On appelle ***produit*** *de ces deux suites la suite* (w_n) *dont le terme général est défini par* $w_n = u_n \, . \, v_n$.

On peut remarquer que le produit d'une suite (u_n) par un nombre réel λ, est un cas particulier du produit des suites. En effet, on peut considérer avoir formé ainsi, le produit de la suite (u_n) par la suite constante (v_n), dont tous les termes sont égaux à λ.

Théorème III.1.4. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, deux suites convergentes dont on notera* $\hat{u}$ *et* $\hat{v}$ *les limites respectives. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = \hat{u}\,\hat{v}. \tag{III.1.3}$$

Démonstration - On peut écrire :

$$u_n v_n - \hat{u}\,\hat{v} = (u_n - \hat{u})\, v_n + (v_n - \hat{v})\, \hat{u}.$$

Et donc

$$|u_n v_n - \hat{u}\,\hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}|\,|v_n| + |v_n - \hat{v}|\,|\hat{u}|.$$

Or v_n étant convergente, elle est majorée donc $|v_n| \leq k$, donc

$$|u_n v_n - \hat{u}\,\hat{v}| \leq k|u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}|\,|\hat{u}|.$$

Les suites de terme général $|u_n - \hat{u}|$ et $|v_n - \hat{v}|$ convergent vers 0.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En utilisant les résultats sur la somme et le produit par un scalaire, on en déduit que la suite de terme général $k|u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}|\,|\hat{u}|$ converge vers 0.

Enfin en utilisant les théorèmes de comparaison des suites, on en déduit que la suite $u_n v_n - \hat{u}\,\hat{v}$ converge vers 0. Donc la suite de terme général $u_n v_n$ converge vers $\hat{u}\hat{v}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.10 Somme et produit de suites qui tendent vers l'infini

Exercices :
Exercice A.1.13

Théorème III.1.5. 1. *La somme de deux suites qui tendent vers $+\infty$ (resp $-\infty$) tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$).*

2. *La somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) et d'une suite minorée (resp majorée) tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$).*

Théorème III.1.6. 1. *Le produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.*

2. *Le produit d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite qui tend vers l avec $l > 0$ (resp $l < 0$) tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$).*

La démonstration du premier théorème et de la première partie du deuxième théorème est simple, montrons la deuxième partie.

(u_n) converge vers $l > 0$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{l}{2}$, alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} < u_n)$$

(v_n) tend vers l'infini donc

$$\forall A > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\left(n > N_2 \Rightarrow v_n > \frac{2A}{l}\right)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a donc :

$$\forall A > 0, \exists N = \max(N_1, N_2), \forall n \in \mathbb{N} \left(n > N \Rightarrow u_n v_n > \frac{2A}{l} \times \frac{l}{2} = A \right).$$

Ce qui termine la démonstration.

Bien sûr les deux théorèmes précédents ne permettent pas de conclure quant à la somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite qui tend vers $-\infty$, c'est ce que l'on appelle une indétermination du type $+\infty - \infty$. On ne peut pas conclure non plus dans le cas du produit d'une suite qui tend vers l'infini et d'une suite qui converge vers 0 : c'est une indétermination du type $0 \times \infty$.

III.1.11 Quotient de deux suites

Exercices :
Exercice A.1.14

Définition III.1.7. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels. Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite dont tous les termes sont non nuls, on peut définir le* ***quotient*** *de la suite* (u_n) *par la suite* (v_n) *comme la suite* $\boldsymbol{(d_n)}$ *dont le terme général est défini par* $\boldsymbol{d_n = \frac{u_n}{v_n}}$.

Si la suite (u_n) est telle que $u_n = 1$, pour tout n, alors la suite

$$d_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{v_n},$$

est souvent appelée **suite inverse** de la suite (v_n).

Théorème III.1.7. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, deux suites convergentes dont on notera* $\hat{u}$ *et* $\hat{v}$ *les limites respectives. Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite dont tous les termes sont non nuls et dont la limite* $\hat{v}$ *est non nulle alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\hat{u}}{\hat{v}} \tag{III.1.4}$$

Démonstration - Le principe de la démonstration va être de considérer la suite quotient (u_n/v_n) comme le produit de la suite (u_n) par la suite $(1/v_n)$. Il suffit alors de

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

montrer que cette dernière suite converge vers $1/\hat{v}$ et d'utiliser ensuite le résultat sur le produit de deux suites convergentes.

Montrons donc la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ vers $\left(\dfrac{1}{\hat{v}}\right)$. Cela est équivalent à montrer que $\left(\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{\hat{v}}\right)$ est une suite qui tend vers 0.

Pour cela on calcule $\left|\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{\hat{v}}\right| = \left|\dfrac{\hat{v} - v_n}{v_n \hat{v}}\right|$.

Si on montre que $|v_n|$ est minorée par $m > 0$, on aura alors $\left|\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{\hat{v}}\right| \leq \dfrac{1}{m|\hat{v}|} |\hat{v} - v_n|$ et le théorème de comparaison des suites permet de conclure.

Montrons qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq |v_n|$. Puisque la suite (v_n) est convergente vers $\hat{v} \neq 0$, nous pouvons choisir $\varepsilon = \dfrac{|\hat{v}|}{2}$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \left(n > N \Rightarrow |v_n - \hat{v}| < \frac{|\hat{v}|}{2} \Rightarrow ||v_n| - |\hat{v}|| < \frac{|\hat{v}|}{2} \Rightarrow \frac{|\hat{v}|}{2} < |v_n|\right)$$

On peut alors poser $m = \min\left(|v_0|, ..., |v_{N-1}|, \dfrac{|\hat{v}|}{2}\right)$, on aura bien $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq |v_n|$

Théorème III.1.8. *Soit* (u_n) *une suite qui tend vers l'infini, on suppose que*

$\forall n, u_n \neq 0$, *alors* $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ *tend vers* 0.

Théorème III.1.9. *Soit* (u_n) *une suite qui tend vers* 0, *on suppose que* $\forall n, u_n > 0$, *alors* $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ *tend vers* $+\infty$.

Ces deux théorèmes se démontrent très facilement.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Suites particulières

III.2.1 Suites adjacentes

Exercices :
Exercice A.1.15

Exemples :
Exemple B.1.5

Théorème III.2.1. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres réels, telles que :*

1. *la suite* (u_n) *est croissante,*
2. *la suite* (v_n) *est décroissante,*
3. *la suite* $(v_n - u_n)$ *tend vers 0.*

Alors les suites (u_n) *et* (v_n) *convergent toutes deux vers la même limite.*

Démonstration - La suite (v_n) est décroissante par hypothèse. Comme la suite (u_n) est croissante, la suite $(-u_n)$ est décroissante, de sorte que la suite $(v_n - u_n)$ est aussi décroissante. Comme en outre, cette dernière suite converge vers 0 par hypothèse, nous en déduisons que tous ses termes $v_n - u_n$ sont positifs ou nuls, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

nous en déduisons aussitôt que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par v_0, tandis que la suite (v_n) est minorée par u_0. La suite (u_n), étant croissante et majorée, est convergente et soit l sa limite. De même la

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

suite (v_n) décroissante et minorée est convergente et soit L sa limite. Il reste à démontrer que $l = L$.

Sachant que les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers l et L, nous en déduisons que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers $L - l$. Sachant par ailleurs que cette suite converge vers 0, nous arrivons à $L - l = 0$, du fait de l'unicité de la limite d'une suite.

Le théorème précédent, très utilisé, nous conduit à la définition suivante :

Définition III.2.1. *Deux suites (u_n) et (v_n) possédant les propriétés (1), (2) et (3) du théorème précédent, sont dites **adjacentes**.*

Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles vérifient :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_m \leq v_n.$$

Autrement dit chaque terme de la suite (u_n) est inférieur à tous les termes de la suite (v_n). Ceci se vérifie en écrivant que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (m \leq n) \ \Rightarrow\ (u_m \leq u_n \leq v_n \leq v_m).$$

III.2.2 Suites de Cauchy

Exercices :	Exemples :	Documents :
Exercice A.1.16	Exemple B.1.6	Document C.1.1
Exercice A.1.17	Exemple B.1.7	Document C.1.2
		Document C.1.3

Lorsque l'on ne connaît pas la limite éventuelle d'une suite, pour démontrer qu'elle est convergente, on peut montrer qu'elle est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) ou utiliser les suites de Cauchy.

Définition III.2.2. *La suite (u_n) est une* ***suite de Cauchy*** *si :*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{(m \geq N)\ \textbf{et}\ (n \geq N)\} \ \Rightarrow\ (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{array}\right.$$

On montrera en exercice que cela est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \ \Rightarrow\ (|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon). \end{array}\right.$$

Que signifie cette propriété ? Elle signifie que, aussi petit que soit ε, à partir d'un certain rang tous les éléments de la suite se trouvent dans un intervalle de longueur ε.

Proposition III.2.1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Cela résulte directement de l'inégalité :

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m|.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $(n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2})$ et donc pour $n,\, m \geq N$, on a :

$$|u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cette proposition admet une réciproque, que nous démontrons dans le deuxième document référencé. Finalement, nous avons le théorème suivant :

Théorème III.2.2. *Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Le résultat précédent est utile aussi bien pour montrer qu'une suite est convergente que pour démontrer qu'une suite diverge.

