MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 9 :Introduction aux équations différentielles

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Janvier 2011

Chapitre IX
Équations différentielles

IX.1 Introduction

IX.1.1 Position du problème

Exemples :
Exemple B.1.1

Documents :
Document C.1.1

Beaucoup de problèmes de physique et de mécanique, d'économie aussi, se ramènent à la recherche de fonctions d'une variable réelle, dont les dérivées vérifient certaines relations :

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{IX.1.1}$$

Une telle relation s'appelle

– une **équation différentielle** si f est une fonction à valeurs réelles,
– un **système différentiel** si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (il s'agit alors de p relations entre y, ses dérivées et x). La fonction y elle-même peut être à valeurs vectorielles :

$$y = (y_1, y_2, \ldots y_d)$$

où chaque y_j est une fonction de x à valeurs réelles.

Nous ne considèrerons dans ce cours que des équations différentielles de fonctions scalaires y. La variable x représente souvent le temps (surtout dans les équations différentielles modélisant un phénomène physique), on préfère dans ce cas la lettre t à la place de x.

Par exemple, le mouvement d'une particule matérielle de masse m, astreinte à se mouvoir sur une droite et soumise à une force, parallèle à cette droite, d'intensité f ,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

est régi par la relation

$$m\frac{d^2q}{dt^2}(t) = f(t), \tag{IX.1.2}$$

$q(t)$ représentant l'abscisse de la particule à l'instant t. Dans certaines situations la force exercée peut dépendre de la position elle-même et l'équation (IX.1.2) prend la forme :

$$m\frac{d^2q}{dt^2}(t) = f(q(t), t), \tag{IX.1.3}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction donnée. L'exemple le plus classique est celui de la force de rappel d'un ressort, ce qui conduit à

$$f(q) = -r(q - q_0),$$

où r est la raideur et q_0 est la position de l'extrémité du ressort lorsqu'il est au repos. On retrouve l'équation (IX.1.3) dans la modélisation d'un pendule simple, avec

$$f(q) = -\frac{mg}{L}\sin(q)$$

où cette fois q mesure l'angle du pendule par rapport à la verticale, g la pesanteur et L la longueur du pendule. Cette coïncidence n'a rien d'extraordinaire. On rencontre souvent le cas d'une même équation différentielle dans des problèmes différents, car les lois physiques sous-jacentes sont les mêmes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.1.2 Quelques définitions

Exercices :
Exercice A.1.1

Exemples :
Exemple B.1.2

Un travail préliminaire à toute étude de (IX.1.1) est d'en extraire le terme de plus grande dérivation en y. On suppose ici que ceci est toujours possible, quitte à réduire l'intervalle sur lequel varie x (voir l'exemple référencé). On arrive alors à la situation suivante :

Définition IX.1.1. *On appelle* ***équation différentielle d'ordre*** n *une équation de la forme*

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)}), \quad x \in I,} \tag{IX.1.4}$$

où $f : I \times J_0 \times \cdots \times J_{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ *est une fonction donnée et* $I, J_0, \ldots, J_{n-1}$ *sont des intervalles (en général ouverts) de* $\mathbb{R}$.

Définition IX.1.2. *On dit que la fonction* $x \mapsto \varphi(x)$ *est une* **solution** *de l'équation différentielle (IX.1.4) s'il existe un sous-intervalle* I' *de* I*, l'intervalle sur lequel (IX.1.4) est définie, tel que :*

$$\begin{cases} \varphi \text{ est définie, } n \text{ fois dérivable sur } I',\ \varphi^{(k)} \text{ à valeurs dans } J_k, \\ \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)), \quad x \in I' \end{cases}$$

Résoudre ou **intégrer** une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions. Une solution φ est dite **maximale** si on ne peut pas trouver une autre solution,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

définie sur un intervalle plus grand que I' et dont la restriction à I' est égale à φ. On admettra que toute solution se prolonge en une solution maximale, et on ne considère donc ci-dessous que des solutions maximales. Une solution définie sur I (l'intervalle sur lequel est définie l'équation) est maximale. L' inverse est faux. Une solution définie sur un sous-intervalle I' de I peut être maximale, parce qu'elle n'admet aucun prolongement à I tout entier.

Par exemple, l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = ay, \quad a \in \mathbb{R}$$

est définie sur $I = \mathbb{R}$ et admet comme solution maximale, définie sur $I' = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Par contre, l'équation différentielle $y' = y^2$ admet, outre la solution triviale $y = 0$, la solution $y_C = \frac{-1}{x+C}$ définie sur chacun des intervalles $]-\infty, -C[$, $]-C, +\infty[$, pour chaque réel C donné. Si la solution maximale $y = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$, ce n'est pas le cas des solutions maximales y_C.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.1.3 Existence et unicité de la solution

Documents :
Document C.1.2

Exemples :
Exemple B.1.4

Les primitives d'une fonction f sont définies à une constante additive près. Or ce sont exactement les solutions de l'équation différentielle du premier ordre $y' = f$. Cette situation est générale et on démontre en effet qu'il existe, pour une équation différentielle d'ordre 1, toute une famille de solutions dépendant d'une constante arbitraire. Autrement dit, pour toute valeur d'une constante C, prise en général à l'intérieur d'un intervalle, on a une solution que nous noterons φ_C ou encore $\varphi(.; C)$. On dit que φ_C est la **solution générale** de l'équation différentielle. Si maintenant, on donne à C une valeur, par exemple $C = 1$, on obtient ce qu'on appelle une **solution particulière**.

De même, la solution générale d'une équation d'ordre 2 dépend de deux constantes arbitraires. Plus généralement enfin, la solution générale d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n constantes arbitraires.

La détermination de ces constantes se fait habituellement, en demandant que la solution cherchée satisfasse certaines conditions. Les conditions les plus couramment utilisées sont ce qu'on appelle des **conditions initiales** ou **de Cauchy**.

On sait démontrer que si f est une fonction continue en ses variables , le problème de Cauchy admet toujours une solution. Cependant pour avoir l'unicité il faut des conditions supplémentaires sur la fonction f. La condition la plus courante est la suivante, dite de **Cauchy-Lipschitz**. Nous la formulons pour les équations différentielles du

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

premier ordre :

$$(C.L.) \begin{cases} \text{Il existe une constante } L > 0, \text{ telle que :} \\ f \text{ est une fonction continue sur } I \times J, \text{ vérifiant l'inégalité} \\ \forall x \in I, \text{ et } \forall y, z \in J, \quad |f(x,y) - f(x,z)| \leq L\,|y - z|. \end{cases} \tag{IX.1.5}$$

On montre et nous admettrons que sous cette condition, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in I, \quad y_0 \in J \text{ donné} \end{cases}$$

admet une solution (maximale) unique définie sur un intervalle I' contenant x_0. On vérifie (IX.1.5) le plus souvent en vérifiant que la fonction f est dérivable par rapport à y (pour tout x fixé dans I), puis que sa dérivée est bornée (cf. théorème des accroissements finis).

L'exemple référencé montre néanmoins que l'unicité peut être violée si la condition de Cauchy-Lipschitz n'est pas vérifiée.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.1.4 Équations différentielles linéaires

Exercices :
Exercice A.1.2

Documents :
Document C.1.3

Les équations différentielles les plus faciles à étudier sont les équations linéaires. Ce concept de linéarité (voir le document référencé) est fondamental car il intervient de façon constante en physique, en mathématiques, en automatique,...

Définition IX.1.3. *On appelle* ***équation différentielle linéaire d'ordre*** n *une relation de la forme*

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &+ a_1(x)y^{(n-1)}(x) + a_2(x)y^{(n-2)}(x) && \text{(IX.1.6)} \\ &+ \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = b(x) && \text{(IX.1.7)} \end{aligned}$$

où les a_k *et* b *sont des fonctions données sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. On dit que* b *est le* ***second membre de l'équation****. Si* $b \equiv 0$ *on dit que l'équation est* ***homogène*** *ou* ***sans second membre*** *; dans le cas contraire on dit qu'elle est* ***non homogène****.*

Par exemple, l'équation $y'(x) = y(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et homogène car elle se met sous la forme $y'(x) - y(x) = 0$. Par contre, l'équation différentielle différentielle linéaire d'ordre 1 $y'(x) = y(x) - x^2$ a pour second membre $b(x) = -x^2$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.2 Équations linéaires du premier ordre

IX.2.1 Équation différentielle homogène

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Exemples :
C9-E-4

Documents :
Document C.1.4

Soit à résoudre l'équation

$$y'(x) = a(x)y(x), \qquad x \in I. \tag{IX.2.1}$$

où $a(.)$ est un fonction continue sur l'intervalle I. On note $A(.)$ une primitive quelconque de $a(.)$. Comme la fonction $e^{-A(x)}$ ne s'annule jamais l'équation (IX.2.1) est équivalente à

$$y'(x)e^{-A(x)} = a(x)e^{-A(x)}y(x) = A'(x)e^{-A(x)}y(x)$$

soit

$$y'(x)e^{-A(x)} - A'(x)e^{-A(x)}y(x) = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{-A(x)}\right] = 0. \tag{IX.2.2}$$

L'équation (IX.2.2) admet alors comme seules solutions

$$y(x)e^{-A(x)} = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

d'où le résultat suivant

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Équation différentielle homogène

Proposition IX.2.1. *Soit* $a : I \mapsto \mathbb{R}$ *un fonction continue, alors l'équation différentielle*

$$y'(x) = a(x)y(x), \qquad x \in I,$$

admet pour solution générale

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \tag{IX.2.3}$$

où $A(.)$ *est une primitive arbitraire de* $a(.)$ *et* C *est une constante réelle quelconque.*

Proposition IX.2.2. *Le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{IX.2.4}$$

admet comme unique solution

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right). \tag{IX.2.5}$$

La démonstration est à faire en exercice. Il en résulte que si une solution est nulle en un point, elle est identiquement nulle.

