Exercices du chapitre IX avec corrigé succinct

Exercice IX.1 Ch9-Exercice1

L'équation différentielle du premier ordre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = y(x) - x^2,$$

admet comme solution

$$\varphi(x) = Ce^x + x^2 + 2x + 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A quoi correspondent ici les intervalles I et I' du cours ? Cette solution est-elle maximale ?

Solution : Le second membre est défini $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où $I = \mathbb{R}$. La solution est définie $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où $I' = \mathbb{R}$. On a donc $I = I'$ et la solution est maximale.

Exercice IX.2 Ch9-Exercice2

Les équations différentielles suivantes sont-elles linéaires ? Et si oui, sont-elles homogènes ou non homogènes ?

$$y''(x) - 3y(x) + \sin x = 0, \tag{1.1}$$
$$y'^2(x) - y(x) = 0, \tag{1.2}$$
$$y'^2(x) - y^2(x) = 0, \tag{1.3}$$
$$y'^2(x) - y^2(x) = x^2. \tag{1.4}$$

Solution : L'équation différentielle $y''(x) - 3y(x) + \sin x = 0$ est linéaire et non homogène.
L'équation différentielle $y'^2(x) - y(x) = 0$ est non linéaire.
L'équation différentielle $y'^2(x) - y^2(x) = 0$ est a priori non linéaire mais elle se ramène à la résolution de deux équations linéaires homogènes $y'(x) - y(x) = 0$ et $y'(x) + y(x) = 0$.
L'équation différentielle $y'^2(x) - y^2(x) = x^2$ est non linéaire et ne se factorise pas en équations différentielles linéaires.

Exercice IX.3 Ch9-Exercice3

Soit l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$ et soient A et $\hat{A}$ deux primitives de $a(x)$. Donner les solutions en fonction de A puis de $\hat{A}$ et montrer que "changer de primitive revient à changer de constante".

Solution : Les solutions s'écrivent respectivement

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \text{ et } y(x) = \hat{C}e^{\hat{A}(x)}.$$

Or, puisque A et $\hat{A}$ sont deux primitives de $a(x)$, on a

$$\hat{A}(x) = A(x) + \lambda.$$

On obtient donc
$$y(x) = \hat{C}e^{\lambda}e^{A(x)}.$$
On obtient donc les solutions en fonction de A mais avec une constante "différente", ce qui redonne évidemment les mêmes solutions puisque les constantes peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

Exercice IX.4 Ch9-Exercice4

Montrer que l'unique solution de
$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$
s'écrit
$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$
En déduire que si une solution de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

Solution : La solution générale de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'écrit $y(x) = Ce^{A(x)}$. Si on utilise la condition $y(x_0) = y_0$, on obtient
$$Ce^{A(x_0)} = y_0$$
ce qui donne
$$C = y_0 e^{-A(x_0)},$$
que l'on remplace dans la solution
$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$
Si une solution s'annule en un point, cela signifie qu'il existe x_0 tel que $y(x_0) = 0$. On obtient donc pour solution $y(x) = 0$.

Exercice IX.5 Ch9-Exercice5

Résoudre l'équation différentielle
$$y'(x) - 2y(x) = 0.$$
Solution : On a la solution nulle, pour obtenir les autres solutions, on peut écrire l'équation (en séparant les variables) :
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2.$$
Si on intègre
$$\ln|y(x)| = 2x + K,$$

ce qui donne

$$|y(x)| = e^K e^{2x}$$

soit

$$y(x) = \pm e^K e^{2x}$$

Enfin en regroupant avec la solution nulle

$$y(x) = Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice IX.6 Ch9-Exercice6

Calculer

$$S(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x \, dx.$$

En déduire la solution générale de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

Solution : Le calcul des primitives se fait par intégration par parties :

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & e^{-2x}\left(-\dfrac{\cos\omega x}{\omega}\right) - \displaystyle\int (-2)e^{-2x}\left(-\dfrac{\cos\omega x}{\omega}\right) dx, \\ & = & -\dfrac{1}{\omega}e^{-2x}\cos\omega x - \dfrac{2}{\omega}e^{-2x}\dfrac{\sin\omega x}{\omega} + \dfrac{2}{\omega}\displaystyle\int (-2)e^{-2x}\dfrac{\sin\omega x}{\omega}\, dx, \\ & = & -\dfrac{1}{\omega}e^{-2x}\cos\omega x - \dfrac{2}{\omega^2}e^{-2x}\sin\omega x - \dfrac{4}{\omega^2}S(x). \end{array}$$

On obtient donc

$$S(x) = -\frac{2}{\omega^2+4}e^{-2x}\sin\omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4}e^{-2x}\cos\omega x.$$

Dans l'exercice IX.5, vous avez montré que la solution de l'équation homogène, associée à

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x$$

est

$$y_h(x) = Ce^{2x}.$$

Pour obtenir la solution générale, on va utiliser

$$S(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x \, dx.$$

La solution générale est

$$y(x) = (S(x) + C)e^{2x}$$

soit

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{2}{\omega^2+4}\sin\omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4}\cos\omega x.$$

Exercice IX.7 Ch9-Exercice7

Donner une solution particulière (évidente) de

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

En déduire la solution générale de cette équation.