Ainsi, soit la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n},\ n \geq 1. \end{cases}$$

On a donc :

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1 + \frac{1}{2},\ u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$$

Montrons que cette suite n'est pas une suite de Cauchy. Pour cela on considère

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-2} + \ldots + \frac{1}{n+1}.$$

Comme chacun des n termes du membre de droite de l'égalité précédente est minoré par $\frac{1}{2n}$ on peut écrire :

$$u_{2n} - u_n \geq n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Il suffit alors de prendre $\varepsilon < \frac{1}{2}$ pour voir que la condition (C.1.3) est contredite, c'est-à-dire

$$\exists \epsilon = \frac{1}{4},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists m = 2N,\ \exists n = N \text{ tels que } |u_m - u_n| > \epsilon.$$

III.2.3 Suites récurrentes

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19
Exercice A.1.20

Exemples :
Exemple B.1.8

Documents :
Document C.1.4

On peut définir une suite (u_n) :

– soit, en donnant une formule explicite exprimant u_n en fonction de n, par exemple $u_n = 1 + \frac{1}{n}$,
– soit en exprimant u_n en fonction de n et de certains termes précédents, par exemple

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Un cas particulier de cette deuxième méthode de construction de suites est le suivant : f étant une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même supposée connue, on pose :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné}, \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0, \end{cases}$$

On dit alors que l'on a une ***suite récurrente d'ordre 1*** (ordre 1 signifiant que seul le terme u_n intervient explicitement dans la définition de u_{n+1}).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition III.2.2. *Si la fonction f vérifie la condition suivante, dite **condition de Lipschitz** :*

$$(L) \qquad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|,$$

si de plus $0 < K < 1$, et s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = f(l)$, alors la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

Démonstration - Puisque $l = f(l)$, et que f vérifie une condition de Lipschitz on a

$$|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leq K|u_{n-1} - l|.$$

En itérant, on obtient

$$0 \leq |u_n - l| \leq K^n |u_0 - l|.$$

Vous montrerez en exercice que K^n est une suite qui converge vers 0. En utilisant le troisième point du théorème III.1.3 sur les comparaisons de suites on en déduit que la suite $(|u_n - l|)$ converge vers 0. D'où la suite $(u_n - l)$ converge vers 0 et la suite (u_n) converge vers l.

Il n'est pas nécessaire de connaître la limite l pour montrer que la suite récurrente est convergente, voir le document C.1.4.

III.3 Notions élémentaires sur les séries

III.3.1 Définition d'une série

Nous avons déjà vu des expressions de la forme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

associées à la suite (u_n). À partir d'une suite on peut donc constituer une nouvelle suite obtenue en sommant tous les termes jusqu'à l'ordre n.

Définition III.3.1. *Étant donnée une suite (u_n), on appelle **série de terme général u_n** la suite (S_n) dont le terme général est la somme partielle*

$$\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.}$$

Voici quelques exemples de séries :

– Série ***géométrique*** :

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n.$$

– Série ***harmonique*** :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

– Série de ***Riemann*** :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3.2 Convergence d'une série

Exercices :	Documents :	Exemples :
Exercice A.1.21	Document C.1.5	Exemple B.1.9
	Document C.1.6	

Définition III.3.2. *On dit que la série de terme général u_n est* ***convergente*** *(resp.* ***divergente****) si la suite (S_n) constituée des sommes partielles est une suite convergente (resp. divergente). Si on note :*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

alors on dit que S est la ***somme de la série*** *et on écrit*

$$\boldsymbol{S = \sum_{i=0}^{\infty} u_i.}$$

Attention, bien que les expressions de S_n et S se ressemblent, elles ne sont pas du tout de même nature $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est une somme finie de $(n+1)$ termes, alors que $S = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$ par définition est une limite (la limite de la suite S_n).

La nature d'une série (c'est-à-dire sa convergence ou divergence) est, comme celle des suites, inchangée si l'on modifie un nombre fini de ses termes. Mais sa somme (quand elle est convergente) sera changée. Il est donc important, dans le calcul de la somme d'une série, de préciser le domaine de variation de l'indice n.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soit la série géométrique, le premier document référencé montre que, pour $r \neq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R}, \quad S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Ceci montre que la série est convergente si $|r| < 1$ et que dans ce cas on a

$$\forall r \in]-1, +1[, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Par contre elle diverge pour toutes les autres valeurs de r.

Comme exemple de suites de Cauchy (Exemple B.1.9), nous avons montré que la suite

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

est convergente. Il s'agit de la série de Riemann. On montre, mais cette démonstration sort du cadre de ce cours, que sa somme est égale à $\pi^2/6$.

Proposition III.3.1. *Une condition* ***nécessaire*** *de convergence d'une série est que son terme général tende vers 0.*

Démonstration - Si la suite (S_n) tend vers une limite S, il est clair qu'il en est de même de la suite (S_{n+1}), donc la suite $(S_{n+1} - S_n) = (u_n)$ tend vers 0.

Dans le deuxième document référencé, on définit les séries absolument convergentes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre III

Exercice A.1.1 Ch3-Exercice1

Soient α et u_0 deux réels donnés. Soit alors (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = \alpha u_{n-1}$. Donner le terme général de la suite en fonction de n, α et u_0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch3-Exercice2

Soit une suite u_n et soit la suite $v_n = u_n - l$, où l est un réel donné. Montrer, en utilisant la définition de la convergence que

$$((u_n) \text{ tend vers } l) \Leftrightarrow ((v_n) \text{ tend vers } 0)$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch3-Exercice3

Quelle est la limite d'une suite constante ? (On fera la démonstration en utilisant la définition).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch3-Exercice4

Utiliser la définition de la convergence pour montrer que la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n > 0$, tend vers 0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch3-Exercice5

Écrire, à l'aide de quantificateurs, la définition de la divergence d'une suite u_n. Montrer alors que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch3-Exercice6

En utilisant le lien entre les suites convergentes et les suites bornées, montrer qu'une suite qui tend vers l'infini est divergente.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch3-Exercice7

Montrer que la suite $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est croissante et majorée. Est-elle convergente ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch3-Exercice8

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites croissantes. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est aussi croissante.
2. Soit (u_n) une suite croissante. Montrer que la suite $(-u_n)$ est décroissante.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch3-Exercice9

Soit (u_n) une suite croissante. Montrer que si (u_n) converge vers une limite l, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq l$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 ChC3-Exercice10

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites convergentes dont on notera $\hat{u}$ et $\hat{v}$ les limites respectives. En utilisant la définition de la convergence, montrer que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\hat{u} + \hat{v}$ (on pensera à utiliser l'inégalité triangulaire : $|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}|$).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch3-Exercice11

Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit la suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq v_n$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch3-Exercice12

Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit (u_n) une suite bornée, montrer que la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch3-Exercice13

1. Donner des exemples de suites (u_n) et (v_n) qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ telles que :
   (a) $(u_n + v_n)$ tende vers $-\infty$.
   (b) $(u_n + v_n)$ tende vers $+\infty$.
   (c) $(u_n + v_n)$ converge vers l.
2. Donner des exemples de suites (u_n) et (v_n) qui tendent respectivement vers $+\infty$ et 0 telles que :
   (a) $(u_n v_n)$ tende vers $+\infty$.
   (b) $(u_n v_n)$ converge vers 0.
   (c) $(u_n v_n)$ converge vers $l \neq 0$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch3-Exercice14

Soit (u_n) une suite convergente de limite l strictement positive.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout n supérieur à N, on ait $u_n > 0$.
2. Si on définit la suite (v_n) par $v_n = 1/u_n$, pour n supérieur au N précédent, les N premiers termes de la suite étant quelconques, quelle est la limite de la suite (v_n) ?
3. Peut-on faire le même raisonnement si $l < 0$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch3-Exercice15

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9. On associe à $(a_n)_{n\geq 1}$, les suites de nombres rationnels suivantes :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \qquad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

Montrer que ces deux suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

[Elles définissent un réel x, leur limite commune, dont α_n et β_n sont les ***approximations décimales à*** 10^{-n} ***près***, respectivement par défaut et par excès.]

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch3-Exercice16

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \{(m \geq N)\ \textbf{et}\ (n \geq N)\} \quad \Rightarrow \quad (|u_m - u_n| \leq \varepsilon),$$

est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \{(n \geq N)\ \textbf{et}\ (p \in \mathbb{N})\} \quad \Rightarrow \quad (|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon).$$

(Une des deux implications est claire, pour l'autre il faut voir que si deux entiers sont quelconques, l'un est nécessairement supérieur ou égal à l'autre).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch3-Exercice17

Montrer, en utilisant les suites de Cauchy, que la suite (u_n), définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch3-Exercice18

Montrer que la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = K u_n, \ n \geq 0. \end{cases}$$

où $0 \leq K < 1$ est une suite convergente. Puis montrer que sa limite est nulle.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch3-Exercice19

Étudier, selon le nombre réel α, la suite récurrente *linéaire* d'ordre 1 définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_{n+1} = \alpha u_n, \; n \geq 0. \end{cases}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch3-Exercice20

Soit f une fonction réelle telle que

$$(L) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \; |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|,$$

où $0 < K < 1$ est donné. Montrer que si l'équation $u = f(u)$ a une solution, celle-ci est unique.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.21 Ch3-Exercice21

Soit la série (u_n), définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = \dfrac{1}{n}, & \text{pour } (n > 0). \end{cases}$$

Notons (S_n), la suite des sommes partielles associées.