Par exemple, pour $k \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle à coefficients constants

$$y'(x) + ky(x) = 0$$

a pour solutions les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^{-kx},\ C \in \mathbb{R}.$$

Un autre exemple, moins trivial, est donné en exemple référencé. Vous trouverez, dans le document référencé, le concept de stabilité qui correspond au comportement des solutions quand x tend vers l'infini.

IX.2.2 Présentation pratique du calcul de la résolution

Exercices :
Exercice A.1.5

On veut résoudre l'équation :

$$y'(x) = a(x)y(x),$$

où a est une fonction continue sur I, on remarque tout d'abord que $y = 0$ est une solution, on recherche maintenant les autres solutions.

On écrit

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x),$$

c'est-à-dire que l'on 'sépare les variables x et y'. En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\ln|y(x)| = A(x) + K, \tag{IX.2.6}$$

où A est un primitive quelconque de a et $K \in \mathbb{R}$ est arbitraire. En prenant l'exponentielle des deux membres de (IX.2.6) on obtient

$$|y(x)| = e^K e^{A(x)}.$$

$$y(x) = \pm e^K e^{A(x)}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a déjà vu que $y = 0$ était solution, on peut donc résumer toutes les solutions par

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, résolvons l'équation

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 0,$$

qui, comme nous l'avons vu dans l'exemple B.1.2, s'écrit

$$y'(x) = -y(x)\tan x,\ \forall x \in I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[.$$

La solution est donnée par

$$y(x) = C_k e^{\int -\tan x\, dx} = C_k|\cos x|.$$

puisque une primitive de $-\tan x$ est $\ln|\cos x|$. Comme $\cos x$ garde un signe constant sur I_k, on obtient

$$y(x) = C_k \cos x,\ \forall x \in I_k.$$

En réalité on peut obtenir une solution définie sur $\mathbb{R}$ en imposant à celle-ci d'être continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$. Aux points $x_k = \pi/2 + k\pi$, la solution a pour limite $0 + C_k$ à gauche et $0 + C_{k+1}$ à droite, ce qui impose aux constantes C_k d'être toutes identiques. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$y = C\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$

Présentation pratique du calcul de la résolution

IX.2.3 Résolution de l'équation non homogène

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

Proposition IX.2.3. *La solution générale de l'équation avec second membre*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \quad x \in I. \tag{IX.2.7}$$

où a et b sont deux fonctions continues données sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

où y_p est une solution particulière de (IX.2.7) et y_h est la solution générale de l'équation homogène (IX.2.1) :

$$y_h'(x) = a(x)y_h(x).$$

Démonstration -
En multipliant (IX.2.7) par $e^{-A(x)}$, où A est une primitive quelconque de a, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{-A(x)}\right] = b(x)e^{-A(x)}$$

et donc si $S(x)$ est une primitive particulière de $b(x)e^{-A(x)}$, les solutions sont de la forme :

$$y(x) = (S(x) + C)e^{A(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{IX.2.8}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On retrouve $y_h(x) = Ce^{A(x)}$ qui est la solution générale de l'équation homogène (IX.2.1)

Il reste à montrer que $y_p(x) = S(x)e^{A(x)}$ est une solution particulière de (IX.2.7), on a en effet :

$$y_p'(x) = (S'(x) + a(x)S(x))e^{A(x)} = (b(x)e^{-A(x)} + a(x)S(x))e^{A(x)} = b(x) + a(x)y_p(x)$$

La méthode générale de résolution se décompose donc en deux phases :

– (i) résolution de l'équation homogène $y_h'(x) = a(x)y_h(x)$,

– (ii) recherche d'une solution particulière y_p.

IX.2.4 Équations à coefficients constants-solutions particulières

Exercices :
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

On appelle **équation différentielle linéaire à coefficients constants** une équation de la forme

$$y'(x) = ay(x) + b(x), \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}. \tag{IX.2.9}$$

Les solutions de l'équation homogène sont données par

$$y_h(x) = Ce^{ax}.$$

Il est facile de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre dans le cas de seconds membres simples :

1. *Second membre polynomial* - Une solution particulière de l'équation

   $$y'(x) - ay(x) = P(x)$$

   où P est un polynôme de degré n, peut être choisie comme un polynôme (de degré n si $a \neq 0$, de degré $n+1$ sinon), les coefficients sont déterminés par identification (voir l'exercice A.1.8).

2. *Second membre exponentiel* -
   Si $\alpha \neq a$, une solution particulière de l'équation

$$y'(x) - ay(x) = \beta e^{\alpha x},$$

   est de la forme (voir l'exercice A.1.9)

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}.$$

   Si $\alpha = a$, on cherche une solution particulière sous la forme (voir l'exercice A.1.10)

$$y_p(x) = B(x)e^{\alpha x}.$$

3. *Second membre trigonométrique* - Une solution particulière de l'équation

$$y'(x) - ay(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$$

   peut se chercher sous la forme (voir l'exercice A.1.11)

$$y_p(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

Si le second membre n'est pas de l'une des formes indiquées dans les exemples précédents alors on peut utiliser la méthode dite de variation de la constante que l'on va exposer dans le paragraphe suivant.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.2.5 Méthode de variation de la constante

Exercices :
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Dans le cas général, la **méthode de variation de la constante** permet de calculer une solution particulière. On commence par résoudre l'équation homogène dont les solutions sont de la forme

$$y_h(x) = Ce^{A(x)}.$$

La méthode consiste alors à remplacer C par une fonction de x notée $\varphi(x)$ et on cherche la solution de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_p(x) = \varphi(x)e^{A(x)}.$$

En reportant dans l'équation on trouve

$$\varphi'(x)e^{A(x)} + \varphi(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)\varphi(x)e^{A(x)} + b(x),$$

soit, après simplification,

$$\varphi'(x)e^{A(x)} = b(x).$$

On obtient ainsi une solution particulière

$$y_p(x) = \varphi(x)e^{A(x)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où $\varphi(x)$ est une primitive particulière de $b(x)e^{-A(x)}$

On retrouve ainsi "naturellement" $\varphi(x) = S(x)$, primitive de $b(x)e^{-A(x)}$. La solution générale est donc

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \varphi(x)e^{A(x)} = (\varphi(x) + C)e^{A(x)}.$$

Cette dernière égalité montre que si l'on considère toutes les primitives de $b(x)e^{-A(x)}$, on obtient alors la solution générale directement.

IX.2.6 Équations à coefficients constants-problème deCauchy

Proposition IX.2.4. *L'unique solution de*

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) + b(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

où b *est une fonction continue sur l'intervalle* I *et* x_0 *est donné dans* I*, est*

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-t)} b(t)\, dt. \tag{IX.2.10}$$

Démonstration - $\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-at} dt$ est la primitive de $b(x)e^{-ax}$ qui s'annule pour $x = x_0$, les solutions de $y'(x) = ay(x) + b(x)$ peuvent donc s'écrire

$$y(x) = \left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-at}\, dt \right) e^{ax}.$$

Si on utilise la condition $y(x_0) = y_0$, on obtient

$$y_0 = Ce^{ax_0}$$

d'où le résultat.

IX.2.7 Équations à variables séparables

Exercices :
Exercice A.1.14

Exemples :
Exemple B.1.5

Définition IX.2.1. *On appelle* ***équation différentielle à variables séparées*** *une équation de la forme*

$$a(y(x))y'(x) = b(x), \tag{IX.2.11}$$

où a et b sont des fonctions continues sur J et I deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On dit que cette équation est à variables séparées car à gauche se trouve la variable y et à droite la variable x. Toute équation différentielle pouvant s'écrire sous cette forme est dite à variables séparables.

Soient A une primitive de a et B une primitive de b, on a alors

$$\frac{d}{dx}A(y(x)) = a(y(x))y'(x) \ \text{ et } \ \frac{d}{dx}B(x) = b(x)$$

ce qui permet de récrire l'équation IX.2.11 sous la forme

$$\frac{d}{dx}A(y(x)) = \frac{d}{dx}B(x).$$

Et donc toute solution vérifie

$$A(y(x)) = B(x) + C$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

qui est une équation implicite en y.

Si a ne s'annule pas sur J, si donc il garde un signe constant sur J, alors A est une fonction strictement monotone sur J et elle admet une fonction réciproque A^{-1}, ce qui permet d'expliciter la solution y par

$$y(x) = A^{-1}(B(x) + C),$$

ce qui impose, bien souvent, des conditions reliant x et C puisqu'il faut que $B(x) + C$ appartienne à l'image de la fonction A (voir l'exemple référencé).