Solution : Puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a donc la solution particulière $y_p(x) = \sin x$. La solution générale est donc

$$y(x) = C\cos x + \sin x,$$

puisque l'on a déjà démontré (voir le paragraphe Calcul pratique-équ. dif. 1er ordre) que

$$y_h(x) = C\cos x.$$

Exercice IX.8 Ch9-Exercice8

Donner une soution particulière de

$$y'(x) + 2y(x) = x.$$

Solution : On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax + B$ (puisque le second membre est de degré 1), ce qui conduit à

$$A + 2Ax + 2B = x$$

soit

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{4}$$

d'où une solution particulière

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},$$

et la solution générale

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice IX.9 Ch9-Exercice9

Donner une solution particulière de

$$y'(x) - ay(x) = 2e^{\alpha x}, \ \ \alpha \neq a$$

Solution : On cherche la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}$$

et on remplace dans l'équation, soit

$$A\alpha e^{\alpha x} - aAe^{\alpha x} = 2e^{\alpha x},$$

ou

$$A(\alpha - a) = 2.$$

Puisque $\alpha \neq a$, une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = \frac{2}{\alpha - a} e^{\alpha x}$$

et la solution générale est

$$y(x) = Ce^{ax} + \frac{2}{\alpha - a} e^{\alpha x}.$$

Exercice IX.10 Ch9-Exercice10

Donner une solution particulière de

$$y'(x) - ay(x) = 2e^{ax}.$$

Solution : On cherche la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = B(x)e^{ax}$$

et on remplace dans l'équation, soit

$$(B'(x)e^{ax} + aB(x)e^{ax}) - aB(x)e^{ax} = 2e^{ax}$$

ce qui donne $B'(x) = 2$, donc $B(x) = 2x$ convient. Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = 2xe^{ax}$$

et la solution générale est

$$y(x) = (C + 2x)e^{ax}.$$

Exercice IX.11 ch9-Exercice11

Donner une solution particulière de

$$y'(x) - y(x) = \cos 2x.$$

Solution : On prend

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

et on remplace dans l'équation

$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x - A\cos 2x - B\sin 2x = \cos 2x$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} -A + 2B = 1, \\ 2A + B = 0, \end{cases}$$

qui admet comme solution

$$A = -\frac{1}{5}, \qquad B = \frac{2}{5}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x,$$

et la solution générale

$$y(x) = Ce^x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x.$$

Exercice IX.12 Ch9-Exercice12

Utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

Solution : La solution générale (voir le paragraphe Calcul pratique-équ. dif. 1er ordre) de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = C\cos x.$$

Posons

$$y_p(x) = \phi(x)\cos x$$

et reportons dans l'équation avec second membre, on trouve :

$$\phi'(x)\cos^2 x = 1$$

qui admet comme solution

$$\phi(x) = \tan x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière ($C = 0$) est donc

$$y_p(x) = \tan x \cos x = \sin x.$$

Et la solution générale s'obtient comme la somme de y_h et y_p :

$$y(x) = C\cos x + \sin x.$$

Si l'on considère directement toutes les primitives ϕ, on obtient

$$y(x) = (\tan x + C)\cos x = \sin x + C\cos x$$

ce qui redonne la solution générale.

Exercice IX.13 Ch9-Exercice13

Calculer, par la méthode de la variation de la constante, une solution particulière de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

Solution : Puisque la solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{2x},$$

on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = \phi(x)e^{2x}$$

et on remplace dans l'équation

$$\phi'(x)e^{2x} + \phi(x)2e^{2x} = 2\phi(x)e^{2x} + \sin \omega x$$

soit

$$\phi(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x.$$

Ce calcul, comme nous l'avons déjà dit revient au calcul de l'exercice IX.6.