1. Montrer que $S_n = S_{n-1} + 1/n$, $S_0 = 0$.
2. Nous avons déjà étudié la convergence de cette suite. Vous souvenez-vous du résultat ?
3. Est-ce que la suite (u_n) tend vers 0 ? Ce résultat permet-il de conclure que la série (u_n) converge ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD3-Exercice1

Etudier la convergence des suites suivantes et donner leur limite quand elle existe.

$$i)\quad u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n},\ n \in \mathbb{N}^*,\qquad ii)\quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N},$$

$$iii)\quad u_n = \ln(n+1) - \ln(n),\ n \in \mathbb{N},\qquad iv)\quad u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a < b,$$

$$v)\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} k,\ n \in \mathbb{N},\qquad vi)\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{5^k},\ n \in \mathbb{N},$$

$$vii)\quad u_n = \frac{n!}{n^n},\ n \in \mathbb{N},\qquad viii)\quad u_n = \frac{2^n}{n!},\ n \in \mathbb{N},$$

$$ix)\quad u_n = \frac{2^n}{n^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD3-Exercice2

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, & \\ u_1 = 0, & \\ u_n = 1 - \frac{1}{n}, & \text{lorsque } n \text{ est pair, strictement positif,} \\ u_n = 1 - \frac{1}{n-2}, & \text{lorsque } n \text{ est impair, strictement plus grand que 1,} \end{cases}$$

1. Calculer les 6 premiers termes.
2. Calculer $\sup\{u_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ (faire une démonstration rigoureuse).
3. Donner la limite de la suite (u_n) (faire une démonstration rigoureuse).
4. La suite est-elle croissante à partir d'un certain rang ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD3-Exercice3

1. On définit la suite de terme général
$$u_0 > 1,\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1},\ n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Montrer que u_n est défini pour tout entier n.
   (b) On note $f(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$. Etudier les variations de f, le signe de $f(x) - x$ et montrer que f admet un point fixe α appartenant à $]1, +\infty[$.
   (c) Etudier graphiquement la suite (u_n) ($u_0 < \alpha$, $u_0 > \alpha$).
   (d) Démontrer directement les résultats déduits en (c).
2. Mêmes questions pour la suite
$$u_0 \geq -9,\ u_{n+1} = \sqrt{9 + u_n},\ n \in \mathbb{N},$$
en adaptant la définition de la fonction f et l'intervalle sur lequel vous l'étudiez.
3. Mêmes questions pour la suite
$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1
Question 1c Aide 1
Question 1d Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD3-Exercice4

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$, où $a\in\mathbb{R}_*^+$.

1. Etudier les variations de la fonction f. En déduire que $\sqrt{a}<f(x)<x$ si $x>\sqrt{a}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_1>\sqrt{a},\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{a}{u_n}\right)$. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.
3. On pose $\varepsilon_n=u_n-\sqrt{a}$. Montrer que $\varepsilon_{n+1}=\dfrac{\varepsilon_n^2}{2u_n}\leq\dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$.
4. On pose $b=2\sqrt{a}$. Montrer que $\varepsilon_{n+1}\leq b\left(\dfrac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}$.
5. **Application numérique** On prend $a=3,\ u_1=2$, vérifier que $\dfrac{1}{10}>\dfrac{2-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$ et majorer ε_5. Conclure.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1 Aide 2
Question 5 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD3-Exercice5

1. Soit la suite de terme général u_n défini par
$$u_0 \text{ “judicieusement choisi”}, \; u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}, \; n \in \mathbb{N}.$$
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$.
   (a) Montrer que f admet 2 points fixes que l'on explicitera.
   (b) On note α et β les points fixes calculés en (a).
      i. Montrer qu'il existe un réel λ, ne dépendant ni de n ni de u_0, tel que l'on ait
      $$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$
      ii. En déduire une relation entre u_n et n.
      iii. Quelle condition imposer alors sur u_0 pour que la suite (u_n) soit définie pour tout entier naturel n ?
      iv. On suppose que u_0 vérifie la condition trouvée en iii. Montrer alors que la suite (u_n) converge vers une limite l que l'on explicitera.
2. Mêmes questions avec
$$u_0 \text{ “judicieusement choisi”}, \; u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. Mêmes questions avec

$$u_0 \text{ “judicieusement choisi”}, \; u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{u_n + 5}, \; n \in \mathbb{N}.$$

4. Mêmes questions avec

$$u_0 \text{ “judicieusement choisi”}, \; u_{n+1} = \frac{4 + 4u_n}{8 - u_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dans ce cas il n'y a qu'un point fixe α. Alors la suite à considérer est : $\dfrac{1}{u_{n+1} - \alpha}$.

Exercice A.2.5
TD3-Exercice5

Question 1a Aide 1
Question 1(b)i Aide 1 Aide 2
Question 1(b)ii Aide 1 Aide 2
Question 1(b)iii Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1(b)iv Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD3-Exercice6

1. On considère les suites de termes généraux définis pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $u_n = v_n + \frac{1}{nn!}$.
   Montrer que ces 2 suites sont adjacentes. On peut montrer, par l'absurde, que leur limite commune ne peut pas être un nombre rationnel (facultatif).
2. Montrer que les suites de termes généraux u_n et v_n définis par
   $$u_0 > 0,\ v_0 > 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n},\ n \in \mathbb{N}$$
   sont adjacentes. Trouver leur limite en étudiant $w_n = u_n v_n$.
3. Montrer que les suites de termes généraux u_n et v_n définis par
   $$u_0 > 0,\ v_0 > 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ n \in \mathbb{N}$$
   sont adjacentes. [Leur limite, que l'on ne demande pas de calculer, est une fonction de u_0 et v_0 appelée “moyenne géométrico-arithmétique”].

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD3-Exercice7

Soit $a \in [0,1]$, on considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[, \; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2), \; n \in \mathbb{N}.$$

1. On note $f(x) = x + \frac{1}{2}(a - x^2)$. Etudier les variations de f, le signe de $f(x) - x$ et montrer que f admet deux points fixes.
2. Etudier graphiquement la suite (u_n).
3. Démontrer les résultats pressentis graphiquement.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD3-Exercice8

1. Chercher touts les suites géométriques de la forme q^n vérifiant la relation

$$3u_n = 10u_{n-1} - 3u_{n-2},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

2. Montrer que $C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ est une solution de cette équation (où q_1^n et q_2^n sont les deux suites géométriques de la première question). On admettra que c'est la solution générale de l'équation.
3. Exprimer C_1 et C_2 en fonction de u_0 et u_1. Discuter alors selon le choix de u_0 et de u_1 la convergence de telles suites.

Question 1	Aide 1	Aide 2
Question 2	Aide 1	Aide 2
Question 3	Aide 1	Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD3-Exercice9

La suite de terme général $u_n = \frac{|\sin(1)|}{2} + \frac{|\sin(2)|}{2^2} + \ldots + \frac{|\sin(n)|}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, est-elle convergente ? (Etudier la convergence de cette suite permet d'étudier la convergence de la série de terme général $\frac{\sin(n)}{2^n}$. En effet on vient de montrer que cette série est absolument convergente et donc convergente comme il l'est dit dans le document C.1.6.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre III

Exemple B.1.1 Méthode des rectangles

Nous voulons calculer une valeur approchée de l'intégrale $w = \int_0^1 e^{x^2}\,dx$ par la ***méthode des rectangles***. Notons f la fonction dont nous désirons calculer l'intégrale sur $(0,1)$. Définissons, pour $n \geq 1$, $h = 1/n$ et, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_k = k\,h$. Construisons enfin la somme :

$$u_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Nous obtenons ainsi une suite :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_2 &= 1.14201, \\ u_3 &= 1.22571, \\ u_4 &= 1.27589, \\ u_5 &= 1.30882, \ldots, \end{aligned}$$

qui converge lentement vers la valeur 'exacte' de w, soit 1. 462 651 7 (valeur par défaut à 10^{-8} près). Nous obtenons notamment :

$$\begin{aligned} u_{100} &= 1.4541056, \\ u_{1000} &= 1.4617931, \\ u_{10000} &= 1.4625658, \\ u_{100000} &= 1.462642. \end{aligned}$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Méthode des trapèzes

Nous voulons calculer une valeur approchée de l'intégrale $w = \int_0^1 e^{x^2}\,dx$ par la ***méthode des trapèzes***. Elle consiste à construire la somme :

$$v_n = h\left[\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2}f(1)\right].$$

L'application de cette méthode donne :

$$\begin{aligned}
&v_1 = 1.8591409\\
&v_2 = 1.5715832\\
&v_3 = 1.5120945\\
&v_4 = 1.4906789\\
&v_5 = 1.4806546\\
&\dots\\
&v_{10} = 1.4671747\\
&v_{100} = 1.4626970\\
&v_{1000} = 1.4626522\\
&v_{10000} = 1.4626518\\
&v_{100000} = 1.4626517.
\end{aligned}$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3 Approximation par une série

Nous voulons toujours calculer une valeur approchée de l'intégrale $w = \int_0^1 e^{x^2}\,dx$. Nous verrons plus tard dans le cours qu'il est possible d'approcher la fonction e^{x^2} par un polynôme de la forme suivante :

$$P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

l'approximation étant d'autant meilleure que n est grand. Il est donc naturel de songer à approcher l'intégrale sur $[0, 1]$ de e^{x^2} par :

$$w_n = \int_0^1 P_n(x)\,dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\,(2!)} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\,n!}. \tag{B.1.1}$$

On démontre effectivement que la suite (w_n) converge vers cette intégrale et le calcul numérique de w_n donne :

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1.3333333\\
w_2 &= 1.4333333\\
w_3 &= 1.4571429\\
w_4 &= 1.4617725\\
w_5 &= 1.4625301\\
w_6 &= 1.4626369\\
w_7 &= 1.4626501\\
w_8 &= 1.4626516\\
w_9 &= 1.4626517\ldots
\end{aligned}$$

Cet exemple montre bien que toutes les méthodes numériques n'ont pas la même efficacité et qu'une formule telle que (B.1.1) se révèle très intéressante du point de vue numérique.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.4 Calcul de la limite par comparaison

Nous allons nous intéresser ici à l'étude de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \quad u_n = n^{1/n}.$$

Tout d'abord, rappelons que la fonction puissance a^x, où a est un réel positif, est définie par $a^x = e^{x \ln a}$. Il vient donc ici :

$$u_n = e^{\frac{\ln n}{n}}.$$

Comme le quotient $(\ln n)/n$ est positif, dès que $n \geq 1$, on arrive à $u_n \geq 1$. Nous reviendrons sur la définition et les propriétés de la fonction puissance au chapitre suivant.