L'équation différentielle

$$y' = f(y) \tag{IX.2.12}$$

est un cas particulier d'équation différentielle à variables séparables, si f est une fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Elle admet pour solution

$$y(x) = G^{-1}(x - C)$$

où G est une primitive de $g = 1/f$ sur I. Il est clair que si f s'annule en un point y_0, alors la fonction $y(x) = y_0$ est une solution de l'équation (IX.2.12).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.2.8 Équation différentielle de Bernoulli

Exercices :
Exercice A.1.15

Il s'agit d'équations différentielles particulières de la forme

$$\boldsymbol{y'(x) = a(x)y^{\alpha}(x) + b(x)y(x),} \tag{IX.2.13}$$

où α est un réel différent de 0 ou 1. En effet, si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, nous voyons que l'équation est linéaire.

On constate que $y = 0$ est solution particulière de l'équation de Bernoulli, pour obtenir les autres solutions, on fait le changement de fonction inconnue :

$$z(x) = y^{1-\alpha}.$$

En effet si on divise (IX.2.13) par y^{α} (en supposant que $y(x) \neq 0$) on aboutit à

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} = a(x) + b(x)y^{1-\alpha}(x) \tag{IX.2.14}$$

et, comme,

$$z'(x) = (1-\alpha)y'(x)y^{-\alpha}(x),$$

l'équation (IX.2.14) se récrit

$$\frac{1}{1-\alpha}z'(x) = b(x)z(x) + a(x)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui est une équation différentielle linéaire avec second membre.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.2.9 Équation différentielle de Riccati

Exercices :	Cours :
Exercice A.1.16	Équation différentielle de Bernoulli

Il s'agit d'une équation de Bernoulli avec $n = 2$ et avec un second membre, soit :

$$\boldsymbol{y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x).} \tag{IX.2.15}$$

On ne sait résoudre facilement cette équation que si on connaît une solution particulière φ, ce qui permet alors de se ramener à une équation de type Bernoulli. En effet si on fait le changement de fonction inconnue

$$y(x) = u(x) + \varphi(x)$$

alors, en reportant dans (IX.2.15) on obtient :

$$u'(x) + \varphi'(x) = a(x)\left[u^2(x) + 2u(x)\varphi(x) + \varphi^2(x)\right] + b(x)\left[u(x) + \varphi(x)\right] + c(x)$$

soit, comme φ est une solution particulière,

$$u'(x) = a(x)u^2(x) + \left[b(x) + 2a(x)\varphi(x)\right]u(x)$$

ce qui est bien une équation de type Bernoulli avec $\alpha = 2$.

Remarquons que les équations de type Riccati ont un réel intérêt car on rencontre des équations de ce type dans plusieurs domaines des sciences de l'ingénieur (notamment en automatique).

IX.3 Équations du $2^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants

IX.3.1 Introduction

Exercices :
Exercice A.1.17

Nous ne nous intéressons qu'aux équations différentielles du second ordre de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{IX.3.1}$$

Tout d'abord nous avons le résultat général suivant :

Proposition IX.3.1. *La solution générale de l'équation (IX.3.1) peut être obtenue comme somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène associée :*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \tag{IX.3.2}$$

Démonstration - On considère y_p une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre

$$ay_p''(x) + by_p'(x) + cy(x) = f(x).$$

Alors $y - y_p$ vérifie l'équation

$$a(y - y_p)''(x) + b(y - y_p)'(x) + c(y - y_p)(x) = 0.$$

C'est donc une solution de l'équation homogène et donc, si on note y_h les solutions de l'équation homogène, on obtient

$$y = y_h + y_p.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition IX.3.1. *Deux solutions φ et ψ de l'équation homogène (IX.3.2) associée à (IX.3.1) sont dites indépendantes si elles vérifient la condition*

$$W(x) = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{IX.3.3}$$

L'étude de telles équations commence donc par la résolution des équations homogènes, ce qui va être fait de manière complète, puis par la recherche de solutions particulières, ce qui ne sera possible que pour des seconds membres particuliers.

IX.3.2 Généralités sur les équations homogènes

Exercices :
Exercice A.1.18

Documents :
Document C.1.5

Considérons tout d'abord les équations dans lesquelles $b = 0$. Elles s'écrivent :

1. Lorsque a et c sont de même signe :

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0,$$

avec les deux solutions indépendantes évidentes

$$\varphi(x) = \cos \omega x, \qquad \psi(x) = \sin \omega x.$$

2. Lorsque a et c sont de signe contraire :

$$y'' - \omega^2 y = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0,$$

avec les deux solutions indépendantes évidentes

$$\varphi(x) = e^{\omega x}, \qquad \psi(x) = e^{-\omega x}.$$

3. Lorsque c est nul :

$$y'' = 0$$

avec les deux solutions indépendantes évidentes

$$\varphi(x) = 1, \qquad \psi(x) = x.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème IX.3.1. *Si φ et ψ sont deux solutions indépendantes de*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{IX.3.4}$$

toute autre solution peut s'écrire

$$y(x) = A\varphi(x) + B\psi(x) \qquad \textit{où } A \textit{ et } B \textit{ sont des constantes.}$$

Démonstration On applique le résultat de l'exercice (A.1.18) aux fonctions y et y', il existe donc deux uniques fonctions dérivables $u(x)$ et $v(x)$ qui vérifient

$$\begin{cases} y(x) = u(x)\varphi(x) + v(x)\psi(x) \\ y'(x) = u(x)\varphi'(x) + v(x)\psi'(x) \end{cases}. \tag{IX.3.5}$$

On va maintenant montrer que les fonctions u et v sont des constantes. Dérivons les deux équations de (IX.3.5), il vient

$$\begin{cases} y' = u'\varphi + v'\psi + u\varphi' + v\psi' \\ y'' = u'\varphi' + v'\psi' + u\varphi'' + v\psi'' \end{cases}$$

La première de ces équations donne (compte tenu de (IX.3.5))

$$u'\varphi + v'\psi = 0.$$

Puisque φ, ψ et y sont solutions de l'équation (IX.3.4), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= ay'' + by' + cy \\ &= a(u'\varphi' + v'\psi' + u\varphi'' + v\psi'') + b(u\varphi' + v\psi') + c(u\varphi + v\psi) \\ &= a(u'\varphi' + v'\psi'). \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On obtient donc le système

$$\begin{cases} u'\varphi + v'\psi = 0, \\ u'\varphi' + v'\psi' = 0. \end{cases}$$

Les solutions φ et ψ étant par hypothèse indépendantes, ce système admet une unique solution qui est $u' = 0$ et $v' = 0$.

Un argument basé sur le même raisonnement conduit à la méthode de variation des constantes pour le calcul des solutions de l'équation du second ordre avec second membre (voir le document référencé).

IX.3.3 Solutions des équations homogènes

Exercices :
Exercice A.1.19
Exercice A.1.20

La première tâche dans la résolution de l'équation homogène est donc d'en trouver un couple de solutions indépendantes. Le théorème suivant fournit une réponse à cette question.

Théorème IX.3.2. *Soit l'équation différentielle*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{IX.3.6}$$

On lui associe l'équation algébrique

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{IX.3.7}$$

appelée ***équation caractéristique****. Soit Δ son discriminant alors un couple de solutions indépendantes de l'équation homogène (IX.3.6) est donné par :*

- *i /*

  $\Delta > 0$, $\varphi_1(x) = e^{r_1 x}$ *et* $\varphi_2(x) = e^{r_2 x}$ *où* r_1 *et* r_2 *sont les racines réelles de (IX.3.7)* ,

- *ii /*

  $\Delta = 0$, $\varphi_1(x) = e^{r_0 x}$ *et* $\varphi_2(x) = xe^{r_0 x}$ *où* $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$ *est la racine double de (IX.3.7)*,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– *iii* /

$$\Delta < 0, \quad \varphi_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x \textit{ et } \varphi_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x \textit{ avec } \omega = \sqrt{-\Delta}/(2a).$$

Démonstration - Vérifions que si $\Delta > 0$,alors $\varphi_1(x) = e^{r_1 x}$ et $\varphi_2(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions indépendantes de (IX.3.6).

Ce sont des solutions, il suffit de calculer φ_1', φ_2', φ_1'' et φ_2'', il faut bien remarquer que r_1 et r_2 sont des constantes qui sont solutions de l'équation caractéristique (IX.3.7).

De plus ces solutions φ_1 et φ_2 sont indépendantes car en effet

$$W(x) = e^{r_1 x} r_2 e^{r_2 x} - e^{r_2 x} r_1 e^{r_1 x} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x}$$

est non nul puisque $r_1 \neq r_2$. Les autres cas sont à faire en exercice.

Remarquons que dans le cas iii/ du théorème précédent les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et } r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

par suite,

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = e^{r_1 x} \quad \text{et} \quad \varphi_1 - i\varphi_2 = e^{r_2 x},$$

on peut donc traiter ce cas comme le cas i/, à condition de considérer les fonctions à valeurs complexes (une fonction complexe de la variable x est solution de (IX.3.6) si ses parties réelle et imaginaire le sont). Tenant compte du théorème IX.3.1, on peut alors formuler le résultat suivant :

Théorème IX.3.3. – *(i) Si l'équation caractéristique (IX.3.7) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, la solution générale (complexe) de l'équation homogène (IX.3.6) peut s'écrire*

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \textit{où} \quad \alpha \textit{ et } \beta \in \mathbb{C}. \tag{IX.3.8}$$

– *(ii) Si l'équation caractéristique (IX.3.7) admet une racine double r, alors la solution générale de l'équation homogène (IX.3.6) s'écrit*

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx} \quad \textit{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{IX.3.9}$$

– *(iii) Si r_1 et r_2 sont non réelles, et si l'on veut quand même les solutions réelles de homogène (IX.3.6), il suffit de prendre les parties réelle et imaginaire de (IX.3.8), on retombe sur les solutions obtenues en combinant les solutions indépendantes données dans le cas iii/ du théorème IX.3.2.*

Solutions des équations homogènes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IX.3.4 Solutions des équations non homogènes

Exercices :
Exercice A.1.21
Exercice A.1.22
Exercice A.1.23

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{IX.3.10}$$

Comme dans le cas des équations linéaires du 1^er^ ordre, on obtient directement des solutions particulières de l'équation (IX.3.10) si le second membre f prend certaines formes simples. La proposition IX.3.1 donne alors directement la solution générale sans passer par la méthode de variation des constantes.

