MT90/91-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 7 : Intégrale simple et applications

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Janvier 2010

▽

Chapitre VII
Intégrale simple et applications

VII.1 Définition de l'intégrale

VII.1.1 Intégrale d'une fontion étagée

Exercices :	Documents :
Exercice A.1.1	Document B.1.1
Exercice A.1.2	
Exercice A.1.3	
Exercice A.1.4	

Commençons par définir une fonction étagée.

Définition VII.1.1. *- Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ($a < b$). On appelle* ***subdivision*** *de $I = [a, b]$ tout ensemble fini de nombres réels x_0, x_1,...,x_n tels que :*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est ***étagée*** *s'il existe une subdivision x_0, x_1,...,x_n de I telle que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, f est constante sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, ce qui se traduit par : il existe n nombres réels m_1, $m_2, \ldots,$ m_n tels que :*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = m_i,$$

Une telle subdivision est dite ***adaptée*** *à f.*

Définition VII.1.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction étagée et soit x_0, x_1,...,x_n une subdivision adaptée à f. Notons m_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. La somme*

$$(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

*qui ne dépend que de f, est appelée **intégrale de** $\boldsymbol{f}$ et se note* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Cette définition nécessite de montrer que la somme

$$(x_1 - x_0)m_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$$

ne dépend pas de la subdivision, ce qui est fait dans le document référencé.

Si f est positive ou nulle sur $[a', b']$, tous les nombres m_i sont positifs ou nuls et $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$ est alors un nombre réel positif ou nul, qui correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites d'équation $x = a'$ et $x = b'$ et le graphe de la fonction. (Voir la figure (VII.1.1) restreinte à l'intervalle $[a', b']$).

Par exemple $\int_0^1 dx = 1$ puisque $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ est une subdivision adaptée à la fonction $f(x) = 1, \forall x \in [0, 1]$.

Soit $c \in [a, b]$, et soit la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \neq c$. Si $c \in [a, b]$, la subdivision $x_0 = a$, $x_1 = c$, $x_2 = b$ est adaptée à f et $\int_a^b = (c - a) \times 0 + (b - c) \times 0 = 0$. L'intégrale de f est aussi nulle si $c = a$ ou $c = b$. Vous montrerez en exercice que l'intégrale d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est nulle.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

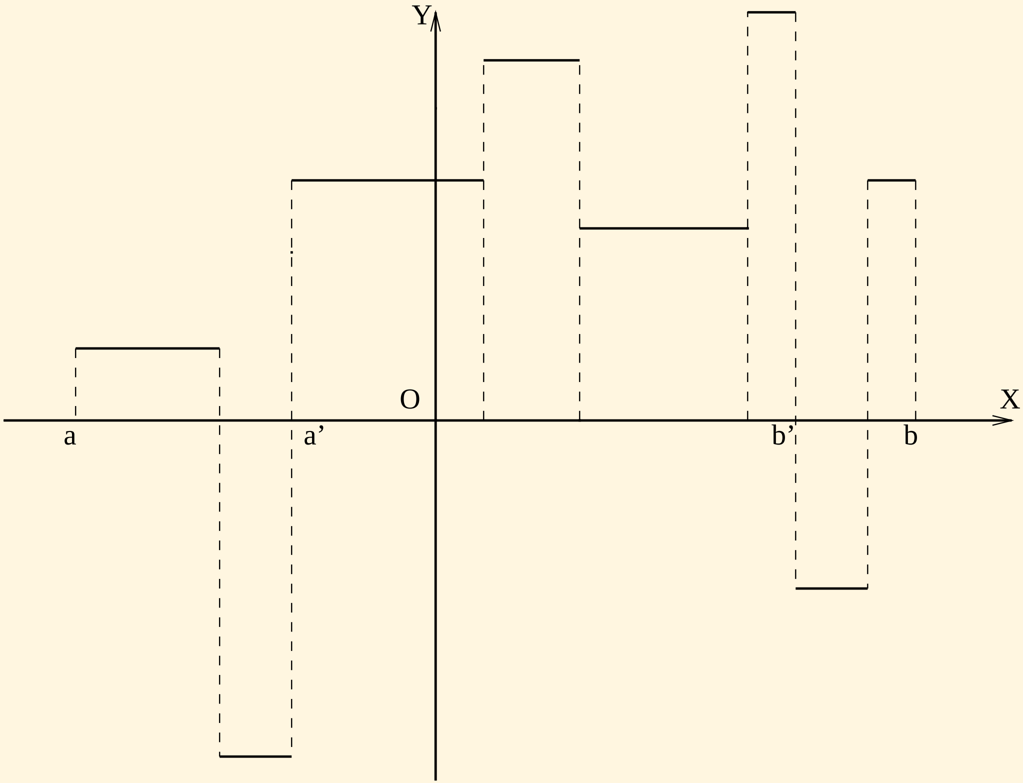


FIG. VII.1.1 – Exemple de fonction étagée

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.1.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées

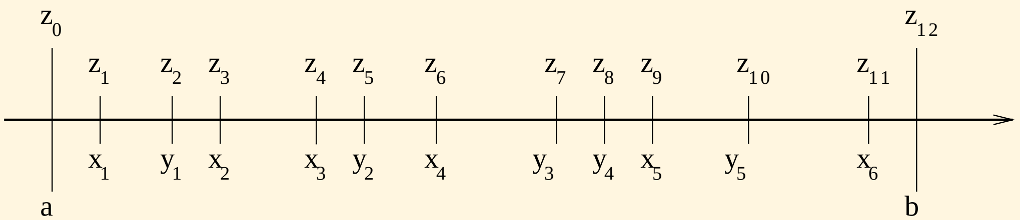
Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Proposition VII.1.1. *Soient f et g deux fonctions étagées sur $[a,b]$, $(a<b)$.*

1. *La fonction $f+g$ est étagée et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est étagée et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$,*
3. *Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$,*
4. *Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors :*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$
5. *$\forall c \in]a,b[$, on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*

Démonstration -

1. Soient x_0, x_1,..., x_n une subdivision adaptée à f et y_0, y_1,..., y_m une subdivision adaptée à g. On considère z_0, z_1,..., z_p l'union des deux subdivisions qui est évidemment adaptée à la fonction $f+g$. Appelons α_i (resp. β_i) la valeur de f (resp. g)



3

FIG. VII.1.2 – Exemple de réunion de subdivisions

sur l'intervalle $]z_{i-1}, z_i[$. Nous avons alors :

$$\forall x \in]z_{i-1}, z_i[, \quad (f+g)(x) = \alpha_i + \beta_i$$

et la définition de l'intégrale donne

$$\text{(VII.1.1)}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x)\,dx &= (z_1 - z_0)(\alpha_1 + \beta_1) \\ &+ (z_2 - z_1)(\alpha_2 + \beta_2) + \cdots \\ &+ (z_p - z_{p-1})(\alpha_p + \beta_p) \qquad \text{(VII.1.2)} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. La démonstration est à faire en exercice.
3. Si $f \geq g$, alors la fonction étagée $f - g \geq 0$ et son intégrale est alors positive ou nulle (voir le cours référencé). On en déduit donc que $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f-g)(x)\,dx \geq 0$.
4. La démonstration est faite en exercice.
5. Posons

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } a \leq x \leq c, \\ 0, & \text{si } c < x \leq b \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq x \leq c, \\ f(x), & \text{si } c < x \leq b. \end{cases}$$

Par définition, de f_1 et f_2, nous avons en tout point de $[a,b]$,

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

et par définition de l'intégrale, nous avons $\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ ainsi que $\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$, d'où le résultat.

VII.1.3 Fonction intégrable

Exercices :
Exercice A.1.7

Définition VII.1.3. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$) est **intégrable** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u et U définies sur $[a,b]$ telles que :*

$$u \leq f \leq U \text{ et } \int_a^b (U-u)(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

Il est évident que toute fonction f étagée est intégrable (il suffit de prendre $u = U = f$).

Montrons que la fonction $f(x) = x$ est intégrable sur $[0,1]$. Pour n donné dans $\mathbb{N}$, posons $h = 1/n$ et $x_k = kh$, $k = 0,\ldots,n$, qui constitue une subdivision de $[0,1]$. On définit la fonction étagée u par $u(x) = x_k$ si $x \in [x_k, x_{k+1}[$ et la fonction étagée U par $U(x) = x_{k+1}$ si $x \in [x_k, x_{k+1}[$. Alors on a la figure (VII.1.3) qui permet de comprendre aisément que $u \leq f \leq U$. D'autre part

$$\int_0^1 (U-u)(x)\,dx = (x_1-x_0)(x_1-x_0) + (x_2-x_1)(x_2-x_1) + \cdots \quad \textbf{(VII.1.3)}$$

$$+ (x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-1}) = n \times h^2 = h. \quad \textbf{(VII.1.4)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il en résulte que cette quantité est inférieure à un $\varepsilon > 0$ donné dès que l'on prend $h = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$, ce qui démontre l'intégrabilité.