Les résultats sur la comparaison des suites, nous permettent maintenant d'affirmer que la limite $\hat{u}$ de la suite (u_n), vérifie, si elle existe, $\hat{u} \geq 1$.

Montrons que $\hat{u} = 1$. Posons $v_n = u_n - 1$, nous avons alors :

$$0 \leq v_n = n^{1/n} - 1.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} n &= (u_n)^n = (1 + v_n)^n \\ &= 1 + C_n^1 v_n + C_n^2 (v_n)^2 + \cdots + C_n^{n-1} (v_n)^{n-1} + (v_n)^n > C_n^2 (v_n)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (v_n)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(v_n)^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et donc, puisque la suite du membre de droite tend vers 0,

$$(v_n)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et donc :

$$v_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'où

$$n^{1/n} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

La vérification de l'implication :

$$(v_n^2 \rightarrow 0) \Rightarrow (v_n \rightarrow 0),$$

est à faire en exercice.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.5 Algorithme de dichotomie, suites adjacentes

Pour calculer le nombre réel $\sqrt{a}$ $(a > 0)$, on peut utiliser une ***méthode de dichotomie*** appliquée à la recherche de la racine positive de l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^2 - a$. Pour cela on part de deux valeurs u_0 et v_0, $u_0 < v_0$, donnant des valeurs de signes différents à $f(x)$, par exemple :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = a + 1. \quad \text{(Pourquoi choisit-on } a+1 \text{ ?)}$$

On obtient alors $f(u_0) = -a < 0$ et $f(v_0) = (a+1)^2 - a = a^2 + a + 1 > 0$. Ces deux valeurs constituent donc un ***encadrement initial*** de la racine. Évidemment, plus cet encadrement est précis plus la méthode donnera rapidement un résultat précis. On suppose que l'on a défini u_n et v_n, puis l'on pose :

$$w = \frac{u_n + v_n}{2},$$

alors on définit :

$$u_{n+1} = \begin{cases} w, & \text{si } f(w) < 0, \\ u_n, & \text{sinon,} \end{cases} \qquad v_{n+1} = \begin{cases} w, & \text{si } f(w) \geq 0, \\ v_n, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple avec $a = 2$:

$$\begin{array}{ll} u_0 = 0 & v_0 = 3 \\ u_1 = 0 & v_1 = 1.5 \\ u_2 = 0.75 & v_2 = 1.5 \\ u_3 = 1.125 & v_3 = 1.5 \\ u_4 = 1.3125 & v_4 = 1.5 \\ u_5 = 1.40625 & v_5 = 1.5 \\ u_6 = 1.40625 & v_6 = 1.453125 \\ u_7 = 1.40625 & v_7 = 1.429687\ldots \\ u_8 = 1.40625 & v_8 = 1.417968\ldots \\ u_9 = 1.41210\ldots & v_9 = 1.417968\ldots \end{array}$$

On construit ainsi deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes. On peut remarquer que l'intervalle d'incertitude est de la forme $\delta\, 2^{-n}$, où $\delta = v_0 - u_0$ est l'intervalle d'incertitude initial. Ainsi, si l'on veut diviser l'incertitude initiale par 10^{-k} il faut de l'ordre de $k\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 3.3k$ itérations.

retour au cours

Exemple B.1.5
Algorithme de dichotomie, suites adjacentes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.6 Exemple de suite de Cauchy

Considérons la suite (u_n) définie par récurrence ci-dessous :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n^2}, \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Nous avons ainsi :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{4}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \cdots$$

Montrons, par simple utilisation du critère de Cauchy, que cette suite est convergente (le calcul de la limite $\pi^2/6$, sortant du cadre de ce cours). En effet, pour $p \geq 1$, nous avons :

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

et grâce à l'inégalité :

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

nous pouvons en déduire :

$$u_{n+p} - u_n \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p},$$

d'où la majoration :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit un entier $N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, alors pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq N$ nous avons :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite est une suite de Cauchy.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.7 Divergence de la série harmonique

Nous avons montré dans le paragraphe Cauchy (suites de) que la suite définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas une suite de Cauchy et par conséquent qu'elle n'est pas convergente. Nous allons démontrer à nouveau cette non convergence en comparant S_n à $\ln n$. Cette étude va non seulement redonner la non convergence de la série harmonique, mais elle va aussi donner un minorant de S_n.

Soit donc la fonction $\ln x$ définie sur $]0, +\infty[$. Nous pouvons écrire :

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n.$$

Nous allons maintenant calculer une approximation de cette intégrale par la **méthode des rectangles**. Il s'agit d'une méthode de calcul approchée d'intégrales. Ici nous allons calculer une approximation de l'aire sous-tendue par la courbe $y = 1/x$ entre les points d'abscisse $x = 1$ et $x = n$.

Nous allons remplacer cette aire par la somme des aires des rectangles de largeur 1, de hauteur 1, $1/2$,. . .,$1/(n-1)$, construits entre les points 1 et 2, 2 et 3,. . .,$n-1$ et n de l'axe des x respectivement (voir la figure B.1.1). La somme des aires de ces rectangles est égale à S_{n-1} et nous avons donc :

$$\ln n \leq S_{n-1}.$$

retour au cours

Exemple B.1.7
Divergence de la série harmonique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

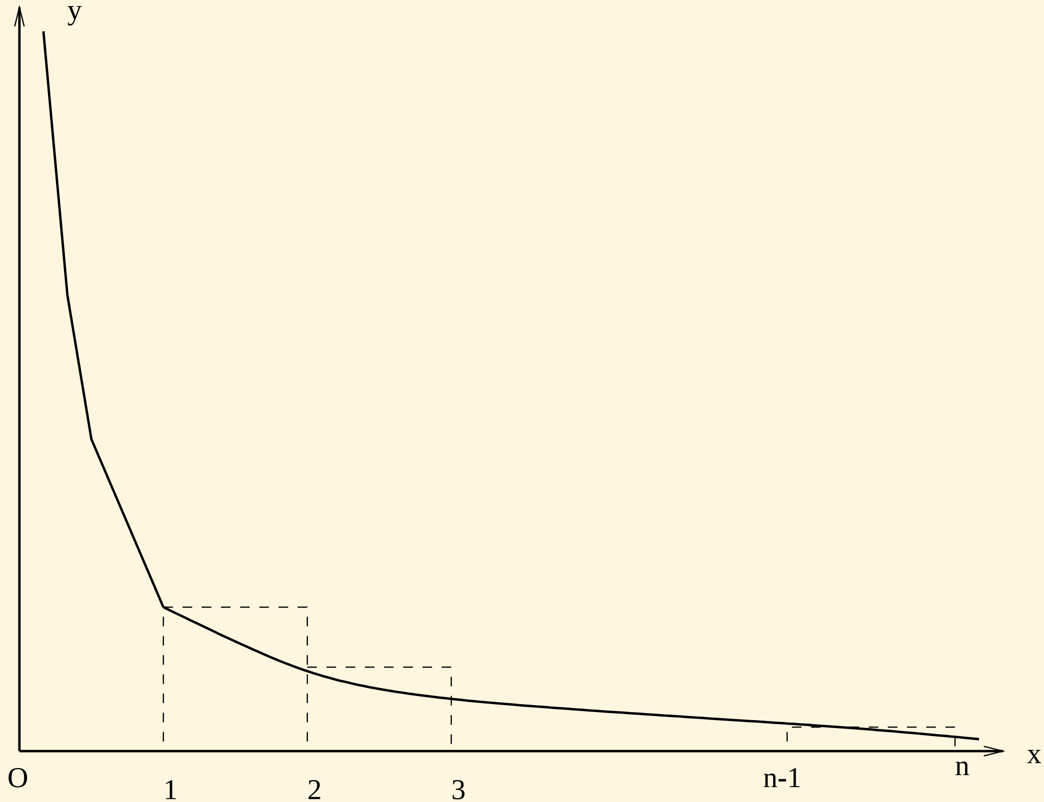

FIG. B.1.1 – Minoration de la somme de la série harmonique

Exemple B.1.7
Divergence de la série harmonique

Exemple B.1.8 Exemple de suite récurrente

Soit a un nombre strictement positif, considérons la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(u_n + \dfrac{a}{u_n}), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\{x > 0\}$ par $f(x) = (x + a/x)/2$ et nous avons alors :

– pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$. En effet, de la définition de la suite, nous déduisons :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\,(u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}) = \frac{1}{2\,u_n}\,(u_n - \sqrt{a})^2 \geq 0,$$

– sur $\{x \geq \sqrt{a}\}$, la fonction f vérifie la condition (L) avec $K = 1/2$. En effet, comme

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2}\,(x - y)\,(1 - \frac{a}{xy}),$$

nous voyons que si x et y sont supérieurs ou égaux à $\sqrt{a}$, nous avons $0 \leq 1 - \frac{a}{xy} < 1$ et par suite $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x - y|$.