1. *Second membre polynomial* - Pour résoudre l'équation

   $$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)$$

   où P est un polynôme de degré n, on cherche une solution particulière y_p sous la forme d'un polynôme.
   Pour le degré de y_p, il suffit de réfléchir : il est égal à n si $c \neq 0$, il est égal à $n+1$ si $c = 0, b \neq 0$, il est égal à $n+2$ si $b = c = 0, a \neq 0$.
2. *Second membre de la forme* $A\cos\beta x + B\sin\beta x$ - Il faut distinguer deux cas :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(a) $\cos \beta x$ n'est pas solution de l'équation homogène : on cherche alors une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme :

$$y_p(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x.$$

(b) $\cos \beta x$ est une solution de l'équation homogène : on cherche alors une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme :

$$y_p(x) = x(C \cos \beta x + D \sin \beta x).$$

3. *Second membre de la forme* $e^{\alpha x}\varphi(x)$ - On fait le changement de variable

$$y_p(x) = u(x)e^{\alpha x},$$

ce qui permet d'éliminer $e^{\alpha x}$. Si $\varphi(x)$ est un polynôme ou une combinaison linéaire de sinus et cosinus, l'équation vérifiée par u se ramène aux cas précédents.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre IX

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch9-Exercice1

L'équation différentielle du premier ordre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = y(x) - x^2,$$

admet comme solution

$$\varphi(x) = Ce^x + x^2 + 2x + 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A quoi correspondent ici les intervalles I et I' du cours ? Cette solution est-elle maximale ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch9-Exercice2

Les équations différentielles suivantes sont-elles linéaires ? Et si oui, sont-elles homogènes ou non homogènes ?

$$y''(x) - 3y(x) + \sin x = 0, \tag{A.1.1}$$
$$y'^2(x) - y(x) = 0, \tag{A.1.2}$$
$$y'^2(x) - y^2(x) = 0, \tag{A.1.3}$$
$$y'^2(x) - y^2(x) = x^2. \tag{A.1.4}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch9-Exercice3

Soit l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$ et soient A et $\hat{A}$ deux primitives de $a(x)$. Donner les solutions en fonction de A puis de $\hat{A}$ et montrer que "changer de primitive revient à changer de constante".

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch9-Exercice4

Montrer que l'unique solution de

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

s'écrit

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$

En déduire que si une solution de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch9-Exercice5

Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = 0.$$

retour au cours

Solution

Exercice A.1.6 Ch9-Exercice6

Calculer

$$S(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x \, dx.$$

En déduire la solution générale de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch9-Exercice7

Donner une solution particulière (évidente) de

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

En déduire la solution générale de cette équation.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch9-Exercice8

Donner une soution particulière de

$$y'(x) + 2y(x) = x.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch9-Exercice9

Donner une solution particulière de

$$y'(x) - ay(x) = 2e^{\alpha x}, \quad \alpha \neq a$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch9-Exercice10

Donner une solution particulière de

$$y'(x) - ay(x) = 2e^{ax}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 ch9-Exercice11

Donner une solution particulière de

$$y'(x) - y(x) = \cos 2x.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch9-Exercice12

Utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch9-Exercice13

Calculer, par la méthode de la variation de la constante, une solution particulière de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch9-Exercice14

Résoudre l'équation différentielle à variables séparables

$$y'(x) = e^{x+y(x)}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch9-Exercice15

Soit à résoudre l'équation de Bernoulli

$$x^2y' + y + y^2 = 0.$$

Quel est le changement de fonction inconnue ? Quelle est l'équation différentielle en z ainsi obtenue ? La résoudre et en déduire y.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.16 Ch9-Exercice16

Résoudre l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}.$$

On vérifiera que $w(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.17 Ch9-Exercice17

Montrer que les fonctions $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ $(\omega \neq 0)$ sont indépendantes, puis que les fonctions $e^{\omega x}$ et $e^{-\omega x}$ $(\omega \neq 0)$ sont indépendantes.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch9-Exercice18

Soient deux fonctions dérivables données f et g, montrer qu'il existe deux uniques fonctions dérivables $u(x)$ et $v(x)$ qui vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = u(x)\varphi(x) + v(x)\psi(x) \\ g(x) = u(x)\varphi'(x) + v(x)\psi'(x) \end{array} \right.$$

si l'on suppose que les fonctions φ et ψ sont indépendantes.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch9-Exercice19

Soit l'équation différentielle homogène

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

et soit l'équation caractéristique associée

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{A.1.5}$$

Montrer qu'un couple de solutions indépendantes de l'équation homogène est donné par :

- i/ $\Delta = 0$ $\varphi_1(x) = e^{r_0 x}$ et $\varphi_2(x) = xe^{r_0 x}$ où $r_0 = -\frac{b}{2a}$ est la racine double de (A.1.5),
- ii/ $\Delta < 0$ $\varphi_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \cos \omega x$ et $\varphi_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \sin \omega x$ avec $\omega = \sqrt{-\Delta}/(2a)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

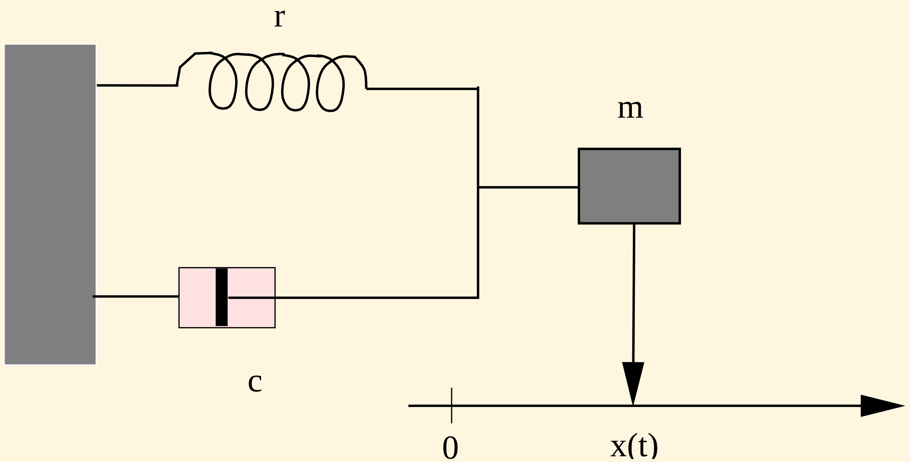

FIG. A.1.1 – l'oscillateur mécanique

Exercice A.1.20 Ch9-Exercice20

Soit le système mécanique suivant En l'absence de force appliquée le mouvement de la masse m est régi par l'équation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Rx = 0.$$

Étudier les solutions réelles du système lorsque t tend vers $+\infty$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch9-Exercice21

Soit l'équation différentielle

$$y'' - y = x^2 - x.$$

Donner les solutions de l'équation homogène associée, puis chercher une solution particulière.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch9-Exercice22

Soit l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Faire un changement de fonction inconnue afin de se ramener à une équation différentielle avec un second membre polynômial.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch9-Exercice23

Résoudre les équations différentielles

$$y'' - 2y' + 5y = 17\cos 2x,$$

et

$$y'' + 4y = -4\sin 2x.$$

(Donner la solution générale de l'équation homogène puis rechercher les solutions particulières.)

retour au cours

Solution

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD9-Exercice1

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle la solution est définie

1. $$y' + \frac{x+2}{x} y = \frac{e^x}{x^2}.$$

2. $$y' + y = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. $$xy' + (3x+1)y = e^{-3x}.$$

   On prendra le soin de normaliser l'équation différentielle et de prolonger sa solution, si possible, en une solution maximale, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponses : C_1, C_2 et C sont des constantes réelles, on obtient :

$$y(x) = C_1 \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2} \text{ pour } x \in]0, +\infty[, \quad y(x) = C_2 \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2} \text{ pour } x \in]-\infty, 0[.$$

$$y(x) = (C + \ln(e^x + e^{-x}))e^{-x}.$$

$$y(x) = C_1 \frac{e^{-3x}}{x} + e^{-3x} \text{ pour } x \in]0, +\infty[, \quad y(x) = C_2 \frac{e^{-3x}}{x} + e^{-3x} \text{ pour } x \in]-\infty, 0[.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1
TD9-Exercice1

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3		
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD9-Exercice2

1. Déterminer les trois réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$x(x^2-1)y' + 2y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD9-Exercice3