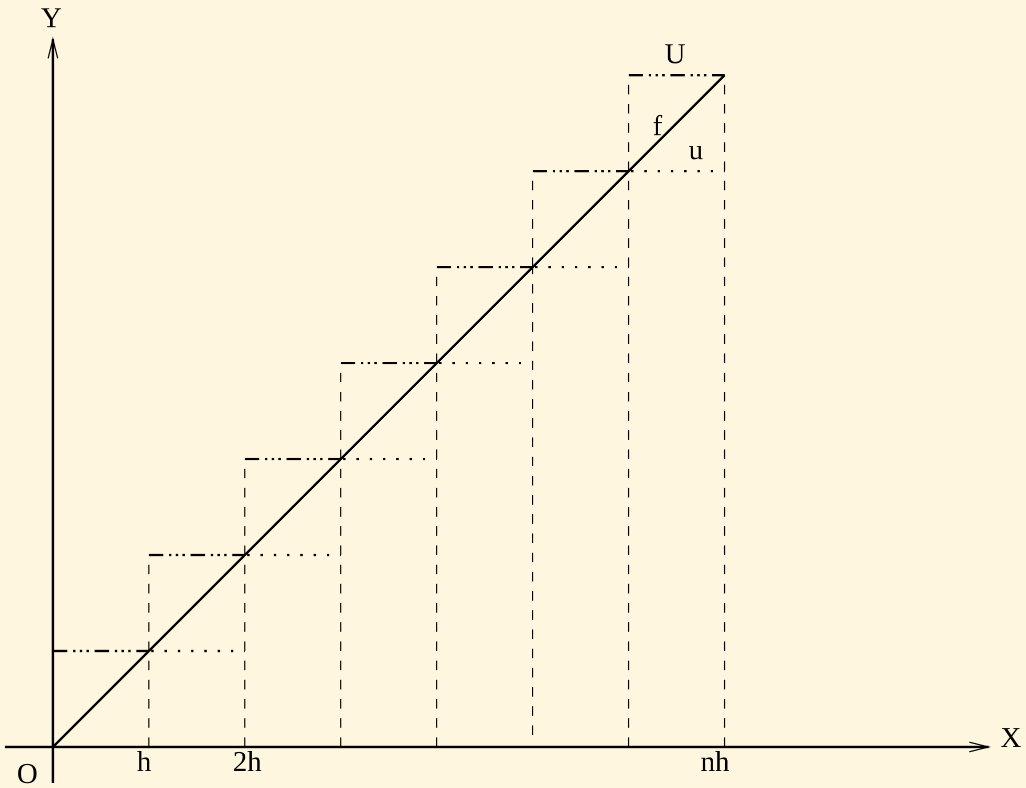


FIG. VII.1.3 – Intégrabilité de la fonction $f(x) = x$

VII.1.4 Définition de l'intégrale d'une fonction intégrable

Exercices :
Exercice A.1.8

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et considérons toutes les fonctions étagées inférieures ou égales à f. Puisque f est intégrable cet ensemble est non vide par définition et on appelle A l'ensemble des intégrales de ces fonctions. A est donc un ensemble non vide de nombres réels. De même on considère toutes les fonctions étagées supérieures ou égales à f et on appelle B l'ensemble des intégrales de ces fonctions. Soient $\alpha \in A$ (resp. $\beta \in B$) et appelons u la fonction étagée telle que $\int_a^b u(x)\,dx = \alpha$ (resp. U la fonction étagée telle que $\int_a^b U(x)\,dx = \beta$). Puisque $u \le f \le U$, on a $\alpha \le \beta$. L'ensemble A est donc majoré (par tout élément de B) et l'ensemble B est minoré (par tout élément de A). Par conséquent la borne supérieure de A et la borne inférieure de B existent et l'on a $\sup A \le \inf B$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné alors, par définition d'une fonction intégrable, il existe deux fonctions étagées u et U telles que $u \le f \le U$ et $\int_a^b (U - u)(x)\,dx \le \varepsilon$. Si l'on appelle $\alpha = \int_a^b u(x)\,dx$ et $\beta = \int_a^b U(x)\,dx$ on a $\alpha \le \sup A \le \inf B \le \beta$ et $\beta - \alpha \le \varepsilon$. On obtient donc $0 \le \inf B - \sup A \le \varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque cela implique que $\sup A = \inf B$. On peut donc donner la définition suivante :

Définition VII.1.4. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, le nombre $\sup A = \inf B$ s'appelle l'* ***intégrale de*** *f et se note $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarquons que lorsque f est étagée, l'intégrale de f est à la fois le plus grand élément de A et le plus petit élément de B.

Reprenons l'exemple de la fonction intégrable $f(x) = x$ sur $[0, 1]$. Nous avons exhibé des fonctions étagées u et U telles que (voir figure VII.1.3)

$$\int_0^1 u(x)\,dx = h \times 0 + h \times h + h \times 2h + \cdots + h \times (n-1)h \quad \textbf{(VII.1.5)}$$

$$= h^2 \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \textbf{(VII.1.6)}$$

$$\int_0^1 U(x)\,dx = h \times h + h \times 2h + h \times 3h + \cdots + h \times nh \quad \textbf{(VII.1.7)}$$

$$= h^2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \textbf{(VII.1.8)}$$

On a donc pour tout n

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \sup A \leq \inf B \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \sup A \leq \inf B \leq \frac{1}{2}$$

c'est à dire

$$\int_0^1 x\,dx = \sup A = inf B = \frac{1}{2}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il est important de noter que dans l'écriture de l'intégrale le nom de la variable d'intégration (ici x) est *indifférent*. La lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre. C'est pourquoi, on rencontre aussi l'écriture plus simple $\int_a^b f$. Mais on verra l'utilité mnémotechnique

de l'écriture conventionnelle $\int_a^b f(x)\,dx$. On dit que dans cette écriture, x est une variable **muette**. Une écriture telle que $\int_a^x f(x)\,dx$ prêterait donc à confusion, car le x en haut du signe intégral doit être défini pour que l'intégrale (de la fonction f sur l'intervalle $[a, x]$) soit définie, tandis que les deux x sous le signe intégral ne sont pas définis. Dans ce cas il faut utiliser une autre lettre pour la variable d'intégration.

VII.1.5 Propriétés élémentaires de l'intégrale d'une fonction intégrable

Exercices :
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Documents :
Document B.1.2

Proposition VII.1.2. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, ($a < b$).*

1. *La fonction $f + g$ est intégrable et*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*, la fonction λf est intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$,*
3. *Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$,*
4. *Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$

5. $\forall c \in]a, b[$*, on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (cette égalité est appelée relation de Chasles).*

Démonstration -

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. Cette démonstration est donnée en référence.
2. Ceci se démontre (plus simplement) comme le résultat précédent.
3. La fonction $-g$ est intégrable ($\lambda = -1$) et donc la fonction $f - g$ est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables. Si $0 \leq (f-g)$, puisque la fonction nulle est une fonction étagée inférieure à $(f-g)$, on a $0 = \int_a^b 0\,dx \leq \int_a^b (f-g)(x)\,dx$ et donc
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f-g)(x)\,dx \geq 0,$$
ce qui démontre le résultat.
4. La démonstration est à faire en exercice.
5. La démonstration est à faire en exercice.

Corollaire VII.1.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Si m et M sont des nombres réels tels que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, alors on a*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Démonstration - D'après la troisième propriété de la proposition précédente on a

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

et l'on a démontré que $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ ce qui donne le résultat puisque $b - a > 0$.

Propriétés élémentaires de l'intégrale d'une fonction intégrable

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.1.6 Intégrabilité des fonctions continues et continues par morceau

Exercices :	Documents :
Exercice A.1.11	Document B.1.3
	Document B.1.4
	Document B.1.5

Le résultat très important suivant se démontre grâce à la notion de continuité uniforme dont vous n'aviez pas encore vu l'utilité.

Théorème VII.1.1. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors* f *est intégrable sur* $[a, b]$.

La démonstration est donnée dans le premier document référencé. Pour les fonction continues on pourrait définir l'intégrabilité par l'intégrale de Riemann, ce qui est introduit dans le deuxième document référencé. Il est aussi beaucoup plus facile de montrer l'intégrabilité d'une fonction continue monotone, ce qui est démontré dans le troisième document référencé.

Proposition VII.1.3. *Si* f *est continue sur* $[a, b[$ *et* $]b, c]$ *et si* f *admet une limite à droite et une limite à gauche au point* b*, alors* f *est intégrable sur* $[a, c]$.