D'où la convergence de la suite. En utilisant l'unicité de la limite d'une suite convergente et en passant à la limite dans l'équation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,(u_n + \frac{a}{u_n})$, nous montrons alors que cette limite est égale à $\sqrt{a}$ (et non à $-\sqrt{a}$, puisque, quel que soit n, u_n est strictement positif.

Ajoutons que l'un des algorithmes les plus efficaces (i.e. simples et rapidement convergents) pour calculer $\sqrt{a}$ consiste justement à calculer cette suite.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cet exemple fournit en même temps un exemple de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, non convergente dans $\mathbb{Q}$: il suffit de prendre par exemple $a = 2$, et $u_0 = 1$. On voit sans peine que tous les termes de la suite sont rationnels. Elle est de Cauchy car elle converge dans $\mathbb{R}$, mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ car si cette convergence a lieu, comme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, c'est aussi une convergence dans $\mathbb{R}$, donc la limite serait $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.9 Convergence de la série de Riemann

Nous avons montré dans l'exemple B.1.6 que la suite définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

est une suite de Cauchy et par conséquent qu'elle est convergente. Nous allons démontrer à nouveau cette convergence en comparant S_n à $2 - 1/n$. Cette étude va non seulement redonner la convergence de la série de Riemann, mais elle va aussi donner un majorant de S_n.

Soit donc la fonction $1/x$ définie sur $]0, +\infty[$. Nous pouvons écrire :

$$\int_1^n \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Utilisons à nouveau la méthode des rectangles mais de manière cette fois-ci à minorer l'aire sous-tendue par la courbe $y = 1/x^2$. Pour ce faire, nous utiliserons les rectangles de largeur 1 construits entre les points 1 et 2, 2 et 3,. . .,$n-1$ et n de l'axe des x respectivement (voir la figureB.1.2).

Cette fois-ci cependant nous les prendrons de hauteur $1/2^2$, $1/3^2$,. . .,$1/n^2$ respectivement. Nous obtenons ainsi :

$$S_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ceci montre que la suite (S_n) est majorée par 2. Comme elle est par ailleurs clairement croissante, il en résulte bien qu'elle est convergente.

Rappelons nous que la limite de cette série est $\pi^2/6$ (démonstration sortant du cadre de ce cours). On vérifie bien que cette limite est inférieure à 2.

retour au cours

Exemple B.1.9
Convergence de la série de Riemann

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

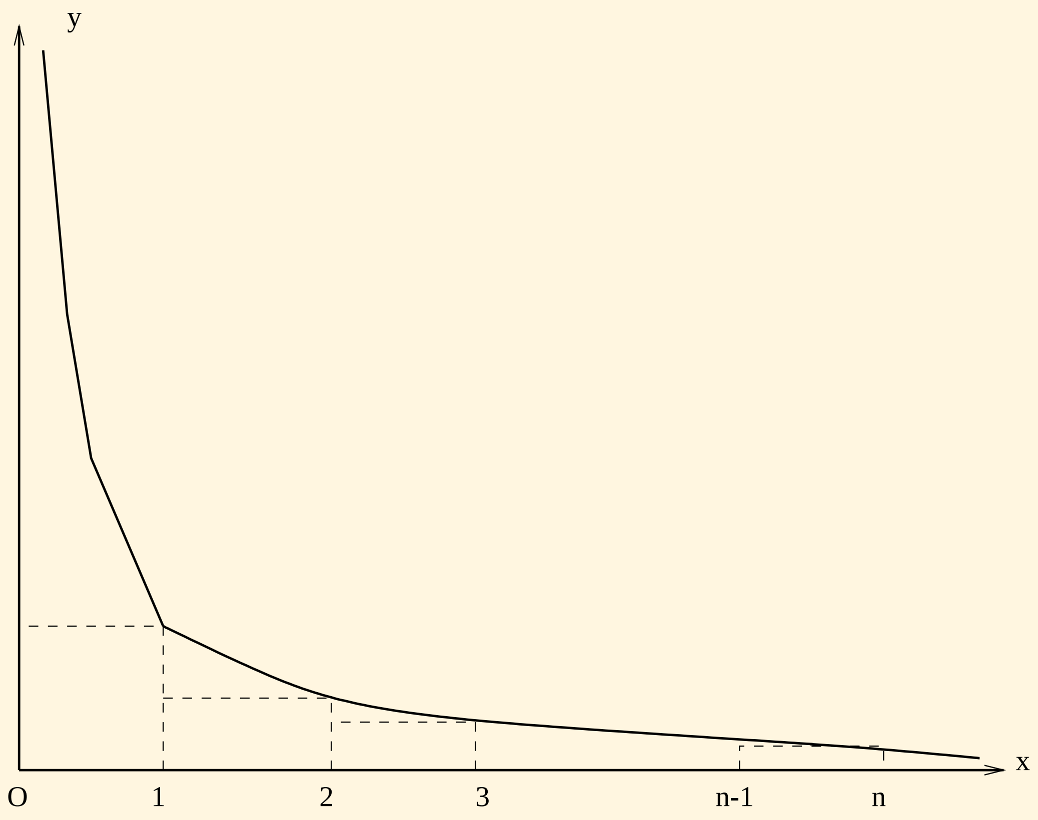

FIG. B.1.2 – Majoration de la somme de la série de Riemann

Exemple B.1.9
Convergence de la série de Riemann

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre III

Document C.1.1 Remarques sur les suites de Cauchy

Pour démontrer qu'une suite de Cauchy est convergente, la difficulté essentielle provient du fait qu'il faut établir que la suite admet une limite sans pour autant connaître cette limite !

En fait le résultat énoncé ci-dessus est intrinsèquement lié à la structure de $\mathbb{R}$. En effet,

1. Il est faux dans $\mathbb{Q}$ (voir l'exemple sur les suites récurrentes B.1.8),
2. On le démontre dans $\mathbb{R}$ à partir de l'axiome de la borne supérieure (voir chapitre précédent), qui est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$. Cette démonstration est l'objet du document C.1.2.
3. Inversement d'ailleurs, on peut construire $\mathbb{R}$ en utilisant les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. On démontre alors l'axiome (qui n'en est plus un, quand on a choisi de faire cette construction) de la borne supérieure.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Convergence des suites de Cauchy

Nous avons le

Théorème C.1.1. *Toute suite de Cauchy est convergente dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration - Cette propriété résulte directement comme nous allons le voir de l'axiome de la borne supérieure. Soit donc (u_n) une suite de Cauchy.

Montrons tout d'abord que (u_n) est bornée, en effet par définition :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{(m \geq N_1)\ \textbf{et}\ (n \geq N_1)\} \ \Rightarrow\ (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{cases}$$

Choisissons $m = N_1$, il vient alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \textbf{tel que}\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_1) \ \Rightarrow\ (|u_{N_1} - u_n| \leq \varepsilon),$$

ce qui montre bien que la suite (u_n) est bornée par $M = \max(|u_1|, ..., |u_{N-1}|, |u_{N_1} - \varepsilon|, |u_{N_1} + \varepsilon|)$.

On définit une nouvelle suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = \sup_{i \geq n} u_i,$$

L_n existe bien puisque l'ensemble $A_n = \{u_i, i \geq n\}$ est majoré (par M). D'autre part les ensembles A_n sont minorés par $-M$, donc $\forall n, L_n \geq -M$.