1. Résoudre les équations à variables séparables suivantes :
   (a) $y' = 1 + y^2$.
   (b) $9yy' + 4x = 0$.
   (c) $y' = -\frac{x}{y}$.
   (d) $y' = x^2y + x^2$.
2. (a) On considère l'équation différentielle dite *homogène*

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

   On fait le changement de fonction inconnue $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Montrer que l'équation précédente est équivalente à l'équation différentielle à variables séparables

$$\frac{u'}{g(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

   (b) En déduire les solution de l'équation différentielle

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

Exercice A.2.3
TD9-Exercice3

Question 1 Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.4 TD9-Exercice4

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. Second membre polynomial

$$2y'(x) + 3y(x) = 3 + 4x,$$

2. Second membre exponentiel

$$2y'(x) + 3y(x) = e^{4x},$$

3. Second membre trigonométrique

$$Li'(t) + Ri(t) = E \sin \omega t.$$

Réponses : $y(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9} + \frac{4x}{3}$, $y(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{11}e^{4x}$,
$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} - \frac{LE\omega}{L^2\omega^2+R^2} \cos \omega t + \frac{RE}{L^2\omega^2+R^2} \sin \omega t.$

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD9-Exercice5

On veut résoudre l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2,\ x > 0. \tag{E}$$

1. Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation différentielle (E) en

$$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1,\ x > 0 \tag{E$_1$}$$

3. Résoudre (E$_1$) et en déduire toutes les solutions de (E).

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD9-Exercice6

Résoudre

1. $$y'' + 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^{-x}.$$

2. $$y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x}.$$

Réponses : C_1 et C_2 sont des constantes réelles, on obtient :

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right).$$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + xe^{3x}.$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD9-Exercice7

Résoudre

$$y'' + y' = \sin^3 x.$$

Réponse : C_1 et C_2 sont des constantes réelles, on obtient :

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{3}{8}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{40}\sin 3x + \frac{1}{120}\cos 3x.$$

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD9-Exercice8

1. Utiliser la décomposition en éléments simples de
$$q(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2(x+1)}$$
pour calculer les primitives de $q(x)$.
2. Soit l'équation différentielle
$$x^2 z'(x) + x(x+2)z(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2(x+1)} e^{-x}.$$
   (a) Donner la solution $z_h(x)$ de l'équation sans second membre.
   (b) Utiliser la méthode de la variation de la constante pour calculer la solution de l'équation avec second membre (utiliser la question 1).
3. Soit l'équation différentielle
$$xy''(x) + xy'(x) - y(x) = h(x).$$
   (a) Déterminer une solution très simple $y_p(x)$ de l'équation sans second membre.
   (b) On effectue le changement de variables $y(x) = xC(x)$. Montrer que l'on obtient une équation différentielle de la forme
$$\alpha(x)C''(x) + \beta(x)C'(x) = h(x)$$
   où l'on donnera α et β.

Exercice A.2.8
TD9-Exercice8

(c) On prend $h(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2(x+1)} e^{-x}$. Montrer que $C(x)$ se met sous la forme

$$C(x) = \int_1^x f(t)dt + C(1)$$

où l'on donnera l'expression de f.

Le calcul exact de $\int_1^x f(t)dt$ étant difficile (voire impossible !), que proposeriez-vous pour calculer une valeur approchée de $\int_1^x f(t)dt$ pour x donné ?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD9-Exercice9

1. Soit f une fonction, on note F une primitive de f. Utiliser une intégration par partie pour exprimer $\int F(t)dt$ à l'aide de $tF(t)$ et $\int tf(t)dt$.
2. (a) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$f_1(t) = \frac{2t^2+2t+1}{(1+t)t^2}, \qquad f_2(t) = \frac{2t^2+2t+1}{(1+t)t}.$$

   (b) En déduire leurs primitives F_1 et F_2.
3. (a) Calculer une primitive de

$$F_1(t) = \ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|1+t| + C_1.$$

   (b) Retrouver ce résultat en utilisant les questions 1 et 2.
4. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \frac{2t^2+2t+1}{(1+t)t^2}e^{2t}.$$

   On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = k(t)e^{2t}$ et surtout utiliser les calculs des questions précédentes.
5. (a) Résoudre l'équation différentielle $y''(t)+ay'(t)+4y(t) = 0$. Discuter en fonction du paramètre réel a.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(b) Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + ay'(t) + 4y(t) = e^{2t}$. Discuter en fonction du paramètre réel a.

Solution

Exercice A.2.9
TD9-Exercice9

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre IX

Exemple B.1.1 Exemples de modélisation

On dispose d'un capital z_0 que l'on souhaite placer, sachant que α est le taux d'intérêt par unité de temps Δt. L'évolution du capital, avec capitalisation des intérêts par tranche Δt, est régi par l'équation :

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \alpha z(t)\Delta t, \tag{B.1.1}$$

où $z(t)$ est le capital disponible au temps t (on a donc $z(0) = z_0$). Si l'on divise les deux membres de (B.1.1) par Δt et que l'on fait tendre Δt vers 0 on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dz}{dt}(t) = \alpha z(t). \tag{B.1.2}$$

Ce type d'équation apparaît dans d'autres contextes, comme celui de la dynamique des populations où α représente le taux d'accroissement (si $\alpha > 0$, sinon c'est le taux de diminution) de la population. En général α traduit la différence entre les nombres de naissances et de décès et il est souvent fonction de $z(t)$ qui représente le nombre d'individus de la population à l'instant t.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Mise sous forme d'équation différentielle d'ordre n

On veut résoudre l'équation

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

Cette équation n'est pas de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, mais elle s'y ramène en divisant par $\cos x$, à condition que $\cos x$ ne soit pas nul au point x considéré. Ceci nous oblige à considérer séparément des intervalles de la forme $I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$. Il est à noter que la fonction $\cos x$ garde un signe constant sur chacun de ces intervalles. L'équation s'écrit alors :

$$y'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} y(x) + \frac{1}{\cos x},\ \forall x \in I_k$$

où k parcourt l'ensemble $\mathbb{Z}$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3 Non unicité de la solution d'une équation différentielle

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y(x)}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{B.1.3}$$

Cette équation (où $f(x, y) = \sqrt{y}$ est définie, continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) admet la solution évidente

$$\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs cette équation admet les solutions suivantes, si C est une constante positive :

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{(x-C)^2}{4} & \text{pour} \quad x \geq C \\ \psi(x) = 0 & \text{pour} \quad x < C \end{cases}$$

On vient donc de voir que le problème (B.1.4) admet plusieurs solutions distinctes φ et ψ, ce qui montre la non unicité de la solution. Mais ici la condition de Cauchy-Lipschitz n'est pas satisfaite.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.4 Non unicité de la solution d'une équation différentielle

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y(x)}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{B.1.4}$$

Cette équation (où $f(x, y) = \sqrt{y}$ est définie, continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) admet la solution évidente

$$\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs cette équation admet les solutions suivantes, si C est une constante positive :

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{(x-C)^2}{4} & \text{pour} \quad x \geq C \\ \psi(x) = 0 & \text{pour} \quad x < C \end{cases}$$

On vient donc de voir que le problème (B.1.4) admet plusieurs solutions distinctes φ et ψ, ce qui montre la non unicité de la solution. Mais ici la condition de Cauchy-Lipschitz n'est pas satisfaite.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.5 Équation différentielle à variables séparables

Soit l'équation différentielle à variables séparables

$$x^3y'(x) + y^3(x) = 0.$$

Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, cette équation est équivalente à

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x^3},$$

ce qui, intégré, donne

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2x^2} + K, \quad K \in]-\infty, 0[$$

soit, en posant $C = -2K$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{Cx^2 - 1}}, \quad C \in]0, +\infty[$$

qui est définie sur $\{x \in \mathbb{R},\, Cx^2 > 1\}$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre IX

Document C.1.1 Remarques sur les équations différentielles

Voici quelques remarques

1. Les lois de la physique et de la mécanique, notamment, conduisent souvent, en mathématiques, à l'étude d'équations différentielles. Mais ces équations ne suffisent pas pour déterminer complètement les fonctions inconnues. Pour choisir entre toutes les solutions possibles, il est nécessaire d'introduire d'autres données qui dépendent de la nature du problème. Par exemple, on peut déterminer complètement la trajectoire d'une particule, soumise à une force connue, si on connaît les conditions initiales, c'est-à-dire la position et la vitesse à un instant t_0 (appelé instant initial).
2. Les questions d'existence et d'unicité de solutions ne sont pas les seules étudiées à propos d'une équation différentielle. Le comportement d'une solution, par exemple quand la variable t tend vers l'infini, est une autre question essentielle (il s'agit de prévoir le comportement d'un système physique - celui modélisé par l'équation différentielle). Il faut toutefois raison garder. La modélisation permet d'appréhender le réel dans un cadre bien précis (i.e. sous un ensemble d'hypothèses bien précises), et ne décrit jamais la totalité des phénomènes complexes rencontrés. Donc, la solution une fois obtenue doit être confrontée avec les expériences physiques. Mais ceci est une autre histoire, et ne contredit nullement l'affirmation d'un célèbre physicien (Wigner) sur
   “ l'efficacité déraisonable des mathématiques dans les sciences physiques ”...