Démonstration - Puisque f est continue sur $[a, b[$ on peut la prolonger par continuité sur $[a, b]$ et elle est donc intégrable sur $[a, b]$. De même on peut définir l'intégrale de f

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

sur $[b,c]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut définir des fonctions étagées u, v, U et V telles que

$$\begin{aligned} & u \leq f \leq U \text{ sur } [a,b], \\ & v \leq f \leq V \text{ sur } [b,c], \\ & \int_a^b (U-u)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \int_b^c (V-v)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Si l'on considère la fonction étagée w (resp. W) définie par $w = u$ (resp. $W = U$) sur $[a,b]$ et $w = v$ (resp. $W = V$) sur $]b,c]$, alors on a $w \leq f \leq W$ sur $[a,c]$ et $\int_a^c (W-w)(x)\,dx \leq \varepsilon$, ce qui montre que la fonction f est intégrable sur $[a,c]$.

On peut démontrer, de manière plus générale, qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points où elle admet seulement une limite à droite et une limite à gauche est intégrable.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.1.7 Intégrale et calcul d'aire

Exercices :
Exercice A.1.12

Soit f une fonction continue positive sur $[a,b](a<b)$, de même que l'intégrale d'une fonction étagée positive correspond à un calcul d'aire, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ correspond à l'aire du domaine D compris entre les axes $x=a$ et $x=b$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y=f(x)$. Il faut démontrer que $\sup A$ correspond à l'aire. Il est facile de voir que l'aire de D est un majorant de A et d'autre part l'aire de D est un minorant de B donc :

$$\text{aire } D \geq \sup A, \quad \text{aire } D \leq \inf B$$

or

$$\sup A = \inf B = \int_a^b f(x)dx$$

donc

$$\text{aire } D = \int_a^b f(x)dx$$

Si le signe de f varie, en découpant l'intervalle en sous intervalles tels que f garde un signe constant sur chacun d'eux, et en affectant un signe négatif à $\int_c^d f(x)\,dx$ si $f(x)\leq 0$ pour $c\leq x\leq d$, on étend cette interprétation de l'intégrale, comme une **aire algébrique**, à une fonction de signe variable. Mais les intégrales servent à calculer des

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

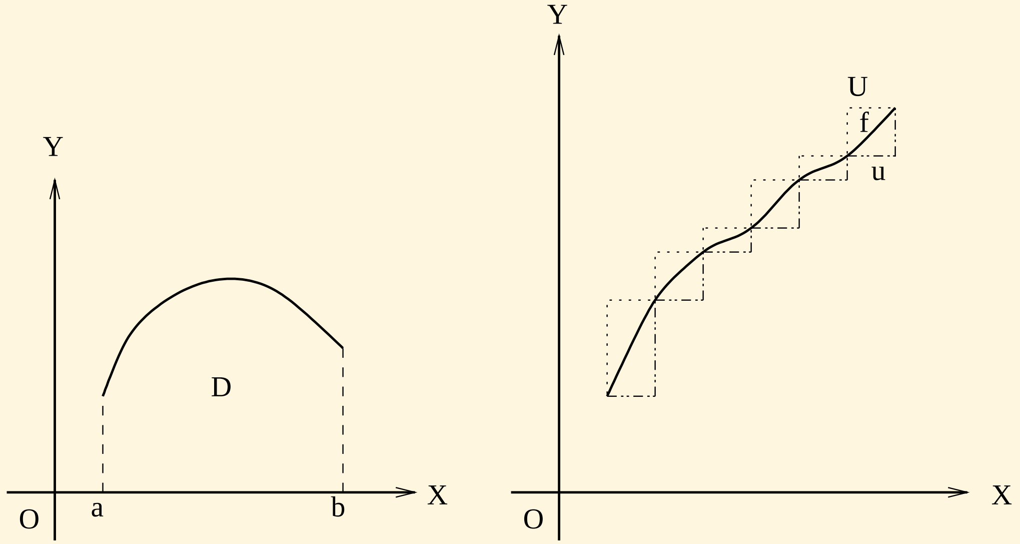


FIG. VII.1.4 – intégrale et calcul d'aire

grandeurs autres que des aires. Il s'agit en fait à la fois d'un concept et d'un des outils de base de l'analyse mathématique.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.1.8 Intégrale et positivité

Exercices :
Exercice A.1.13

Proposition VII.1.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (a < b)$ une fonction intégrable, alors $|f|$ est intégrable et on a*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Démonstration - On admettra que $|f|$ est intégrable.

$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

$$-f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq -\int_a^b |f(x)|\, dx.$$

On a donc

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Proposition VII.1.5. *Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b], (a < b)$ telle que*

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geq 0$$

Alors si

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0, \tag{VII.1.9}$$

f est identiquement nulle sur l'intervalle $[a,b]$.

Démonstration - On commence par montrer que f est identiquement nulle sur $]a,b[$. Raisonnons par contraposée en supposant qu'il existe un point c de $]a,b[$ tel que :

$$f(c) > 0.$$

Comme f est continue il existe $m > 0$ et un intervalle $[c-\eta, c+\eta] \subset]a,b[$, ($\eta > 0$) tel que :

$$\forall x \in [c-\eta, c+\eta], \quad f(x) \geq m.$$

Il résulte des résultats précédents que

$$\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,dx \geq 2\,\eta m > 0, \ \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx \geq 0, \ \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \geq 0,$$

d'où l'on déduit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \geq 2\eta m > 0$$

ce qui est la négation de (VII.1.9).

Pour terminer, puisque f est continue sur $[a,b]$ et donc identiquement nulle sur]a,b[elle est également nulle en a et b.

Intégrale et positivité

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.1.9 Intégrale-cas général

Remarquons que dans la définition nous avons supposé que $a < b$. Nous prendrons la **convention** suivante si $a \neq b$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{VII.1.10}$$

l'un des deux membres de (VII.1.10) étant nécessairement défini au sens de la définition donnée. Donc attention dans $\int_a^b f(x)dx$, on n'a pas toujours $a \leq b$.

Nous avons aussi la convention suivante, qui peut évidemment être considérée comme le cas limite de (VII.1.10) quand $b \mapsto a$:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{VII.1.11}$$

Certaines propriétés énoncées avec $a < b$ sont encore valables, d'autres non. En particulier voici quelques résultats différents lorsque $a > b$

Proposition VII.1.6. *On suppose que $a > b$, f et g sont des fonctions intégrables sur $[b, a]$ alors :*

1.

$$\textit{Si } f \leq g, \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

2.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Dans la suite, sauf précision contraire, nous supposerons que a et b sont quelconques.

VII.1.10 Intégrale et primitive d'une fonction continue

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Cours :
Intégrale - Propriétés

La propriété très importante suivante est connue dans la littérature anglo-saxone sous le nom de **Théorème fondamental de l'analyse**.

Théorème VII.1.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle Ω et a un point de Ω. Alors la fonction F définie sur Ω par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \tag{VII.1.12}$$

est dérivable sur Ω (donc continue) et on a

$$F'(x) = f(x). \tag{VII.1.13}$$

La fonction $F(x)$ est donc la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Démonstration - Pour $x \in \Omega$ et h tel que $x + h$ appartienne aussi à Ω, nous pouvons écrire (d'après la relation de Chasles) :

$$F(x+h) = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

et donc
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right)=f(x),$$
d'après la proposition suivante. D'où le théorème.

Proposition VII.1.7. *Soit f une fonction continue sur Ω et $x\in\Omega$, alors*

$$\lim_{\substack{h\,\to\,0,\\ h\neq 0}}\ \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(x). \tag{VII.1.14}$$

Démonstration - Nous allons raisonner dans le cas $h>0$, le cas $h<0$ est à étudier en exercice. Soient

$$m(h)=\min_{x\le t\le x+h} f(t)\quad \text{et}\quad M(h)=\max_{x\le t\le x+h} f(t),$$

alors on peut utiliser le corollaire (VII.1.1) :

$$h\,m(h)\le\int_x^{x+h} f(t)\,dt\le hM(h). \tag{VII.1.15}$$

Mais, comme f est continue, on a

$$\lim_{h\to 0} m(h)=\lim_{h\to 0} M(h)=f(x)$$

et la relation (VII.1.14) résulte alors de (VII.1.15) après division par h.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, en appliquant le théorème précédent, nous voyons que :

$$\int_0^x \cos t\, dt = \sin x, \quad \int_0^x \sin t\, dt = -\cos x + 1, \quad \int_1^x t\, dt = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Remarque VII.1.1. Soit F une primitive quelconque de f et soit F_a la primitive qui s'annule en a, alors $F = F_a + C$ et donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = F_a(b) = F(b) - C.$$

Or $F(a) = C$ puisque $F_a(a) = 0$ et donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

VII.1.11 Les théorèmes de la moyenne

Exercices :
Exercice A.1.16

Théorème VII.1.3. (Premier théorème de la moyenne)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c). \tag{VII.1.16}$$

Démonstration - C'est une conséquence directe du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

qui est dérivable sur $]a, b[$. On peut donc écrire

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(c)$$

ce qui est exactement (VII.1.16).