Exercice IX.14 Ch9-Exercice14

Résoudre l'équation différentielle à variables séparables

$$y'(x) = e^{x+y(x)}.$$

Solution : Puisque l'exponentielle ne s'annule pas, on a

$$y'(x)e^{-y(x)} = e^x.$$

On peut prendre la primitive de chacun des membres

$$-e^{-y(x)} = e^x + C,$$

ce qui impose à $e^x + C$ d'être négative, soit $C < 0$ et $x \in]-\infty, \ln(-C)[$. On obtient donc

$$y(x) = -\ln(-e^x - C), \quad x \in]-\infty, \ln(-C)[, \quad C < 0.$$

Exercice IX.15 Ch9-Exercice15

Soit à résoudre l'équation de Bernoulli

$$x^2y' + y + y^2 = 0.$$

Quel est le changement de fonction inconnue ? Quelle est l'équation différentielle en z ainsi obtenue ? La résoudre et en déduire y.

Solution : $y = 0$ est solution évidente, cherchons les autres solutions. Puisque $\alpha = 2$, le changement de fonction inconnue est

$$z = \frac{1}{y}$$

ce qui donne l'équation différentielle en z :

$$x^2 z' - z - 1 = 0$$

dont la solution générale est

$$z(x) = Ce^{-1/x} - 1.$$

En effet l'équation homogène a pour solution $z_h(x) = Ce^{-1/x}$ et $z_p(x) = -1$ est une solution particulière évidente. Les solutions de l'équation de Bernoulli sont donc

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-1/x} - 1}, \text{ et } y(x) = 0.$$

Exercice IX.16 Ch9-Exercice16

Résoudre l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}.$$

On vérifiera que $w(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

Solution : On pose $u = y - w$ et on obtient l'équation en u

$$u' - \frac{u}{x} - u^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli pour $n = 2$.
On pose alors $z = \frac{1}{u}$ et on obtient l'équation

$$-z' - \frac{z}{x} - 1 = 0$$

qui est une équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre que l'on résout. Tout calcul fait, on trouve

$$y = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + C}.$$

Exercice IX.17 Ch9-Exercice17

Montrer que les fonctions $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ $(\omega \neq 0)$ sont indépendantes, puis que les fonctions $e^{\omega x}$ et $e^{-\omega x}$ $(\omega \neq 0)$ sont indépendantes.

Solution : Dans le premier cas

$$W(x) = \omega(\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x) = \omega.$$

Dans le deuxième cas

$$W(x) = -e^{\omega x} e^{-\omega x} - e^{\omega x} e^{-\omega x} = -2.$$

Exercice IX.18 Ch9-Exercice18

Soient deux fonctions dérivables données f et g, montrer qu'il existe deux uniques fonctions dérivables $u(x)$ et $v(x)$ qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = u(x)\varphi(x) + v(x)\psi(x) \\ g(x) = u(x)\varphi'(x) + v(x)\psi'(x) \end{array}\right.$$

si l'on suppose que les fonctions φ et ψ sont indépendantes.

Solution : Multiplions la première équation par $\psi'(x)$ et la seconde par $\psi(x)$ et faisons la différence des équations résultantes, nous obtenons :

$$\{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)\}\, u(x) = W(x)u(x) = f(x)\psi'(x) - g(x)\psi(x)$$

ce qui donne, puisque $W(x) \neq 0$ (les fonctions φ et ψ sont supposées indépendantes)

$$u(x) = \frac{f(x)\psi'(x) - g(x)\psi(x)}{W(x)}$$

De plus u est dérivable comme somme produit quotient de fonctions dérivables, d'autre part W ne s'annule pas. Résultat similaire pour $v(x)$.

Exercice IX.19 Ch9-Exercice19

Soit l'équation différentielle homogène

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

et soit l'équation caractéristique associée

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{1.5}$$

Montrer qu'un couple de solutions indépendantes de l'équation homogène est donné par :

- i/ $\Delta = 0$ $\varphi_1(x) = e^{r_0 x}$ et $\varphi_2(x) = xe^{r_0 x}$ où $r_0 = -\frac{b}{2a}$ est la racine double de (1.5),
- ii/ $\Delta < 0$ $\varphi_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x$ et $\varphi_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x$ avec $\omega = \sqrt{-\Delta}/(2a)$.

Solution : Vérifions cas par cas

- i/ Si $\Delta = 0$, alors $\varphi_1(x) = e^{r_0 x}$ et $\varphi_2(x) = xe^{r_0 x}$ sont indépendantes car

$$W(x) = e^{r_0 x}(e^{r_0 x} + xr_0 e^{r_0 x}) - xe^{r_0 x} r_0 e^{r_0 x}$$

soit

$$W(x) = e^{2r_0 x}$$

qui est non nul.

- ii/ Si $\Delta < 0$, alors $\varphi_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x$ et $\varphi_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x$ sont indépendantes car

$$\begin{aligned} W(x) &= e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x + \omega e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x\right) && (1.6) \\ &- e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\omega x - \omega e^{-\frac{b}{2a}x}\sin\omega x\right) && (1.7) \end{aligned}$$

soit

$$W(x) = \omega e^{-\frac{b}{a}x}$$

qui est non nul puisque ω est non nul.