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Problème de Cauchy

Il s'agit pour une équation d'ordre 1 de se donner la valeur de la solution cherchée en un point t_0. On cherche ainsi une solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ vérifiant en outre l'égalité $y(t_0) = y_0$. On appelle **problème de Cauchy** le problème de résolution des équations

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{array}\right. \tag{C.1.1}$$

où y_0 est donné.
Pour une équation d'ordre 2, on se donnera les valeurs, à l'instant t_0, de la solution y et de sa dérivée première. Le **problème de Cauchy** est alors

$$\left\{\begin{array}{l} y'' = f(t,y,y') \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \end{array}\right. \tag{C.1.2}$$

où y_0 et y_1 sont des réels donnés.
Enfin, pour une équation d'ordre n, on se donnera les valeurs à l'instant t_0 de $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.
Notons bien que l'on peut imposer d'autres types de conditions. Par exemple, pour une équation différentielle d'ordre 2, on pourra se donner les valeurs de la solution aux extrémités de l'intervalle qui nous intéresse. On appelle **conditions aux limites** ou **conditions aux bords** ce type de conditions.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Le concept de linéarité

Pour illustrer le concept de linéarité, considérons le système (cela peut être un dispositif mécanique ou électronique par exemple) qui à l'entrée v fait correspondre la sortie y. Notons G la correspondance entre v et y :

$$y = G(v)$$

On dit que ce système est **linéaire** s'il possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &G(v + w) = G(v) + G(w), \\ &G(\alpha v) = \alpha G(v), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En d'autres termes cela signifie que :

- la sortie correspondant à l'entrée $(v + w)$ est égale à celle obtenue en additionnant la sortie correspondant à v à celle correspondant à w,
- si on multiplie l'entrée par un facteur α la sortie correspondante est multipliée par le même facteur α.

Si la relation entre l'entrée $v(t)$ et la sortie $y(t)$ est donnée par la solution de l'équation

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + bv(t), \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \tag{C.1.3}$$

alors la relation entrée-sortie ainsi définie est clairement linéaire. On dit que l'équation différentielle (C.1.3) est **linéaire**.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Le concept de stabilité

Une question importante dans l'étude des équations différentielles concerne le comportement de leurs solutions. En particulier, celui-ci :

Définition C.1.1. *On dit que les solutions d'une équation différentielle sont* **stables** *si, quelle que soit la donnée initiale, le problème de Cauchy associé admet une solution définie sur* $[x_0, \infty[$*, tendant vers 0 quand* x *tend vers* $+\infty$*.*

Pour l'équation linéaire $y'(x) = a(x)y(x)$, on a donc stabilité des solutions si et seulement si, quel que soit x_0,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt = -\infty$$

C'est par exemple le cas si a est une constante strictement négative. Pour les équations non linéaires, cette question de stabilité n'est pas si aisément résoluble.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Équations d'ordre 2 : Méthode de variation des constantes

On cherche une solution particulière y_p de l'équation

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{C.1.4}$$

Soient φ et ψ deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

On reprend la démonstration du théorème IX.3.1. On cherche y_p sous la forme :

$$\begin{cases} y_p(x) = u(x)\varphi(x) + v(x)\psi(x) \\ y_p'(x) = u(x)\varphi'(x) + v(x)\psi'(x) \end{cases}$$

Cette fois y_p vérifie l'équation avec second membre, ce qui conduit au système suivant

$$u'\varphi + v'\psi = 0, \quad u'\varphi' + v'\psi' = f.$$

Ceci permet de calculer u' et v' en fonction des fonctions connues φ, ψ et f. Soient $u_0(x)$ et $v_0(x)$ des primitives particulières de u' et v', on a donc

$$y_p(x) = u_0(x)\varphi(x) + v_0(x)\psi(x).$$

Cette méthode de calcul d'une solution particulière de l'équation (C.1.4), à partir de deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée, s'appelle, comme dans le cas des équations différentielles linéaires du 1er ordre, la *méthode de variation des constantes.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On obtient finalement la solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(x) = (A + u_0(x))\varphi(x) + (B + v_0(x))\psi(x),$$

A et B sont des constantes quelconques.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

Le second membre est défini $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où $I = \mathbb{R}$. La solution est définie $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où $I' = \mathbb{R}$. On a donc $I = I'$ et la solution est maximale.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

L'équation différentielle $y''(x) - 3y(x) + \sin x = 0$ est linéaire et non homogène.
L'équation différentielle $y'^2(x) - y(x) = 0$ est non linéaire.
L'équation différentielle $y'^2(x) - y^2(x) = 0$ est a priori non linéaire mais elle se ramène à la résolution de deux équations linéaires homogènes $y'(x) - y(x) = 0$ et $y'(x) + y(x) = 0$.
L'équation différentielle $y'^2(x) - y^2(x) = x^2$ est non linéaire et ne se factorise pas en équations différentielles linéaires.

Retour à l'exercice ▲

Les solutions s'écrivent respectivement

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \text{ et } y(x) = \hat{C}e^{\hat{A}(x)}.$$

Or, puisque A et $\hat{A}$ sont deux primitives de $a(x)$, on a

$$\hat{A}(x) = A(x) + \lambda.$$

On obtient donc

$$y(x) = \hat{C}e^{\lambda}e^{A(x)}.$$

On obtient donc les solutions en fonction de A mais avec une constante "différente", ce qui redonne évidemment les mêmes solutions puisque les constantes peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

La solution générale de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'écrit $y(x) = Ce^{A(x)}$. Si on utilise la condition $y(x_0) = y_0$, on obtient

$$Ce^{A(x_0)} = y_0$$

ce qui donne

$$C = y_0 e^{-A(x_0)},$$

que l'on remplace dans la solution

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$

Si une solution s'annule en un point, cela signifie qu'il existe x_0 tel que $y(x_0) = 0$. On obtient donc pour solution $y(x) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

On a la solution nulle, pour obtenir les autres solutions, on peut écrire l'équation (en séparant les variables) :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2.$$

Si on intègre

$$\ln |y(x)| = 2x + K,$$

ce qui donne

$$|y(x)| = e^K e^{2x}$$

soit

$$y(x) = \pm e^K e^{2x}$$

Enfin en regroupant avec la solution nulle

$$y(x) = Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Retour à l'exercice ▲

Le calcul des primitives se fait par intégration par parties :

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-2x}\left(-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right) - \int(-2)e^{-2x}\left(-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right)dx, \\ &= -\frac{1}{\omega}e^{-2x}\cos\omega x - \frac{2}{\omega}e^{-2x}\frac{\sin\omega x}{\omega} + \frac{2}{\omega}\int(-2)e^{-2x}\frac{\sin\omega x}{\omega}\,dx, \\ &= -\frac{1}{\omega}e^{-2x}\cos\omega x - \frac{2}{\omega^2}e^{-2x}\sin\omega x - \frac{4}{\omega^2}S(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$S(x) = -\frac{2}{\omega^2+4}e^{-2x}\sin\omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4}e^{-2x}\cos\omega x.$$

Dans l'exercice A.1.5, vous avez montré que la solution de l'équation homogène, associée à

$$y'(x) = 2y(x) + \sin\omega x$$

est

$$y_h(x) = Ce^{2x}.$$

Pour obtenir la solution générale, on va utiliser

$$S(x) = \int e^{-2x}\sin\omega x\,dx.$$

La solution générale est

$$y(x) = (S(x)+C)e^{2x}$$

soit

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{2}{\omega^2+4}\sin\omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4}\cos\omega x.$$

Retour à l'exercice ▲

Puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a donc la solution particulière $y_p(x) = \sin x$. La solution générale est donc

$$y(x) = C \cos x + \sin x,$$

puisque l'on a déjà démontré (voir le paragraphe Calcul pratique-équ. dif. 1er ordre) que

$$y_h(x) = C \cos x.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax + B$ (puisque le second membre est de degré 1), ce qui conduit à

$$A + 2Ax + 2B = x$$

soit

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{4}$$

d'où une solution particulière

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},$$

et la solution générale

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

On cherche la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}$$

et on remplace dans l'équation, soit

$$A\alpha e^{\alpha x} - aAe^{\alpha x} = 2e^{\alpha x},$$

ou

$$A(\alpha - a) = 2.$$

Puisque $\alpha \neq a$, une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = \frac{2}{\alpha - a} e^{\alpha x}$$

et la solution générale est

$$y(x) = Ce^{ax} + \frac{2}{\alpha - a} e^{\alpha x}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

On cherche la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = B(x)e^{ax}$$

et on remplace dans l'équation, soit

$$\big(B'(x)e^{ax} + aB(x)e^{ax}\big) - aB(x)e^{ax} = 2e^{ax}$$

ce qui donne $B'(x) = 2$, donc $B(x) = 2x$ convient. Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = 2xe^{ax}$$

et la solution générale est

$$y(x) = (C + 2x)e^{ax}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On prend
$$y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$
et on remplace dans l'équation
$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x - A\cos 2x - B\sin 2x = \cos 2x$$
ce qui conduit au système
$$\begin{cases} -A + 2B = 1, \\ 2A + B = 0, \end{cases}$$
qui admet comme solution
$$A = -\frac{1}{5}, \qquad B = \frac{2}{5}.$$
Une solution particulière est donc
$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x,$$
et la solution générale
$$y(x) = Ce^x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

La solution générale (voir le paragraphe Calcul pratique-équ. dif. 1er ordre) de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = C\cos x.$$