La suite L_n est décroissante, on vient de voir qu'elle était minorée, cette suite converge donc. On appelle L sa limite. Montrons que L est la limite de la suite (u_n).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On choisit $\varepsilon > 0$ quelconque, alors :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_2) \ \Rightarrow \ (L_n - L \leq \varepsilon). \tag{C.1.1}$$

D'autre part puisque la suite est de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{(m \geq N_1) \ \textbf{et} \ (n \geq N_1)\} \ \Rightarrow \ (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{array} \right. \tag{C.1.2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

L_N est la borne supérieure de $A_N = \{u_i, i \geq N\}$, donc il existe u_p tel que $p \geq N$ et $L_N - \varepsilon < u_p \leq L_N$, sinon $L_N - \varepsilon$ serait majorant de A_N, donc L_N ne serait pas borne supérieure de A_N. On a donc $0 \leq L_N - u_p < \varepsilon$, donc

$$|L_N - u_p| < \varepsilon \tag{C.1.3}$$

On choisit maintenant $n \geq N$, on a alors :

$$|u_n - L| \leq |u_n - u_p| + |u_p - L_N| + |L_N - L| \leq 3\varepsilon$$

en effet :

– $n \geq N, p \geq N$ donc $n \geq N_1, p \geq N_1$ donc d'après C.1.2

$$|u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

– d'après C.1.3

$$|u_p - L_N| \leq \varepsilon.$$

Document C.1.2
Convergence des suites de Cauchy

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– $N \geq N_2$ donc d'après C.1.1

$$|L_N - L| \leq \varepsilon.$$

On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{n \geq N \Rightarrow |L - u_n| \leq 3\varepsilon\}$$

Ce qui démontre bien la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L.

retour au cours

Document C.1.3 Convergence des suites de Cauchy (deuxième démonstration)

Nous avons le

Théorème C.1.2. *Toute suite de Cauchy est convergente dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration - Cette propriété résulte directement comme nous allons le voir de l'axiome de la borne supérieure. Soit donc (u_n) une suite de Cauchy. Elle vérifie, par définition :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{(m \geq N) \ \textbf{et} \ (n \geq N)\} \ \Rightarrow \ (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{array}\right.$$

Il en découle en choisissant $m = N$ que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \ \Rightarrow \ (|u_N - u_n| \leq \varepsilon).$$

Ceci montre, que, à partir d'un certain rang N, la suite est bornée. Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \ \Rightarrow \ u_N - \varepsilon \leq u_n \leq u_N + \varepsilon.$$

L'axiome de la borne supérieure nous permet alors d'affirmer que cette suite possède une borne inférieure l_N et une borne supérieure L_N, soit :

$$l_N = \inf_{n \geq N} u_n \quad \text{et} \quad L_N = \sup_{n \geq N} u_n$$

Donnons alors à ε successivement les valeurs $\varepsilon_q = 2^{-q}$, pour $q = 0, 1, \ldots$. Soient alors N_q, $q = 0, 1, \ldots$, les valeurs de N correspondant à ces valeurs de ε. Les bornes associées l_{N_q} et L_{N_q} sont alors les éléments de deux suites adjacentes (l_{N_q}) et (L_{N_q}), indicées par q. En effet :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– la suite (l_{N_q}) est croissante, car :

$$(N_q \geq N_p) \Rightarrow (\inf_{n \geq N_q} u_n \geq \inf_{n \geq N_p} u_n),$$

– la suite (L_{N_q}) est décroissante, car :

$$(N_q \geq N_p) \Rightarrow (\sup_{n \geq N_q} u_n \leq \sup_{n \geq N_p} u_n),$$

– enfin, $l_{N_q} < L_{N_q}$ et $L_{N_q} - l_{N_q} \leq 2\varepsilon_q$.

On en déduit aussitôt que ces deux suites convergent vers une même limite l. Comme par ailleurs, nous avons :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_q, \quad l_{N_q} \leq u_n \leq L_{N_q},$$

il en découle que la suite (u_n) converge aussi vers cette limite l.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Convergence d'une suite récurrente

Proposition C.1.1. *Si la fonction f vérifie la condition suivante, dite* ***condition de Lipschitz*** *:*

$$(L) \qquad \exists K \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y|,$$

si de plus $0 < K < 1$, alors la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.

La démonstration repose sur les suites de Cauchy.
Démonstration - Appliquant l'hypothèse (L) à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K\,|u_n - u_{n-1}|$$

et par récurrence

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n\,|u_1 - u_0|.$$

Par suite, pour tout $p > 1$,

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &\leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq (K^{n+p-1} + K^{n+p-2} + \cdots + K^n)\,|u_1 - u_0| \\ &\leq K^n\,(1 + K + \cdots + K^{p-1})\,|u_1 - u_0| \\ &\leq K^n\,\frac{1-K^p}{1-K}\,|u_1 - u_0| \\ &\leq K^n\,\frac{1}{1-K}\,|u_1 - u_0| \end{aligned} \tag{C.1.4}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, la suite est donc de Cauchy et en conséquence elle est convergente.

Nous allons montrer maintenant que cette limite est nécessairement solution de l'équation $x = f(x)$, autrement dit que l est un **point fixe** de f.

Le principe de la démonstration est celui que nous avons utilisé pour montrer que la suite (K^n) converge vers 0, lorsque $|K|$ est strictement inférieur à 1.

– La suite (u_{n+1}) converge vers la même limite l que la suite (u_n),
– Il résulte de la condition de Lipschitz que $|f(u_n) - f(l)| \leq K|u_n - l|$, ce qui montre que la suite $(u_{n+1} = f(u_n))$ converge vers $f(l)$ quand la suite (u_n) converge vers l,
– L'unicité de la limite entraîne alors que $l = f(l)$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Sommes partielles d'une série géométrique

Soit à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}$, l'expression suivante :

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n.$$

Multiplions S_n par $(1 - r)$. Nous obtenons :

$$(1 - r)\, S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n - r - r^2 - r^3 - \cdots - r^n - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$$

d'où la formule classique, définie pour $r \neq 1$ et n dans $\mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

retour au cours

Document C.1.6 Série absolument convergente

Définition C.1.1. *La série de terme générale u_n est dite **absolument convergente** si la série de terme générale $|u_n|$ converge.*

La proposition suivante fournit un outil efficace pour la vérification de la convergence des séries.

Proposition C.1.2.

- *Si une série est absolument convergente, elle converge.*
- *Si, à partir d'un certain rang (i.e., si pour tout $n \geq N$, où N est un certain entier), on a*

$$|u_n| \leq v_n$$

et si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge absolument.

On compare donc la valeur absolue du terme général u_n avec le terme général d'une série positive convergente.

Ainsi, nous verrons ultérieurement que la série v_n définie par

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

où α est un réel strictement supérieur à 1, est convergente. En conséquence, si l'on peut montrer que la série u_n, à laquelle on s'intéresse vérifie $|u_n| \leq v_n$, on peut conclure aussitôt que cette série u_n est absolument convergente. C'est ainsi notamment que l'on montre que la série de terme général $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ce dernier exemple founit un ‘prototype’ de ***série de Fourier***. Une série de Fourier est une série de terme général dépendant d’une variable x sous la forme

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites données. Ces séries constituent un outil mathématique ***fondamental*** dans l’étude des phénomènes physiques périodiques, notamment en théorie du signal. Elles seront étudiées ultérieurement.

En ce qui concerne la série $1/(n^\alpha)$, nous avons vu que la série $1/n$ diverge et que la série $1/n^2$ converge. Il est alors possible d’en déduire que pour $\alpha < 1$, la série $1/(n^\alpha)$ diverge, alors qu’elle converge pour $\alpha > 2$ (faire cette démonstration en exercice). Le cas plus délicat est celui où α est compris entre 1 et 2.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

$u_n = \alpha^n u_0$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

La convergence de la suite (u_n) vers l s'écrit

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n > N) \ \Rightarrow\ (|u_n - l| < \epsilon),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n > N) \ \Rightarrow\ (|v_n| < \epsilon),$$

puisque $v_n = u_n - l$. (Il n'y a donc pas de calcul !)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

La limite d'une suite constante $u_n = a$ est a puisque :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N = 1,\ (n > N) \ \Rightarrow\ (|u_n - a| = 0 < \epsilon).$$

Retour à l'exercice ▲

Soit $\epsilon > 0$, alors

$$n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il suffit donc de choisir ,

$$N \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Par exemple

$$N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1.$$

on a aura alors

$$(n > N) \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\epsilon} \;\Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Retour à l'exercice ▲

Rappelons nous que $P \Rightarrow Q$ s'écrit ($\textbf{non}\, P$) **ou** Q, expression dont la négation est P **et** ($\textbf{non}\, Q$).

Nous arrivons ainsi à :

$$\forall l, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N)\ \textbf{et}\ (|u_n - l| \geq \epsilon).$$

Pour montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ (qui ne prend que les valeurs $+1$ et -1) diverge nous allons faire une démonstration cas par cas sur l.

- $\forall l \geq 0, \exists\, 0 < \epsilon \leq l + 1, \forall N, \exists n = 2N + 1$ et $|u_n - l| = | - 1 - l| = 1 + l \geq \epsilon$
- $\forall l < 0, \exists\, 0 < \epsilon \leq -l + 1, \forall N, \exists n = 2N$ et $|u_n - l| = |1 - l| = 1 - l \geq \epsilon$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Puisque $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $(\textbf{non}\ Q) \ \Rightarrow\ (\textbf{non}\ P)$, et sachant que toute suite convergente est bornée, nous arrivons à : toute suite non bornée est divergente.

Retour à l'exercice ▲

La suite est croissante car (le vérifier)

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}$$

et elle est bornée, puisque

$$|u_n| = u_n \leq 1,$$

elle est donc convergente.

Retour à l'exercice ▲

1. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\begin{aligned}
&\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\\
&\Big\{\{(m \leq n) \ \Rightarrow\ (u_m \leq u_n)\} \ \textbf{et}\ \{(m \leq n) \ \Rightarrow\ (v_m \leq v_n)\}\Big\}\\
&\quad \Rightarrow \quad \{(m \leq n) \ \Rightarrow\ (u_m + v_m \leq u_n + v_n)\}
\end{aligned}$$

2. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{(m \leq n) \ \Rightarrow\ (u_m \leq u_n)\} \quad \Rightarrow \quad \{(m \leq n) \ \Rightarrow\ (-u_m \geq -u_n)\}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

On va montrer la contraposée, c'est à dire :

S'il existe un entier N tel que $l < u_N$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers l.

Si $l < u_N$, alors, du fait de la croissance de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow (l < u_N \leq u_n),$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow (0 < u_N - l \leq u_n - l).$$

La proposition (u_n) converge vers l se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N' \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon),$$

Donc sa négation se traduit par :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N' \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N') \text{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon),$$

On peut choisir $\varepsilon = u_N - l$.