Théorème VII.1.4. (Deuxième théorème de la moyenne)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a,b]$, telles que g garde un signe constant sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{VII.1.17}$$

Démonstration - Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer la fonction g positive (et non identiquement nulle - sinon le théorème est trivial). Alors si m et M désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de f sur $[a,b]$ nous avons la double inégalité :

$$\forall x \in [a,b], \quad m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M\,g(x),$$

par suite

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{VII.1.18}$$

Or, puisque $g(x) \ge 0$ mais non identiquement nulle, on a $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ et donc

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer l'existence de $c \in [a,b]$ vérifiant (VII.1.17).

En fait, le théorème peut être énoncé avec $c \in]a,b[$, mais l'argumentation doit être un peu plus poussée et ne sera pas développée ici.

VII.1.12 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercices :
Exercice A.1.17

Théorème VII.1.5. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient $a \leq b$, f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a, b]$. Nous avons alors :*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx \right)^{1/2}. \qquad \text{(VII.1.19)}$$

Démonstration - Si $a = b$ l'inégalité est trivialement vérifiée, on va donc supposer $a < b$.

Si $\forall x \in [a, b], g(x) = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée, on va donc supposer que g n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$, donc $\displaystyle\int_a^b g^2(x)dx > 0$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors l'inégalité :

$$0 \leq \int_a^b ((f(x) + \theta\, g(x))^2\,dx,$$

qui se développe sous la forme :

$$0 \leq \int_a^b (f(x))^2\,dx + 2\,\theta \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \theta^2 \int_a^b (g(x))^2\,dx. \qquad \text{(VII.1.20)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Le membre de droite de (VII.1.20) est un trinôme du second degré en θ qui est toujours non négatif et donc son discriminant est négatif ou nul ce qui donne :

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right) \leq 0$$

soit

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)$$

ce qui est précisément (VII.1.19) en prenant la racine carrée des trois termes (qui sont positifs).

Corollaire VII.1.2. *Soient a et b quelconques, f et g deux fonctions définies et continues en tout x compris entre a et b, alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)$$

Démonstration -
Pour $a \leq b$, cette inégalité vient d'ètre démontrée.
Pour $b < a$, en utilisant ce qui précède on obtient :

$$\left(\int_b^a f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_b^a (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_b^a (g(x))^2\,dx\right)$$

Or

$$\int_b^a f(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

$$\int_b^a (f(x))^2\,dx = -\int_a^b (f(x))^2\,dx,\ \int_b^a (g(x))^2\,dx = -\int_a^b (g(x))^2\,dx.$$

Ce qui permet d'obtenir l'inégalité en remplaçant.

VII.1.13 Remarques sur le calcul numérique

Exercices :
Exercice A.1.18

Comme beaucoup d'intégrales ne sont pas calculables de manière exacte, il est souvent nécessaire d'avoir recours au calcul numérique. La méthode la plus simple, que nous avons déjà exposée d'ailleurs, est la méthode des rectangles présentée au chapitre 3 (suites numériques), exemple B.1 (calcul numérique d'une intégrale). Nous allons, dans ce qui suit, donner un calcul d'erreur. On suppose $a < b$, posons

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{VII.1.21}$$

$$\text{et} \quad I_h = \sum_{k=0}^{n-1} h\, f(x_k) \tag{VII.1.22}$$

$$\text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k\,h,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{VII.1.23}$$

Théorème VII.1.6. *Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a, b]$, alors avec les notations (VII.1.21), . . . ,(VII.1.23) nous avons l'estimation d'erreur :*

$$|I - I_h| \leq C\,h \tag{VII.1.24}$$

avec

$$C = \frac{1}{2}\,(b-a) \max_{a\leq x\leq b} |f'(x)|.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - La relation de Chasles donne :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx\,.$$

Nous avons donc

$$I - I_h = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - h\,f(x_{k-1})\,.$$

Or

$$h\,f(x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\,dx\,,$$

d'où

$$I - I_h = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))\,dx\,,$$

et en passant aux valeurs absolues (propriétés des intégrales)

$$|I - I_h| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})|\,dx\,.$$

Appliquons le théorème des accroissements finis :

$$f(x) - f(x_{k-1}) = (x - x_{k-1})f'(c_k)\,,\ \text{où}\ x_{k-1} < c_k < x\,,$$

et majorons la valeur absolue de cette différence :

$$|f(x) - f(x_{k-1})| \le (x - x_{k-1})M\,,$$

où

$$M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Alors on obtient l'estimation

$$|I - I_h| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) M \, dx \,,$$

dans laquelle on peut calculer l'intégrale, soit

$$|I - I_h| \leq \sum_{k=1}^{n} M \frac{1}{2} h^2.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} M \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{2} M n h^2 = \frac{1}{2} M (nh) h = \frac{1}{2} M (b-a) h,$$

d'où le résultat final

$$|I - I_h| \leq \frac{1}{2} M (b-a) h \,.$$

Remarque VII.1.2. On résume souvent la formule (VII.1.24) en disant que la méthode des rectangles fournit une approximation de l'intégrale en $O(h)$, ce qui veut dire que l'erreur est inférieure à un infiniment petit d'ordre 1 en h. On voit donc que la convergence de la méthode des rectangles est médiocre puisque pour avoir une précision de 10^{-k} il faut de l'ordre de 10^k intervalles. On peut améliorer très simplement la méthode précédente en utilisant la **méthode des trapèzes** qui consiste à approcher l'intégrale

$$\int_0^h f(x) \, dx \quad \text{par} \quad \frac{h}{2} [f(0) + f(h)].$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Nous verrons au chapitre 9 que la méthode des trapèzes fournit une approximation bien meilleure puisqu'elle est en $O(h^2)$.

VII.2 Calcul d'intégrales

VII.2.1 Orientation

Exercices :
Exercice A.1.19

Il ressort du théorème (VII.1.2) que le calcul d'une intégrale se ramène à un calcul de primitive puisque

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive quelconque de f.

Déterminer une primitive nécessite de lire 'à l'envers' le tableau des dérivées usuelles : par exemple

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\sin b - \operatorname{Arc}\sin a, \quad \textbf{avec} \quad a, b \in]-1, +1[.$$

La recherche de primitives est en général difficile et il n'y a qu'un nombre limité de fonctions dont on on puisse expliciter une primitive à l'aide de "fonctions connues". Évidemment, et nous le ferons par la suite, on peut toujours donner un "nom" à une primitive mais cela ne résout pas le problème de son calcul explicite. Par exemple une primitive (celle qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$) de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est notée erf(x) mais on ne peut calculer sa valeur que par des tables (ce qui est le cas pour la quasi totalité des fonctions usuelles).

Ce qui suit a donc pour objet de se ramener à des fonctions dont on connaît les primitives. On utilise en général la notation

$$\int f(x)\,dx$$

pour représenter une primitive quelconque de f. Si F est un primitive de f on peut donc écrire

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

VII.2.2 Intégration par parties

Exercices :
Exercice A.1.20

Théorème VII.2.1. *Soient* u, v *deux fonctions continûment dérivables sur l'intervalle* $[a, b]$. *Alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$

avec la notation

$$[g]_a^b \overset{\text{Déf}}{=} g(b) - g(a).$$

Démonstration - Cela résulte de la relation

$$(uv)'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

qui intégrée donne

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemple VII.2.1. Pour calculer

$$\int_a^b x\,\cos x\,dx$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

on prend

$$\begin{cases} u'(x) = \cos x, \\ v(x) = x, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u(x) = \sin x, \\ v'(x) = 1, \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\int_a^b x \cos x \, dx = [x \sin x]_a^b - \int_a^b \sin x \, dx = b \sin b - a \sin a + \cos b - \cos a.$$

Remarque VII.2.1. La formule d'intégration par parties s'écrit, en notation d'intégrale "indéfinie" :

$$\int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx + C.$$

VII.2.3 Changement de variable

Exercices :
Exercice A.1.21

De façon à introduire la méthode commençons par un exemple.

Exemple VII.2.2. On veut calculer

$$\int_a^b x \cos x^2 \, dx. \tag{VII.2.1}$$

Comme nous connaissons les primitives de la fonction $f(t) = \cos t$, nous pouvons nous ramener à cette situation en posant

$$t = \varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x^2$$

Nous remarquons alors que l'intégrant de (VII.2.1) est de la forme

$$\frac{1}{2} f(\varphi(x))\, \varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(\varphi(x)),$$

avec F primitive de f et donc

$$\int_a^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(\varphi(x))\, dx = \frac{1}{2} \left(F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \right).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Prenons par exemple

$$F(t) = \sin t,$$

nous obtenons ainsi le résultat

$$\int_a^b x \, \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} (\sin(b^2) - \sin(a^2)) = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \cos t dt.$$

Principe de la méthode.

Si φ est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle (a, b), si f est une fonction continue sur l'image par φ de (a, b) , si on note F une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

On a donc

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Pour passer d'une intégrale à l'autre on effectue ce que l'on appelle un changement de variable, ce changement s'effectue en 3 étapes :

1. on pose $t = \varphi(x)$,
2. on pose $dt = \varphi'(x)dx$,
3. on change les bornes, quand $x = a$, $t = \varphi(a)$, quand $x = b$, $t = \varphi(b)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème VII.2.2. *Soit φ est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle (a,b), soit f est une fonction continue sur l'image par φ de (a,b), alors on a la formule de **changement de variable** :*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt. \tag{VII.2.2}$$

Nous allons voir un autre exemple.