Posons

$$y_p(x) = \phi(x)\cos x$$

et reportons dans l'équation avec second membre, on trouve :

$$\phi'(x)\cos^2 x = 1$$

qui admet comme solution

$$\phi(x) = \tan x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière ($C = 0$) est donc

$$y_p(x) = \tan x \cos x = \sin x.$$

Et la solution générale s'obtient comme la somme de y_h et y_p :

$$y(x) = C\cos x + \sin x.$$

Si l'on considère directement toutes les primitives ϕ, on obtient

$$y(x) = (\tan x + C)\cos x = \sin x + C\cos x$$

ce qui redonne la solution générale.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

Puisque la solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{2x},$$

on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = \phi(x)e^{2x}$$

et on remplace dans l'équation

$$\phi'(x)e^{2x} + \phi(x)2e^{2x} = 2\phi(x)e^{2x} + \sin \omega x$$

soit

$$\phi(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x.$$

Ce calcul, comme nous l'avons déjà dit revient au calcul de l'exercice A.1.6.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Puisque l'exponentielle ne s'annule pas, on a

$$y'(x)e^{-y(x)} = e^x.$$

On peut prendre la primitive de chacun des membres

$$-e^{-y(x)} = e^x + C,$$

ce qui impose à $e^x + C$ d'être négative, soit $C < 0$ et $x \in]-\infty, \ln(-C)[$. On obtient donc

$$y(x) = -\ln(-e^x - C), \quad x \in]-\infty, \ln(-C)[, \quad C < 0.$$

Retour à l'exercice ▲

$y = 0$ est solution évidente, cherchons les autres solutions. Puisque $\alpha = 2$, le changement de fonction inconnue est

$$z = \frac{1}{y}$$

ce qui donne l'équation différentielle en z :

$$x^2 z' - z - 1 = 0$$

dont la solution générale est

$$z(x) = Ce^{-1/x} - 1.$$

En effet l'équation homogène a pour solution $z_h(x) = Ce^{-1/x}$ et $z_p(x) = -1$ est une solution particulière évidente. Les solutions de l'équation de Bernoulli sont donc

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-1/x} - 1}, \text{ et } y(x) = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On pose $u = y - w$ et on obtient l'équation en u

$$u' - \frac{u}{x} - u^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli pour $n = 2$.

On pose alors $z = \frac{1}{u}$ et on obtient l'équation

$$-z' - \frac{z}{x} - 1 = 0$$

qui est une équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre que l'on résout. Tout calcul fait, on trouve

$$y = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + C}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

Dans le premier cas

$$W(x) = \omega(\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x) = \omega.$$

Dans le deuxième cas

$$W(x) = -e^{\omega x} e^{-\omega x} - e^{\omega x} e^{-\omega x} = -2.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Multiplions la première équation par $\psi'(x)$ et la seconde par $\psi(x)$ et faisons la différence des équations résultantes, nous obtenons :

$$\left\{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)\right\} u(x) = W(x)u(x) = f(x)\psi'(x) - g(x)\psi(x)$$

ce qui donne, puisque $W(x) \neq 0$ (les fonctions φ et ψ sont supposées indépendantes)

$$u(x) = \frac{f(x)\psi'(x) - g(x)\psi(x)}{W(x)}$$

De plus u est dérivable comme somme produit quotient de fonctions dérivables, d'autre part W ne s'annule pas. Résultat similaire pour $v(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Vérifions cas par cas

- i/ Si $\Delta = 0$, alors $\varphi_1(x) = e^{r_0 x}$ et $\varphi_2(x) = xe^{r_0 x}$ sont indépendantes car

$$W(x) = e^{r_0 x}(e^{r_0 x} + xr_0 e^{r_0 x}) - xe^{r_0 x} r_0 e^{r_0 x}$$

soit

$$W(x) = e^{2r_0 x}$$

qui est non nul.

- ii/ Si $\Delta < 0$, alors $\varphi_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x$ et $\varphi_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x$ sont indépendantes car

$$\begin{aligned} W(x) &= e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x + \omega e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x\right) && \text{(C.1.5)} \\ &- e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x - \omega e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x\right) && \text{(C.1.6)} \end{aligned}$$

soit

$$W(x) = \omega e^{-\frac{b}{a}x}$$

qui est non nul puisque ω est non nul.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

L'équation caractéristique est donnée par

$$mr^2 + Cr + R = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = C^2 - 4Rm.$$

- Si $\Delta > 0$,les racines réelles sont

  $$r_1 = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4Rm}}{2m}, \quad r_2 = \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4Rm}}{2m}.$$

  Les solutions réelles sont dans ce cas

  $$x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}$$

  et $x(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ car C, R et m sont des constantes physiques strictement positives et donc les deux racines sont strictement négatives.
- Si $\Delta = 0$, la racine réelle double est

  $$r_0 = -\frac{C}{2m}.$$

  Les solutions réelles sont dans ce cas

  $$x(t) = (\alpha + \beta t)e^{r_0 t}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}$$

  et $x(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.
- Si $\Delta < 0$, alors $\omega = \frac{\sqrt{4Rm - C^2}}{2m}$ et les solutions réelles sont

  $$x(t) = e^{-\frac{C}{2m}t}(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

  Elles tendent évidemment aussi vers 0 quand t tend vers $+\infty$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

L'équation caractéristique a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2

$$\varphi = Ax^2 + Bx + C.$$

On remplace dans l'équation, et on trouve

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2 - x$$

ce qui donne $A = -1$, $B = 1$, $C = -2$, d'où la solution générale

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x} - x^2 + x - 2.$$

Retour à l'exercice ▲

On fait le changement de fonction

$$y(x) = u(x)e^x,$$

et on obtient après calculs

$$u''(x)e^x = xe^x, \quad \text{soit} \;\; u''(x) = x.$$

De manière évidente cela donne

$$u(x) = \frac{x^3}{6} + \alpha x + \beta,$$

d'où la solution générale en y

$$y(x) = (\frac{x^3}{6} + \alpha x + \beta)e^x.$$

La forme de cette solution est due au fait que $r = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique.

Retour à l'exercice ▲

1. La solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

   ce qui montre que $\cos 2x$ n'est pas solution de l'équation homogène. On cherche alors la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

   on remplace dans l'équation et on obtient

$$y_p(x) = \cos 2x - 4 \sin 2x.$$

2. La solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

   et donc $\sin 2x$ est solution de l'équation sans second membre ce qui donne une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x(a \cos 2x + b \sin 2x)$$

   ce qui donne après calculs

$$y_p(x) = x \cos 2x.$$

Retour à l'exercice ▲

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?
Déterminer la solution générale de l'équation homogène.
Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.
En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Les différentes fonctions sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on va donc résoudre sur ces intervalles.

Lors de la méthode de variation de la constante "$k(x)$", vérifier que dans l'équation les termes en $k(x)$ se simplifient. Si ce n'est pas le cas, on a fait une erreur. Peut-être dans l'expression de la solution générale de l'équation homogène ?

Retour à l'exercice ▲

On obtient très facilement $y_h(x)$, puis $k'(x) = e^{2x}$.

Ce qui permet de terminer les calculs, vérifier la réponse.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.1

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Les différentes fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, on va donc résoudre sur $\mathbb{R}$.

Lors de la méthode de variation de la constante "$k(x)$", vérifier que dans l'équation les termes en $k(x)$ se simplifient. Si ce n'est pas le cas, on a fait une erreur. Peut-être dans l'expression de la solution générale de l'équation homogène ?

Retour à l'exercice ▲

On obtient très facilement $y_h(x)$, puis

$$k'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Comment calculer $k(x)$?

Retour à l'exercice ▲

En général, lorsque l'on a une fraction rationnelle dans laquelle la variable est e^x, la primitive se calcule en effectuant le changement de variable $t = e^x$.

Ne pas oublier de calculer dt.

Faire ce changement de variable, on débouche sur le calcul de la primitive d'une fraction rationnelle en t, on sait faire.

Conduire le calcul jusqu'au bout pour obtenir $k(x)$.

Maintenant regarder plus attentivement $k'(x)$ et constater que dans le cas particulier ici, on

$$k'(x) = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

ce qui permet d'obtenir $k(x)$ rapidement.

Comparer les expressions obtenues par les deux méthodes et constater qu'elles sont égales.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 2, Exercice A.2.1

$k(x)$ obtenu d'une façon ou d'une autre permet d'obtenir y_p, on connait y_h, on en déduit la solution générale $y = y_h + y_p$. Comparer avec la solution affichée.

Retour à l'exercice ▲

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Après normalisation, les différentes fonctions sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on va donc résoudre sur ces intervalles.

Lors de la méthode de variation de la constante $k(x)$, vérifier que dans l'équation les termes en $k(x)$ se simplifient. Si ce n'est pas le cas, on a fait une erreur. Peut-être, dans l'expression de la solution générale de l'équation homogène ?

Retour à l'exercice ▲

On obtient très facilement $y_h(x)$, puis $k'(x) = 1$.

Ce qui permet de terminer les calculs, vérifier la réponse.