Pour tout N', on peut choisir $n = \max(N' + 1, N)$.

On a alors $n > N'$ et $n \geq N$ donc $u_n - l \geq u_N - l = \varepsilon$ donc $|u_n - l| \geq \varepsilon$.

Ceci termine de démontrer que la suite (u_n) ne converge pas vers l.

Retour à l'exercice ▲

On écrit que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent, soit pour tout $\epsilon > 0$ donné,

$$\exists N_1,\ (n > N_1) \Rightarrow (|u_n - \hat{u}| < \frac{\epsilon}{2})$$

$$\exists N_2,\ (n > N_2) \Rightarrow (|v_n - \hat{v}| < \frac{\epsilon}{2})$$

et par conséquent

$$\exists N = \max(N_1, N_2),\ (n > N) \Rightarrow (|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |u_n - \hat{v}| < \epsilon)$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On a donc $-v_n \leq u_n \leq v_n$,$-v_n$ et v_n ont pour limite 0, on applique le théorème III.1.3 qui permet de conclure que u_n tend vers 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

On a $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq M|u_n|$.

Or

$$\lim_{n\to\infty} M|u_n| = 0.$$

D'où (en utilisant l'exercice précédent) la suite $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

1. (a)
$$u_n = n, v_n = -n^2, u_n + v_n = n(1-n).$$
   (b)
$$u_n = n^2, v_n = -n, u_n + v_n = n(n-1).$$
   (c)
$$u_n = n, v_n = -n, u_n + v_n = 0.$$
2. (a)
$$u_n = n^4, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = n^2.$$
   (b)
$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^4}, u_n v_n = \frac{1}{n^2}.$$
   (c)
$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

1. Puisque $l > 0$, il existe $0 < \epsilon < l$. On choisit un tel ϵ. Puisque la suite converge, on a

$$\exists N, \ (n > N) \ \Rightarrow \ (l - \epsilon < u_n < l + \epsilon).$$

   Or $l - \epsilon > 0$, d'où $u_n > 0$ pour $n > N$.
2. Les éléments de la suite v_n existent donc pour $n > N$ et on sait que la limite du quotient de deux suites convergentes, dans ce cas, est le quotient des limites, soit $\frac{1}{l}$.
3. Le raisonnement est le même pour $l < 0$ car dans ce cas il suffit d'utiliser la suite $(-u_n)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

On peut vérifier aisément que $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$, que $\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{a_{n+1}-9}{10^{n+1}} \leq 0$ et que $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n} > 0$ tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

1. L'implication de la deuxième proposition par la première est claire, puisque, quel que soit l'entier naturel p, $n + p$ est supérieur ou égal à n.
2. L'implication réciproque provient du fait que si on prend m et n quelconques, nécessairement l'un des deux est supérieur ou égal à l'autre, par exemple $m \geq n \geq N$ et on peut alors poser $m = n + p$ ($p \geq 0$).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

Puisqu'il y a équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente, il suffit de démontrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy, c'est à dire

$$\exists\epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists m \geq N(et)\exists n \geq N(et)|u_m - u_n| > \epsilon.$$

En effet si l'on prend $\epsilon = 1$, $m = 2N$, $n = 2N+1$, on obtient $|u_m - u_n| = 2 > 1$, ce qui achève la démonstration.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

On montre par récurrence que $u_n = K^n$. Donc $u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} - u_n = (K-1)u_n \leq 0$).

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. Soit l sa limite.

Puisque la suite (u_{n+1}) a la même limite que la suite (u_n), on a

$$l = Kl \Leftrightarrow l(K-1) = 0$$

et comme $K < 1$, la seule solution est $l = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

On peut montrer par récurrence que $u_n = \alpha^n u_0$.

- Lorsque $-1 < \alpha < 1$, on définit $v_n = |u_n| = |u_0||\alpha|^n$. On a démontré dans l'exercice A.1.18 que la suite $|\alpha|^n$ convergeait vers 0. La suite ($v_n = |u_n|$) converge donc vers 0 et donc la suite (u_n) converge vers 0.
- Lorsque $1 < \alpha$, on pose $v_n = 1/u_n$, on utilise l'exercice A.1.18 pour montrer que (v_n) converge vers 0, donc u_n tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) ne converge pas.
- Lorsque $\alpha < -1$, on pose $v_n = 1/|u_n|$, on utilise l'exercice A.1.18 pour montrer que v_n converge vers 0, donc $|u_n|$ tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) ne converge pas.
- Lorsque $\alpha = 1$, on obtient une suite constante (laquelle ?).
- Lorsque $\alpha = -1$, on obtient une suite divergente bien connue (laquelle ?).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

Supposons qu'il existe deux solutions distinctes l_1 et l_2 de l'équation $u = f(u)$, soit $l_1 = f(l_1)$ et $l_2 = f(l_2)$. Alors, on a

$$|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq K|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$$

ce qui est impossible ...

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

1. $S_0 = u_0 = 0$, $S_n = u_0 + \ldots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$.
2. On a montré, par les suites de Cauchy, que la suite S_n est divergente.
3. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Le fait que la suite (u_n) tende vers 0 est un condition nécessaire mais non suffisante pour que la série (u_n) converge, comme le montre cet exemple.

Retour à l'exercice ▲

$i)u_n \to 0$, suite bornée par une suite qui tend vers 0.
$ii)u_n \to 0$, il suffit de multiplier et de diviser par $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.
$iii)(u_n)$ est une suite convergente car elle est décroissante et minorée par 0. Pour montrer qu'elle converge vers 0 il faut utiliser la continuité de la fonction $\ln$ qui sera vue dans un chapitre ultérieur.
$iv)u_n \to -1$, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par b^n et d'utiliser les résultats sur la convergence de K^n, la somme et le quotient de suites convergentes.
$v)u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, elle est donc divergente.
$vi)u_n \to \dfrac{5}{6}$, car c'est une série géométrique de raison $r = -1/5$.
$vii)u_n \to 0$, il suffit de démontrer, par exemple, que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
$viii)u_n \to 0$, il suffit de démontrer, par exemple, que $0 \leq u_n \leq \frac{4}{n}$.
$ix)u_n \to 0$, car c'est le produit des deux suites précédentes.

Retour à l'exercice ▲

1. $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 0$, $u_4 = \frac{3}{4}$, $u_5 = \frac{2}{3}$.
2. La borne supérieure est le plus petit des majorants. Ici, $\sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\} = 1$ car $u_n \leq 1$ et si $c < 1$, on prend $n > \frac{1}{2(1-c)}$ pour obtenir $c < u_{2n} < 1$. (Pour trouver cette valeur de n on raisonne "à l'envers", en partant de $c < 1 - \frac{1}{2n}$.)
3. La limite de cette suite est évidemment 1. En effet, soit $\epsilon > 0$ donné, alors pour n pair

   $$|u_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \epsilon, \text{ pour } n \geq \frac{1}{\epsilon}$$

   et pour n impair

   $$|u_n - 1| = \frac{1}{n-2} \leq \epsilon, \text{ pour } n \geq \frac{1}{\epsilon} + 2$$

   Il suffit donc de prendre $N \geq \frac{1}{\epsilon} + 2$ pour vérifier la définition de la convergence de (u_n) vers 1.
4. La suite n'est jamais croissante car il est facile de vérifier que $u_{2n} \geq u_{2n+1}$.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de démontrer que la racine carrée a toujours un sens !

Retour à l'exercice ▲

En utilisant vos souvenirs de terminale, il est facile de montrer que f est croissante sur $]1, +\infty[$, que $f(x)-x$ s'annule en $\alpha = 2$ en étant positive sur $]1, 2[$ et négative sur $]2, +\infty[$.

Retour à l'exercice ▲

Sur un même graphe tracer la fonction $y = f(x)$ et la droite $y = x$. Prenez $u_0 < 2$ et construisez à la main u_1, u_2, ... et vous voyez que la suite est croissante et majorée par 2. Faites la même chose en prenant $u_0 > 2$, que constatez-vous ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1d, Exercice A.2.3

Commencez par prendre $u_0 < 2$ et montrez, peut-être par récurrence, que la suite est majorée par 2 et croissante.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1d, Exercice A.2.3

En utilisant la croissance de f, montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$. (N'oubliez pas que $f(2) = 2$.) Toujours en utilisant la croissance de f, montrer, par récurrence, que la suite est croissante. Attention, il faut démarrer la récurrence et il y a là une petite difficulté.

Retour à l'exercice ▲

Pour démarrer la récurrence pour la croissance de la suite, il faut démontrer que $u_0 \leq u_1$. Utiliser le fait que $u_1 = f(u_0)$ et que vous connaissez le signe de $f(x) - x$. Vous obtenez donc une suite croissante et majorée. Est-elle convergente ? et si oui, vers quelle limite ?

Retour à l'exercice ▲

Pour être sûr d'avoir bien compris, utiliser une démarche similaire pour démontrer que si $u_0 > 2$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc convergente. Vers quelle limite ?

Retour à l'exercice ▲

De la même manière que pour la question précédente (mais les calculs sont plus compliqués), vous montrerez que :

- Tous les termes de la suite sont bien définis car $u_n \geq 0$ pour $n \geq 1$.
- Il suffit, d'après la question précédente, d'étudier $f(x) = \sqrt{9+x}$ et le signe de $f(x) - x$ sur $[0, +\infty]$ (Attention, α n'est pas "simple").
- La suite se démontre de la même manière.