Exemple VII.2.3. On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx \quad \text{avec} \quad -|r| < a < b < +|r|,$$

Si $r^2 = 1$, on sait calculer cette intégrale car une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\operatorname{Arc}\sin x$. On va esssayer de se ramener à ce cas, pour cela écrivons

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = \int_a^b \frac{1}{|r|\sqrt{1 - \left(\frac{x}{|r|}\right)^2}}\,dx,$$

puis posons

$$t = \varphi(x) = \frac{x}{|r|}, dt = \frac{dx}{|r|}$$

Pour $x = a,\ t = \frac{a}{|r|}$, pour $x = b,\ t = \frac{b}{|r|}$ ce qui permet de récrire I sous la forme

$$I = \int_a^b \frac{1}{|r|\sqrt{1 - \left(\frac{x}{|r|}\right)^2}}\,dx = \int_{\frac{a}{|r|}}^{\frac{b}{|r|}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{Arc}\sin\frac{b}{|r|} - \operatorname{Arc}\sin\frac{a}{|r|}.$$

Changement de variable

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sous les hypothèses du théorème (VII.2.2), on a vu l'égalité (VII.2.2), dans les exemples traités, nous avons calculé $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$. pour en déduire $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Le théorème peut servir "dans l'autre sens", on calcule $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ pour en déduire $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$. Voici un exemple de ce cas, on veut calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$, on pose $t = \sin x, dt = \cos x dx$, pour avoir $t = -1$, on peut choisir $x = -\frac{\pi}{2}$, pour avoir $t = 1$, on peut choisir $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

VII.3 Fonctions logarithme et exponentielle

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.3.1 Fonction logarithme népérien.

Exercices :
Exercice A.1.22
Exercice A.1.23

Définition VII.3.1. *On appelle* ***logarithme népérien*** *et on note* $x \mapsto \ln x$ *la primitive de la fonction* $f(x) = 1/x$ *qui s'annule en* $x = 1$*, soit :*

$$\boldsymbol{\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.} \tag{VII.3.1}$$

La fonction $\ln(.)$ est donc définie et continûment dérivable sur $]0, \infty[$ et par construction $(\ln x)' = 1/x$.

Théorème VII.3.1. *La fonction* $\ln(.)$ *vérifie la propriété fondamentale suivante*

$$\forall a, b > 0, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b. \tag{VII.3.2}$$

Démonstration - Il suffit de considérer les fonctions

$$g(x) = \ln(ax) \quad \text{et} \quad h(x) = \ln a + \ln x.$$

On a

$$g'(x) = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = h'(x)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

de sorte que g et h ayant les mêmes dérivées, ne diffèrent que par une constante :

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C.$$

Or pour $x = 1$ nous avons :

$$\ln(a) = \ln a + C$$

d'où $C = 0$.

Remarque VII.3.1. La propriété (VII.3.2) est une **propriété fonctionnelle**. Posons nous le problème suivant : trouver toutes les fonctions dérivables sur $]0, \infty[$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall a, b > 0, \quad f(ab) = f(a) + f(b). \tag{VII.3.3}$$

Une telle fonction doit donc vérifier

$$\forall x > 0, \quad f(ax) = f(a) + f(x),$$

ce qui implique, comme f est dérivable, que

$$af'(ax) = f'(x). \tag{VII.3.4}$$

En prenant $x = 1$ dans (VII.3.4) on déduit

$$a\, f'(a) = f'(1).$$

Posons $\gamma = f'(1)$, alors f vérifie, pour tout a positif la relation

$$f'(a) = \frac{\gamma}{a}$$

d'où

$$f(x) = \gamma \ln x + C. \tag{VII.3.5}$$

Il reste à vérifier que f donnée par (VII.3.5) vérifie (VII.3.3) :

$$\gamma \ln(ab) + C = \gamma \ln a + C + \gamma \ln b + C$$

ce qui implique $C = 0$. Finalement donc, les seules solutions sont :

$$f(x) = \gamma \ln x.$$

Corollaire VII.3.1. *La fonction logarithme népérien possède les propriétés suivantes :*

- *(i)* $\forall a, b > 0, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
- *(ii)* $\forall a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad \ln(\prod_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n \ln a_i$,
- *(iii)* $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall a > 0, \quad \ln(a^p) = p \ln a$,
- *(iv)* $\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall a > 0, \quad \ln(a^p) = p \ln a$,
- *(v)* $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall a > 0, \quad \ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q} \ln a$,
- *(vi)* $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall a > 0, \quad \ln(a^x) = x \ln a$,

Démonstration - À faire en exercice.

Variations de la fonction $\ln x$

La fonction $\ln x$ est strictement monotone croissante sur $]0, \infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il résulte de ses propriétés fonctionnelles que

- $\ln x \to \infty$ quand $x \to \infty$,
- $\ln x \to -\infty$ quand $x \to 0$, $(x > 0)$.

En effet si $x \geq 10^n$ alors d'après la monotonie

$$\ln x \geq n \ln 10,$$

Fonction logarithme népérien.

ce qui montre la première propriété, la seconde résultant du fait que

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction ln est donné par la figure (VII.3.5).

Théorème VII.3.2. *La fonction logarithme népérien possède la propriété suivante :*

$$\frac{\ln x}{x} \to 0 \quad \textit{quand} \quad x \to +\infty.$$

Démonstration - Pour $t > 1$ on a

$$\sqrt{t} < t \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On en déduit que pour $x > 1$ on a

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\,(\sqrt{x} - 1) < 2\,\sqrt{x}.$$

On a donc

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}},$$

ce qui montre le résultat cherché.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Corollaire VII.3.2. *Pour m entier strictement positif et p entier quelconques on a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^m} = 0.$$

Démonstration - Tout d'abord, si $p \leq 0$, l'expression n'est pas indéterminée, le résultat est immédiat, on suppose maintenant que $p > 0$. Écrivons

$$\frac{(\ln x)^p}{x^m} = \left(\frac{\ln x}{x^{m/p}} \right)^p$$

et posons $x^{m/p} = y$. Alors le rapport à étudier s'écrit

$$\left(\frac{p}{m} \right)^p \left(\frac{\ln y}{y} \right)^p$$

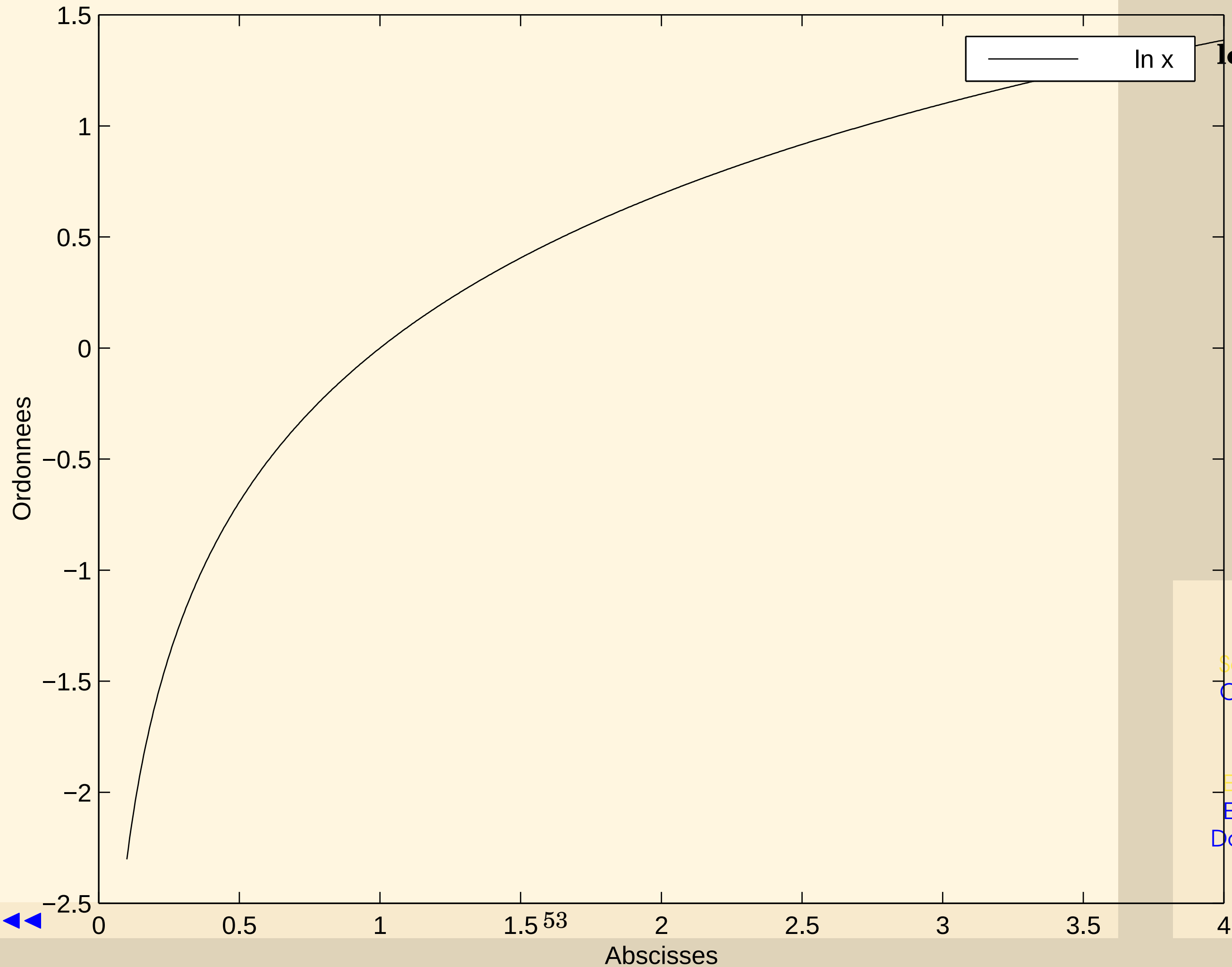
et il suffit d'appliquer le théorème (VII.3.2).