Retour à l'exercice ▲

Existe-t-il une solution qui soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

Retour à l'exercice ▲

Il faut prendre $C_1 = C_2 = 0$, on obtient la solution définie sur $\mathbb{R}$ $y(x) = e^{-3x}$, on a alors $y(0) = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Mettre toutes les fractions au même dénominateur

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

On obtient

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a + b - c}{x(x^2-1)}.$$

Il suffit ensuite d'identifier les coefficients du polynôme au numérateur

Retour à l'exercice ▲

On obtient le système

$$\left\{ \begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ b - c &= 0, \\ -a + b - c &= 1, \end{aligned} \right.$$

Retour à l'exercice ▲

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

On peut poser l'équation non-homogène

$$y' = -\frac{2}{x(x^2-1)}y + \frac{x}{x^2-1}$$

au choix, sur l'un des intervalles

$$I_1 =]-\infty, -1[,\ I_2 =]-1, 0[,\ I_3 =]0, 1[,\ I_4 =]1, +\infty[.$$

Retour à l'exercice ▲

On a $a(x) = -\dfrac{2}{x(x^2-1)}$ qui admet pour primitive, en utilisant la question 1

$$A(x) = \ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|,$$

ce qui donne pour solution de l'équation homogène

$$y_h(x) = C\frac{x^2}{x^2-1}.$$

Retour à l'exercice ▲

Avec la méthode de variation de la constante on obtient la solution particulière

$$y_p(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \ln |x|.$$

Retour à l'exercice ▲

Solutions : $y = \tan(x + C)$, $y = \pm\sqrt{C - \frac{4}{9}x^2}$, $y = \pm\sqrt{C - x^2}$, $y = Ce^{\frac{x^3}{3}} - 1$.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de poser $y(x) = xu(x)$ et de dériver

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(xu(x)) = u(x) + xu'(x),$$

ce qui donne

$$xu'(x) + u(x) = g(u(x)).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.3

On obtient

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{x}{y},$$

soit $g(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - u\right)$. Quelle est l'équation différentielle obtenue pour u ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.3

On obtient l'équation diffférentielle

$$-\frac{2u}{u^2+1}u' = \frac{1}{x}$$

qu'il suffit de résoudre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2b, Exercice A.2.3

On obtient $u(x) = \pm\sqrt{\frac{C}{x} - 1}$ **et puisque** $y(x) = xu(x)$

$$y(x) = \pm\sqrt{Cx - x^2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Donner la solution de l'équation sans second membre. On cherche la solution particulière y_p sous la forme d'un polynôme. Quel est son degré ?

Retour à l'exercice ▲

Solution : La solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x}.$$

La solution particulière est de la forme $y_p(x) = a + bx$, soit en remplaçant

$$2b + 3(a + bx) = 3 + 4x.$$

On en déduit alors les valeurs de a et b qui vérifient

$$2b + 3a = 3,\ 3b = 4.$$

Retour à l'exercice ▲

On cherche la solution particulière sous la forme $ae^{\alpha x}$. Que vaut α ?

Retour à l'exercice ▲

Solution : La solution particulière est de la forme $y_p(x) = ae^{4x}$, soit en remplaçant

$$(8a + 3a)e^{4x} = e^{4x},$$

ce qui donne $a = \frac{1}{11}$.

Retour à l'exercice ▲

On cherche la solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$.

Retour à l'exercice ▲

Solution : La solution de l'équation sans second membre est $i_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$. La solution particulière est de la forme $i_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, soit en remplaçant :

$$L(-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t) + R(a\cos\omega t + b\sin\omega t = E\sin\omega t$$

Il reste à identifier les coefficients des fonctions trigonométriques, soit

$$-La\omega + Rb = E,\ Lb\omega + Ra = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On trouve facilement $a = 3$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

Il suffit de calculer $y'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x - \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{1}{z^2}$ puis de remplacer y' et y dans l'équation (E), puis de multiplier l'équation obtenue par z^2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.5

La solution générale de l'équation homogène est donnée par $z_h(x) = C\frac{e^{-3x^2}}{x}$ et on obtient $z_p(x) = \frac{1}{6x}$ en utilisant la méthode de variation de la constante, qe qui donne

$$z(x) = C\frac{e^{-3x^2}}{x} + \frac{1}{6x}.$$

On en déduit facilement y.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.5

Puisque $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$**, on obtient**

$$y(x) = 3x - \frac{x}{Ce^{-3x^2} + \frac{1}{6}}.$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser l'équation caractéristique pour déterminer la solution générale de l'équation homogène.
Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre.
En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

On obtient y_h sans problème, dans les équations du second degré penser aux racines évidentes.

Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y_p(x) = z(x)e^{-x}$, de cette façon on se débarasse de e^{-x}. Déterminer l'équation vérifiée par $z(x)$ et ne pas oublier que l'on en cherche une solution particulière.

Retour à l'exercice ▲

Au vu de l'équation vérifiée par $z(x)$, on cherche $z(x)$ sous forme d'un polynôme de degré trois, vous comprenez pourquoi ?

Calculer $z(x)$ par identification, en déduire y_p puis y.

Comparer le résultat avec la réponse affichée.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser l'équation caractéristique pour déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

On obtient y_h sans problème, dans les équations du second degré penser aux racines évidentes.

Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y_p(x) = z(x)e^{3x}$, de cette façon on se débarasse de e^{3x}. Déterminer l'équation vérifiée par $z(x)$ et ne pas oublier que l'on en cherche une solution particulière.

Retour à l'exercice ▲

Au vu de l'équation vérifiée par $z(x)$, on cherche $z(x)$ sous forme d'un polynôme de degré un, vous comprenez pourquoi ? Il y a même une solution évidente.

En déduire y_p puis y.

Comparer le résultat avec la réponse affichée.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.7

Utiliser l'équation caractéristique pour déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.7

On obtient y_h sans problème, dans les équations du second degré penser aux racines évidentes.

Le second membre ne fait pas partie des seconds membres classiques cités dans le polycopié. Linéariser $\sin^3 x$ en utilisant par exemple les formules d'Euler.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.7

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

On obtient maintenant une somme de deux seconds membres "classiques", chercher une solution particulière pour chacun d'eux, puis en faire la somme, on obtient ainsi une solution particulière de l'équation de départ.

En déduire y, comparer avec le résultat affiché.

Retour à l'exercice ▲

1.
$$q(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1}, \quad \int q(x)\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + \ln(x+1)^2 + C.$$

2. Pour $x \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation par x^2. On est ainsi ramené à une équation linéaire du premier ordre. On obtient ainsi.

   (a)
$$z_h(x) = C\frac{e^{-x}}{x^2}.$$

   (b)
$$z(x) = C\frac{e^{-x}}{x^2} + \left(\frac{1}{x} + \ln|x| + \ln(x+1)^2\right)\frac{e^{-x}}{x^2}$$

   Nous voyons qu'il n'y a aucune possibilité de raccord en $x = 0$. Il suffit d'ailleurs de regarder l'équation de départ : elle ne peut pas être satisfaite en $x = 0$.

3. (a) Cette équation est linéaire du second ordre, mais les coefficients ne sont pas constants. On voit facilement comme le suggère l'énoncé que $y_p(x) = x$ est solution particulière de l' équation sans second membre.

   (b)
$$x^2C''(x) + x(x+2)C'(x) = h(x).$$

   (c) C' satisfait la même équation que z dans la question précédente, de sorte que
$$C(x) = \int_1^x z(t)\,dt + C(1).$$

   On pourra calculer une valeur approchée de l'intégrale, en utilisant une formule des rectangles.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.9

1.
$$\int F(t)\,dt = \int 1\,F(t)\,dt = -\int t f(t)\,dt + t\,F(t)$$

2. (a)
$$f_1(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}, \quad f_2(t) = 2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

(b)
$$F_1(t) = \ln|t(t+1)| - \frac{1}{t} + C_1, \quad F_2(t) = 2t + \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C_2.$$

3. (a)
$$\int F_1(t)\,dt = t\ln|t| - t - \ln|t| + (1+t)\ln|1+t| + C_1 t + C_2'.$$

(b) On remarque que $f_2(t) = t f_1(t)$, de sorte que d'après la première question, on a
$$\int F_1(t)\,dt = -\int t f_1(t)\,dt + t\,F_1(t) = -\int f_2(t)\,dt + t\,F_1(t) = t\,F_1(t) - F_2(t).$$

On vérifie que l'on retrouve bien ainsi le résultat précédent.

4. $k(t)$ satisfait l'équation :
$$k''(t) = \frac{2t^2+2t+1}{(1+t)t^2} = f_1(t)$$

dont la solution générale est
$$\int F_1(t)\,dt = t\ln(|t+t^2|) + \ln\left|\frac{1+t}{t}\right| + C_1't + C_2'.$$

5. (a) a a deux valeurs singulières -4 et 4 qui sont les deux valeurs donnant une racine double de l'équation caractéristique $r^2 + ar + 4 = 0$. Il vient ainsi :

- Si $a < -4$ ou $a > 4$, alors :

$$y(t) = \lambda e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-16}}{2}t} + \mu e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-16}}{2}t}$$

- Si $-4 < a < 4$, alors :

$$y(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right)$$

- Si $a = -4$, alors :

$$y(t) = \lambda e^{2t} + \mu t e^{2t}$$

- Si $a = 4$, alors :

$$y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t}$$

(b) Il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière $y_p(t)$. Le changement de fonction inconnue précédent donne :

$$k''(t) + (a+4)k'(t) + 2(a+4)k(t) = 1$$

dont une solution évidente pour $a \neq -4$ est $\dfrac{1}{2(a+4)}$. Si $a = -4$, une solution particulière est $\dfrac{t^2}{2}$.

Retour à l'exercice ▲