Retour à l'exercice ▲

Cette question est laissée à votre réflexion. Les résultats sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{si } u_0 > 0 : & \text{la suite converge vers } 0, \\ \text{si } u_0 = 0 : & \text{la suite est constante,} \\ \text{si } u_0 < 0 : & \text{la suite diverge.} \end{array}\right.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Etudier aussi le signe de $f(x) - x$ sur $]\sqrt{a}, +\infty[$. Les résultats sont donnés par vos connaissances de terminale.

Retour à l'exercice ▲

Comment peut-on démontrer qu'une suite est convergente sans connaître sa limite ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.4

Commencez par démontrer que la suite est minorée. Par quelle valeur ? Puis étudier sa croissance ou décroissance.

Retour à l'exercice ▲

Les deux raisonnements se font par récurrence en utilisant la croissance de f et le signe de $f(x) - x$. Comment calcule-t-on alors la limite l de la suite ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.4

La suite (u_{n+1}) a même limite que la suite (u_n), ce qui permet de montrer que $l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l})$. Attention, il y a deux valeurs possibles pour l. Laquelle est la bonne et pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de calculer ε_{n+1} en remplaçant u_{n+1} par sa valeur en fonction de u_n.

Retour à l'exercice ▲

Montrer tout d'abord que $\varepsilon_{n+1} \leq b \left(\frac{\varepsilon_n}{b}\right)^2$ puis itérer astucieusement.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.4

On a : $\frac{\varepsilon_{n+1}}{b} \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{b}\right)^2 \leq \left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{b}\right)^4, \ldots$

Retour à l'exercice ▲

La majoration de $\dfrac{2-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} < \dfrac{1}{10}$ est équivalente à $12\sqrt{a} > 20$ qui est équivalent à $a > \frac{25}{9}$. Le calcul d'erreur montre qu'après le calcul de 4 itérés (u_2, u_3, u_4, u_5), l'erreur entre u_5 et $\sqrt{a}$ est inférieur à 10^{-15} !

Retour à l'exercice ▲

Résoudre $f(l) = l$ **et on trouve deux solutions** $\alpha = -3$ **et** $\beta = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Remplacer u_{n+1} en fonction de u_n.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1(b)i, Exercice A.2.5

On trouve $\lambda = 5$ et si vous avez choisi $\alpha = 1$ et $\beta = -3$, vous trouvez $\lambda = \dfrac{1}{5}$.

Retour à l'exercice ▲

Itérer le calcul jusqu'à u_0.

Retour à l'exercice ▲

On trouve $\dfrac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-1} = (5)^n \dfrac{u_0+3}{u_0-1}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1(b)iii, Exercice A.2.5

Poser $K_n = (5)^n \dfrac{u_0 + 3}{u_0 - 1}$ et exprimer u_n. Quelle condition faut-il imposer pour pouvoir définir u_n ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1(b)iii, Exercice A.2.5

On trouve $(1-K_n)u_n = K_n + 1$. Il faut donc imposer $K_n \neq 1$ ce qui donne des conditions sur u_0. Lesquelles ?

Retour à l'exercice ▲

Les calculs donnent : $u_0 \neq \dfrac{1 + 3 \times 5^n}{-5^n + 1}$, **pour** $n = 1, 2, ...$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1(b)iv, Exercice A.2.5

Passez à la limite quand n tend vers l'infini dans l'expression de u_n en fonction de n et de u_0.

Retour à l'exercice ▲

La suite (u_n) converge vers 1 si $u_0 \neq -3$ et $u_n = -3$ pour tout n si $u_0 = -3$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

La solution est : $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $u_0 \neq \frac{3^n}{3^n - 1}$ $(n \geq 1)$ et (u_n) converge vers 0 si $u_0 \neq 1$ et la suite est constante si $u_0 = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.5

La solution est : $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\lambda = 2$, $u_0 \neq \dfrac{2^n + 3}{1 - 2n}$ $(n \geq 1)$ et (u_n) converge vers 3 si $u_0 \neq -1$ et la suite est constante si $u_0 = -1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.5

La solution est : $\alpha = \beta = 2$, $\dfrac{1}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{1}{u_n - 2} - \dfrac{1}{6}$, $u_0 \neq \dfrac{6}{n} + 2$ **(**$n \geq 1$**) et** (u_n) **converge vers** 2.

Retour à l'exercice ▲

Voir la définition des suites adjacentes dans le paragraphe Suites adjacentes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.6

La croissance d'une des deux suites ne pose aucun problème. Pour la décroissance de l'autre évaluer très précisément la différence de deux termes consécutifs. Les autres propriétés se vérifient aisément.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.6

Pour montrer que la limite l n'est pas un rationnel, supposer que c'est un rationnel (quotient de deux entiers) et utiliser l'encadrement

$$v_n \leq l \leq u_n$$

pour arriver à une contradiction.

Retour à l'exercice ▲

On pose $l = \dfrac{p}{q}$ et on écrit $v_n \leq l \leq u_n$ pour $n = q$. En multipliant ces inégalités par q on arrive à une absurdité. Laquelle ?

Retour à l'exercice ▲

L'absurdité provient du fait que l'on trouve un entier encadré par deux réels dont la différence est inférieure à $\frac{1}{q}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir la définition des suites adjacentes dans le paragraphe Suites adjacentes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.6

En écrivant les propriétés à démontrer, montrer qu'elles se ramènent toutes à étudier le signe d'une même quantité. Laquelle ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.6

Il s'agit du signe de $u_n - v_n$. Quel est-il ?

Retour à l'exercice ▲

Calculer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n et vous trouverez que ce signe est toujours positif pour $n \geq 1$ si $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Ces deux dernières propriétés sont-elles vraies ?

Retour à l'exercice ▲

Pour calculer la limite évaluer w_{n+1} en fonction de w_n et le résultat $l = \sqrt{u_0 v_0}$ s'en déduit aisément.

Retour à l'exercice ▲

Voir la définition des suites adjacentes dans le paragraphe Suites adjacentes.

Retour à l'exercice ▲

En écrivant les propriétés à démontrer, montrer qu'elles se ramènent toutes à étudier le signe d'une même quantité. Laquelle ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.2.6

Il s'agit du signe de $u_n - v_n$ si l'on connait les signes de u_n et v_n. A vous d'étudier ces différentes quantités.

Retour à l'exercice ▲

Puisque $v_n > 0$, pour étudier la croissance de v_n vous pouvez regarder la quantité $v_{n+1}^2 - v_n^2$. Les autres propriétés des suites adjacentes se démontrent aisément en utilisant le signe de $u_n - v_n$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.7

On montre facilement que :

- f est décroissante sur $[1, +\infty[$, croissante sur $]-\infty, 1]$.
- Si $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, $f(x) = x$.
- Si $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, $f(x) > x$.
- Si $x < -\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a} < x$, $f(x) < x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.7

Sur une même figure tracer la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite $y = x$. Pour la courbe d'équation $y = f(x)$, utiliser les résultats précédemment démontrés : croissance, décroissance, position par rapport à la droite $y = x$.

Prendre $-\sqrt{a} < u_0 < \sqrt{a}$, donc u_0 est strictement compris entre les abscisses des deux points fixes.

Construire à la main u_1, u_2, ... et voir que la suite est croissante, majorée par $\sqrt{a}$ et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.

Retour à l'exercice ▲

Montrer par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, -\sqrt{a} \leq u_n \leq \sqrt{a}$. Il suffit d'utiliser la croissance de f sur l'intervalle $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$, ainsi que la définition des points fixes.

Retour à l'exercice ▲

En déduire que la suite est croissante, il suffit d'utiliser le signe de $f(x) - x$.

Retour à l'exercice ▲

En déduire que la suite est convergente.

Quelles sont les limites possibles ?

Bien justifier la réponse à l'aide des théorèmes sur les sommes et produits de suites.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 3, Exercice A.2.7

Montrer que la limite ℓ vérifie $u_0 \leq \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

Remplacer u_n par q^n dans la définition de la suite.

Retour à l'exercice ▲

On trouve alors un trinôme dont les solutions sont $q_1 = \dfrac{1}{3}$ et $q_2 = 3$. Pourquoi n'a-t-on pas considéré le cas $q = 0$?

Retour à l'exercice ▲

Remplacer u_n par $C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ dans le second membre de la définition de la suite. Obtenez-vous alors le premier membre de l'égalité ?

Retour à l'exercice ▲

Utiliser aussi le fait que q_1 et q_2 sont les solutions d'un trinôme.

Retour à l'exercice ▲

N'oubliez pas que la suite solution s'écrit $u_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$. Il est alors facile de calculer C_1 et C_2 en fonction de u_0 et u_1.

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la limite de q_1^n et q_2^n ? Utiliser ce résultat pour déterminer la convergemce de la suite en fonction des valeurs de u_0 et u_1.

Retour à l'exercice ▲

Comment montre-t-on qu'une suite est convergente sans connaître sa limite ?

Retour à l'exercice ▲

La suite est croissante (pas de difficulté ?). Par quoi peut-on la majorer ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.9

Puisque $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut majorer u_n par la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. Laquelle ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.9

$$u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$$

Que vaut la dernière somme ? Voir le paragraphe Convergence d'une série.

Retour à l'exercice ▲