Corollaire VII.3.3. *Pour m entier strictement positif et p entier quelconques on a*

$$\lim_{x \to 0^+} x^m (\ln x)^p = 0.$$

Démonstration - Il suffit de poser $z = \frac{1}{x}$ est on est ramené au corollaire (VII.3.2).

Fonction logarithme népérien.



VII.3.2 Fonction exponentielle de base e

Exercices :
Exercice A.1.24

Définition VII.3.2. *La fonction $f(x) = \ln x$ étant strictement monotone sur $]0, \infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admet une fonction réciproque notée*

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \exp x}$$

*définie sur $\mathbb{R}$ qui est appelée **fonction exponentielle à base** e . On a donc*

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R}).$$

Proposition VII.3.1. *On a*

$$\exp(x + x') = (\exp x)\,(\exp x'). \tag{VII.3.6}$$

En effet si l'on pose $z = (\exp x)\,(\exp x')$, alors

$$\ln z = \ln(\exp x) + \ln(\exp x') = x + x'$$

et donc, de manière équivalente,

$$z = \exp(x + x').$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Corollaire VII.3.4.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(nx) = (\exp x)^n$
2. $\forall q \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(\frac{x}{q}) = (\exp x)^{\frac{1}{q}}$
3. $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(\frac{p}{q}x) = (\exp x)^{\frac{p}{q}}$

La démonstration est immédiate en utilisant le logarithme.

Définition VII.3.3. *On définit le nombre e par*

$$\ln e = 1, \textit{ donc } e = \exp 1$$

sa valeur approchée est $e = 2.718\ldots$.

En appliquant le corollaire précédent, on a donc

$$\forall y \in \mathbb{Q}, \ \exp y = \exp(y \times 1) = (\exp 1)^y = e^y$$

d'où la notation de l'exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp x = e^x$$

Cette notation est une extension à $\mathbb{R}$ de l'égalité que l'on a démontrée sur $\mathbb{Q}$.

En effet les expressions $e^2 = e \times e, \quad e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$ peuvent être définies sans faire référence à la fonction exponentielle, mais on a démontré que

$e^2 = \exp 2, \ \ e^{\frac{2}{3}} = \exp(\frac{2}{3})$. Par contre la seule définition de e^π est $e^\pi = \exp \pi$.

Étude succincte de la fonction e^x.

On a

$$(e^x)' = e^x. \tag{VII.3.7}$$

En effet, si on note,un instant

$$f(x) = \ln x, \quad g(y) = e^y, \quad y_0 = \ln x_0, \quad x_0 = e^{y_0},$$

alors

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = g(y_0) = e^{y_0}.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, la fonction e^x est strictement monotone croissante sur $\mathbb{R}$ et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\exp x)'$		$+$		$+$	
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction exponentielle est donné par la figure (VII.3.6).

Théorème VII.3.3. *Pour tout entier p on a*

$$\frac{e^x}{x^p} \to +\infty \quad \textit{quand} \quad x \to +\infty.$$

Démonstration - Il suffit de poser $x = \ln y$, ce qui conduit à étudier, quand $y \to +\infty$, le rapport

$$\frac{y}{(\ln y)^p}.$$

D'après le corollaire (VII.3.2) on sait que

$$\frac{y}{(\ln y)^p} \to +\infty \quad \text{quand} \quad y \to +\infty,$$

d'où le résultat.

Théorème VII.3.4. *Pour tout entier p on a*

$$\lim_{x \to -\infty} (x)^p \, e^x = 0.$$

Démonstration - On pose $x = \ln y$ et on doit étudier, quand $y \to 0$, le comportement de

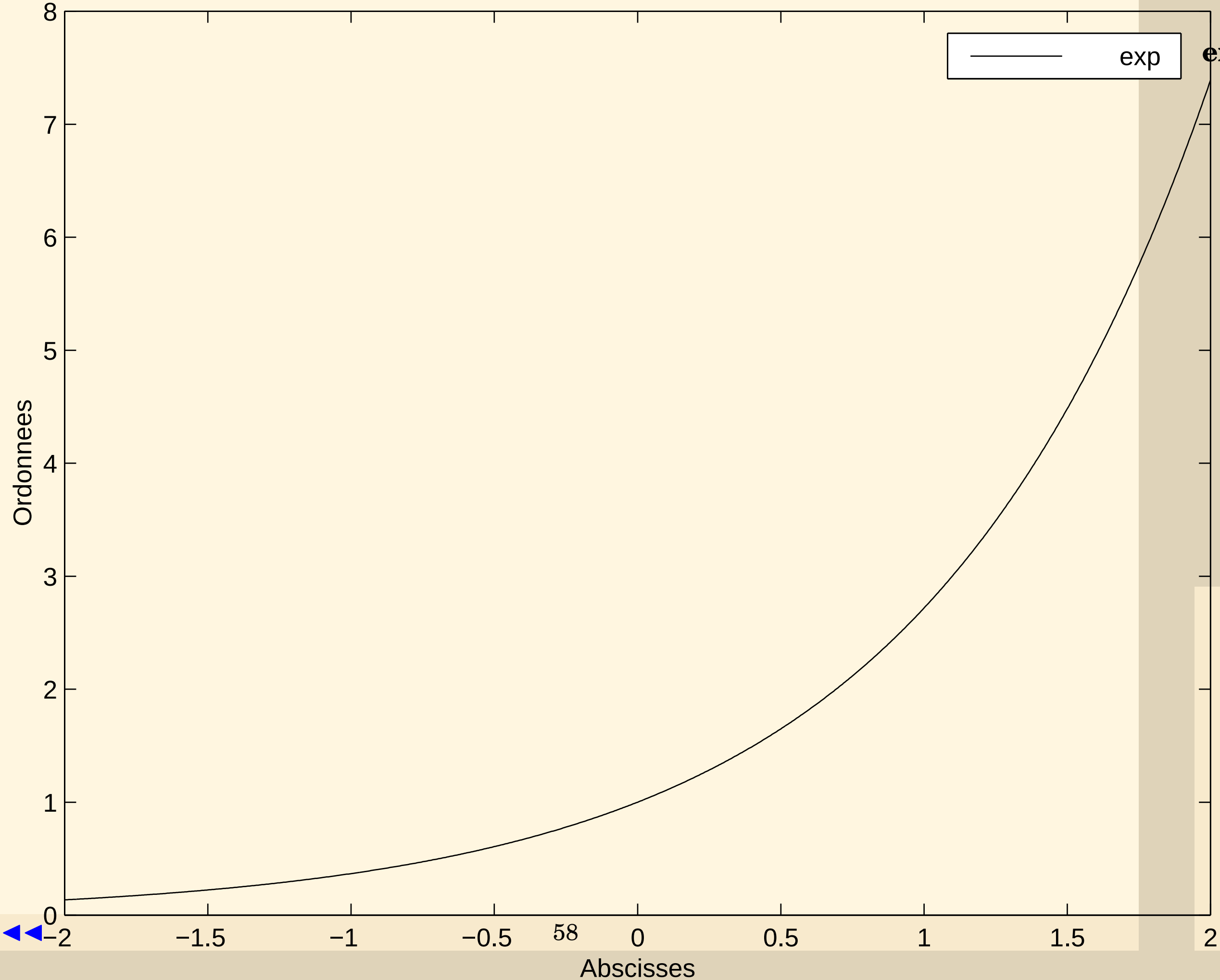
$$y \, (\ln y)^p.$$

Le résultat est une conséquence directe du corollaire (VII.3.3).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Fonction exponentielle de base e



Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.4 Fonctions hyperboliques

VII.4.1 Fonctions hyperboliques directes

Exercices :
Exercice A.1.25

Définition VII.4.1. *On appelle* ***fonctions hyperboliques*** *les fonctions définies ci-dessous sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

où la fonction coth *n'est définie que pour tout* $x \neq 0$.