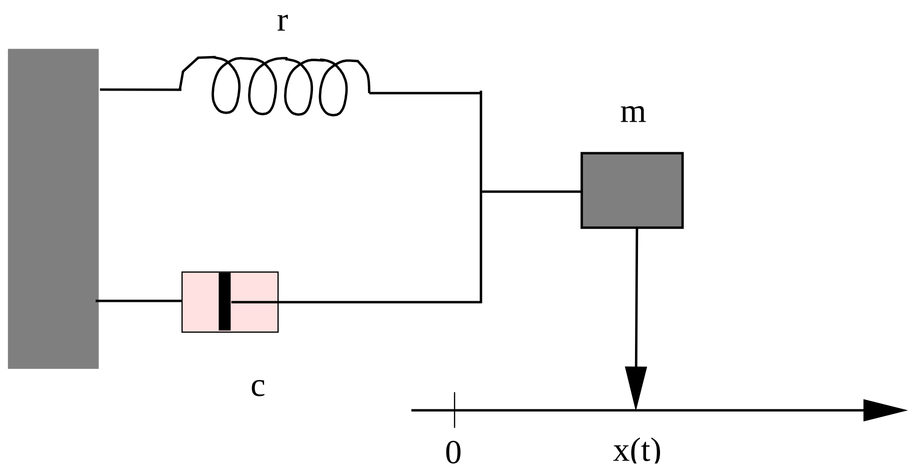

FIG. 1.1 – l'oscillateur mécanique

Exercice IX.20 Ch9-Exercice20

Soit le système mécanique suivant En l'absence de force appliquée le mouvement de la masse m est régi par l'équation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Rx = 0.$$

Étudier les solutions réelles du système lorsque t tend vers $+\infty$.

Solution : L'équation caractéristique est donnée par

$$mr^2 + Cr + R = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = C^2 - 4Rm.$$

– Si $\Delta > 0$,les racines réelles sont

$$r_1 = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4Rm}}{2m}, \quad r_2 = \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4Rm}}{2m}.$$

Les solutions réelles sont dans ce cas

$$x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$$

et $x(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ car C, R et m sont des constantes physiques strictement positives et donc les deux racines sont strictement négatives.

– Si $\Delta = 0$, la racine réelle double est

$$r_0 = -\frac{C}{2m}.$$

Les solutions réelles sont dans ce cas

$$x(t) = (\alpha + \beta t)e^{r_0 t},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$$

et $x(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

– Si $\Delta < 0$, alors $\omega = \frac{\sqrt{4Rm - C^2}}{2m}$ et les solutions réelles sont

$$x(t) = e^{-\frac{C}{2m}t}(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Elles tendent évidemment aussi vers 0 quand t tend vers $+\infty$

Exercice IX.21 Ch9-Exercice21

Soit l'équation différentielle
$$y'' - y = x^2 - x.$$
Donner les solutions de l'équation homogène associée, puis chercher une solution particulière.

Solution : L'équation caractéristique a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est donc
$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}.$$
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2
$$\varphi = Ax^2 + Bx + C.$$
On remplace dans l'équation, et on trouve
$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2 - x$$
ce qui donne $A = -1$, $B = 1$, $C = -2$, d'où la solution générale
$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} - x^2 + x - 2.$$

Exercice IX.22 Ch9-Exercice22

Soit l'équation différentielle
$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$
Faire un changement de fonction inconnue afin de se ramener à une équation différentielle avec un second membre polynômial.

Solution : On fait le changement de fonction
$$y(x) = u(x)e^x,$$
et on obtient après calculs
$$u''(x)e^x = xe^x, \quad \text{soit} \;\; u''(x) = x.$$
De manière évidente cela donne
$$u(x) = \frac{x^3}{6} + \alpha x + \beta,$$
d'où la solution générale en y
$$y(x) = (\frac{x^3}{6} + \alpha x + \beta)e^x.$$
La forme de cette solution est due au fait que $r = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique.

Exercice IX.23 Ch9-Exercice23

Résoudre les équations différentielles

$$y'' - 2y' + 5y = 17\cos 2x,$$

et

$$y'' + 4y = -4\sin 2x.$$

(Donner la solution générale de l'équation homogène puis rechercher les solutions particulières.)

Solution :

1. La solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

ce qui montre que $\cos 2x$ n'est pas solution de l'équation homogène. On cherche alors la solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

on remplace dans l'équation et on obtient

$$y_p(x) = \cos 2x - 4\sin 2x.$$

2. La solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$$

et donc $\sin 2x$ est solution de l'équation sans second membre ce qui donne une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

ce qui donne après calculs

$$y_p(x) = x\cos 2x.$$