Nota. Ces fonctions sont également notées respectivement **cosh, sinh** et **tanh, cotanh**.

Remarque VII.4.1. Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques, que nous allons définir au paragraphe suivant, sont utilisées pour simplifier certains calculs et complètent également le 'tableau de primitives'. Elles conduisent en particulier à des formules analogues aux formules de trigonométrie. On utilise d'ailleurs le terme de **formules de trigonométrie hyperbolique**. Le terme de 'fonction hyperbolique' est dû au fait que ces fonction servent, en particulier, à paramétrer les hyperboles d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

dont un paramétrage "naturel" (voir *infra*) est

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Alors que les fonctions trigonométriques sont classiquement utilisées pour paramétrer les ellipses d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dont un paramétrage "naturel" est

$$\begin{cases} x = a\, \cos t, \\ y = b\, \sin t. \end{cases}$$

Propriétés.

La fonction $\operatorname{ch} x$ est paire, les autres étant toutes impaires. Un calcul direct montre que

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Par ailleurs

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x},$$

d'où

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

On en déduit

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

On a les tableaux de variation suivants (comme les fonctions sont ou paires, ou impaires il suffit de les étudier sur $[0, +\infty[$) :

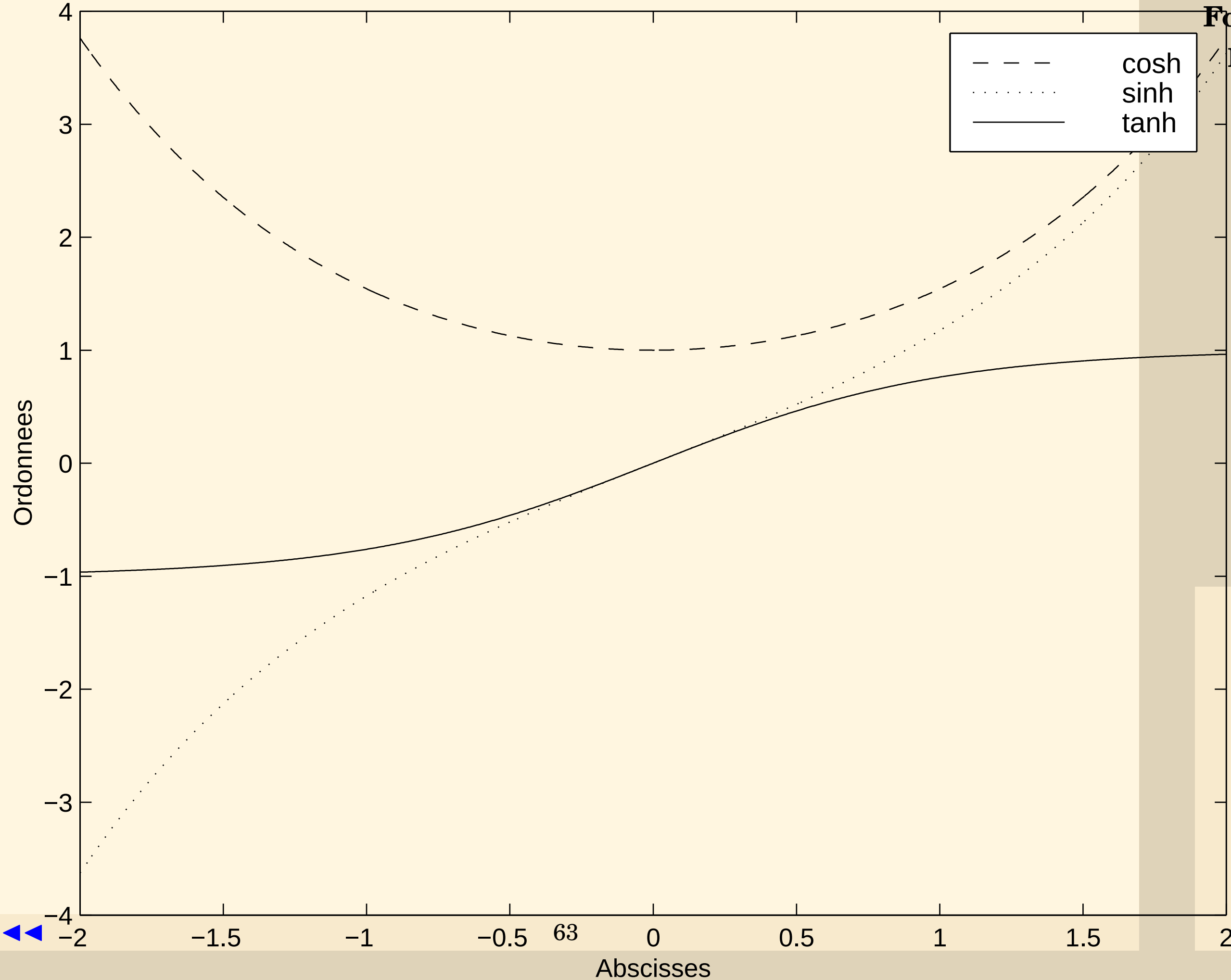
x	0		$+\infty$
$\cosh x$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$\sinh x$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\tanh x$	0	$\nearrow$	$+1$
$\operatorname{cotanh} x$	$+\infty$	$\searrow$	$+1$

Les graphes des fonctions ch, sh et th sont donnés par la figure (VII.4.7).

Formules de trigonométrie hyperbolique. Il résulte des définitions un nombre important de formules, analogues à celles de la trigonométrie classique. Donnons en quelques exemples :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}, \quad \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a, \quad \operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a.$$


cosh
sinh
tanh
Ordonnees
Abscisses
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

VII.4.2 Fonction réciproque du sinus hyperbolique.

Fonction réciproque de $\operatorname{sh} x$.

La fonction $f(x) = \operatorname{sh} x$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (car $f'(x) = \operatorname{ch} x > 0$) et a comme image $\mathbb{R}$ tout entier, on peut donc définir f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Définition VII.4.2. *On appelle* $\mathbf{Arg\,sh}\,\boldsymbol{x}$ *la fonction réciproque de* $\operatorname{sh} x$. *On a donc*

$$\operatorname{Arg\,sh} x \ : \ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \textit{avec} \quad (x = \operatorname{sh} y) \ \Leftrightarrow \ (y = \operatorname{Arg\,sh} x).$$

On peut donner une expression de $\operatorname{Arg\,sh} x$ à l'aide d'un logarithme. En effet on a

$$(y = \operatorname{Arg\,sh} x) \ \Rightarrow \ (\operatorname{sh} y = x) \ \Rightarrow \ (\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2})$$

et donc

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

d'où la formule, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{Arg\,sh}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x} + \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^2}).$$

(on notera que $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$).

Dérivée de $\mathbf{Arg\,sh}\,\boldsymbol{x}$.

En utilisant toujours les mêmes notations :

$$y = f(x) = \operatorname{sh} x, \quad g(y) = \operatorname{Arg\,sh} y = x, \quad y_0 = \operatorname{sh} x_0, \quad x_0 = \operatorname{Arg\,sh} y_0,$$

alors

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{ch} x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_0^2}},$$

où nous avons utilisé au passage la relation $\operatorname{ch}^2 x_0 - \operatorname{sh}^2 x_0 = 1$, en remarquant que $\operatorname{ch} x_0 > 0$. Nous avons ainsi établi la formule :

$$\boldsymbol{(\operatorname{Arg\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}.$$

Fonction réciproque du sinus hyperbolique.

VII.4.3 Fonction réciproque du cosinus hyperbolique.

Documents :
Document B.1.6

Fonction réciproque de $\operatorname{ch} x$.

La fonction $f(x) = \operatorname{ch} x$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, par contre cette fonction considérée comme une application de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ est strictement monotone croissante et est bijective. On peut donc définir sa fonction réciproque.

Définition VII.4.3. *On appelle* $\operatorname{Arg\,ch} x$ *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$y = \operatorname{Arg\,ch} x \ (x \geq 1) \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 0,\ x = \operatorname{ch} y.$$

On peut donner une expression explicite de $\operatorname{Arg\,ch} x$ (exercice : reprendre le même calcul que précédemment), pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\boldsymbol{\operatorname{Arg\,ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).}$$

Dérivée de $\operatorname{Arg\,ch} x$.

On utilise encore les mêmes notations

$$y = f(x) = \operatorname{ch} x, \quad g(y) = \operatorname{Arg\,ch} y = x, \quad y_0 = \operatorname{ch} x_0, \quad x_0 = \operatorname{Arg\,ch} y_0,$$

alors

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{sh} x_0} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x_0 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y_0^2 - 1}},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où nous avons utilisé au passage la relation $\mathrm{ch}^2 x_0 - \mathrm{sh}^2 x_0 = 1$, en remarquant que $\mathrm{sh}\, x_0 \geq 0$ puisque $x_0 \geq 0$

Nous avons ainsi établi la formule, pour $x > 1$:

$$\boldsymbol{(\mathrm{Arg\,ch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

Vous pouvez consulter en document la fonction réciproque de la tangente hyperbolique.

Fonction réciproque du cosinus hyperbolique.

VII.4.4 Fonctions logarithme et exponentielle à base quelconque

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Définition VII.4.4. *Pour $a \in]0, +\infty[$ on définit la* ***fonction exponentielle de base*** $\boldsymbol{a}$ *par :*

$$\boldsymbol{a^x = e^{x \ln a}}, \tag{VII.4.1}$$

fonction qui est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition VII.4.1. *La fonction $f(x) = a^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée d'ordre k étant donnée par :*

$$\frac{d^k}{dx^k}\, a^x = (\ln a)^k\, a^x. \tag{VII.4.2}$$

Elle est strictement monotone croissante pour $a > 1$ et décroissante pour $a < 1$.

Démonstration - immédiate.

Définition VII.4.5. *Pour $a \in]0, +\infty[$, $a \neq 1$, on appelle* ***fonction logarithme de base*** $\boldsymbol{a}$ *et on note* $\boldsymbol{\log_a}$ *la fonction définie sur $]0, +\infty[$ comme la fonction réciproque de a^x. On a donc*

$$(y = \log_a x) \;\Leftrightarrow\; (x = a^y), \quad (x > 0).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

*Le cas particulier $a = 10$ est appelé **logarithme décimal** et est noté :*

$$\log x \stackrel{\text{déf}}{=} \log_{10} x.$$

Proposition VII.4.2. *On a*

$$\ln x = \ln a \, \log_a x$$

Démonstration - On a la suite d'équivalences :

$$(y = \log_a x) \;\Leftrightarrow\; (x = e^{y \ln a}) \;\Leftrightarrow\; (\ln x = y \ln a) \;\Leftrightarrow\; (\ln x = (\log_a x)\,(\ln a)).$$

Théorème VII.4.1. *Soient a et b deux réels de l'intervalle $]0, +\infty[$, $a \neq 1$ et $b \neq 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a*

$$\log_a x = \log_a b \, \log_b x.$$

Démonstration - Il suffit d'utiliser la proposition précédente. On a

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

et donc

$$\log_a b \, \log_b x = \frac{\ln b}{\ln a} \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre VII

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch7-Exercice1

Montrer qu'une fonction constante sur $[a, b]$ est étagée.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch7-Exercice2

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est étagée en donnant au moins deux subdivisions adaptées.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch7-Exercice3

À l'aide de la définition de l'intégrale des fonctions étagées, calculer $\int_a^b m\,dt$ (où m est un réel donné) et $\int_0^2 f(t)\,dt$ où $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch7-Exercice4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est nulle sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch7-Exercice5

Soient f une fonction étagée et λ un réel. Montrer, en utilisant la définition, que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b \lambda f(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch7-Exercice6

Montrer que si deux fonctions étagées diffèrent en un nombre fini de points sur un intervalle $[a, b]$ elles ont la même intégrale sur cet intervalle.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch7-Exercice7

Montrer qu'une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch7-Exercice8

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et u et U deux fonctions étagées telles que $u \leq f \leq U$. Déduire de la définition de l'intégrale de f que
$\int_a^b u(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b U(t)\,dt$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch7-Exercice9

Démontrer la relation de Chasles pour les fonctions intégrables. (on s'inspirera de la démonstration de cette propriété pour les fonctions étagées.)

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch7-Exercice10

Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 2x$, $\forall x \in [0,1]$. Donner un encadrement pour $\int_0^1 f(x)\,dx$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch7-Exercice11

Soit une fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Cette fonction est-elle intégrable sur $[0, 2]$? Calculer alors son intégrale.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch7-Exercice12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Par quelle intégrale peut-on calculer l'aire comprise entre l'axe des x et le graphe de f ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch7-Exercice13

Soit la fonction f définie par $f(x) = 0$ sur $[0,1[\cup]1,2]$ et $f(1) = 1$. Cette fonction est-elle nulle sur $[0,2]$? Que vaut $\int_0^2 f(x)\,dx$? Nous avons pourtant démontré que "si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, cette fonction est nulle". Où est la contradiction ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch7-Exercice14

Montrer en reprenant la démonstration de la proposition (VII.1.7) que, pour $h < 0$, on a

$$\lim_{\substack{h \to 0, \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\, dx = f(a).$$

retour au cours

Solution

Exercice A.1.15 Ch7-Exercice15

Calculer $\int_0^x t^2\,dt$, $\int_1^x t^2\,dt$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch7-Exercice16

Appliquer le premier théorème de la moyenne à $\int_0^\pi \sin x\,dx$. Appliquer le deuxième théorème de la moyenne à $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$, où f est une fonction continue sur $[0,\pi]$ donnée.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch7-Exercice17

Donner l'inégalité de Cauchy-Schwartz lorsque la fonction f est constante ($f(x) = \alpha$, $\forall x \in [a, b]$).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch7-Exercice18

1. On suppose f croissante sur un intervalle $[a,b]$, on définit $h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih$, en s'inspirant du document B.1.5 sur l'intégrabilité des fonctions monotones, donner deux fonctions étagées s_n et S_n telles $s_n \leq f \leq S_n$.
2. Calculer
$$\int_a^b s_n(x)dx, \quad \int_a^b S_n(x)dx, \quad \int_a^b (S_n(x) - s_n(x))dx$$
3. En déduire une majoration de l'erreur correspondante.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch7-Exercice19

En se servant du théorème fondamental de l'analyse calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx, \quad \int_0^1 x^n\, dx, \quad \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx, \quad \int_1^e \frac{1}{x}\, dx.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch7-Exercice20

Calculer les intégrales

$$\int_a^b \ln x \, dx, \quad \int_a^b x^2 e^x \, dx$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch7-Exercice21

Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx, \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx.$$

retour au cours

Solution

Exercice A.1.22 Ch7-Exercice22

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch7-Exercice23

Démontrer le corollaire (VII.3.1).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch7-Exercice24

1. Pour x réel positif, p et q entiers, on définit la fonction $x \mapsto x^{1/q}$ comme étant la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^q$. Montrer que

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}} \stackrel{\text{Déf}}{=} x^{\frac{p}{q}}$$

2. Montrer que

$$exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch7-Exercice25

Soient a et x deux réels.

1. Montrer que
$$\operatorname{ch}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} x.$$
2. En déduire par dérivation que
$$\operatorname{sh}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} x.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch7-Exercice26

Soit a un réel strictement positif, x et y deux réels quelconques, montrer que

$$a^{x+y} = a^x + a^y, \qquad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x .$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch7-Exercice27

Récapituler, les extensions successives de la fonction x^α, x étant un réel positif et α étant un entier positif, un entier négatif, un rationnel, un réel.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD7-Exercice1

Calculer en utilisant la définition $\int_0^1 e^x dx$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.2 TD7-Exercice2

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. On découpe l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de longueur égale, on note I_n l'approximation de I par la méthode des rectangles.
   (a) Quelle est l'expression de I_n ?
   (b) Donner une majoration de $|I_n - I|$.
   (c) En déduire la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$.
3. Calculer $J_{n+1} = \displaystyle\int_a^1 \frac{1}{x} dx$ avec $a = \frac{1}{n+1}$.
4. (a) Montrer que $J_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
   (b) En déduire que la suite de terme général $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ est divergente.

Question 1	Aide 1		
Question 2a	Aide 1	Aide 2	
Question 2b	Aide 1	Aide 2	
Question 2c	Aide 1	Aide 2	
Question 3	Aide 1		
Question 4a	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4b	Aide 1	Aide 2	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD7-Exercice3

Montrer que $1 - \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx$ et, si $a > 1$, $\int_1^a e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{e^a}$.

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.4 TD7-Exercice4

1. Soit f une fonction continue, u et v deux fonctions dérivables. Montrer que la fonction définie par : $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable. Calculer $g'(x)$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$, montrer que les fonctions f continues qui vérifient $\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sont périodiques de période $2a$.
3. (a) Montrer que l'intervalle d'étude de la fonction $g(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}dt$ peut être restreint à $[0, \pi/2]$.
   (b) Calculer la dérivée de $g(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}dt$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   (c) Calculer une primitive $F(x)$ de $2x \sin x \cos x$.
   (d) En déduire une espression de $g(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   (e) Calculer $g(\frac{2\pi}{3})$.
4. (a) Calculer la dérivée des fonctions définies par :
   $$f_1(x) = \int_0^{x^3} \sin t dt,\ f_2(x) = \int_0^{x^3} \cos t dt,\ g(x) = \int_x^{x-x^3} \sin t dt.$$
   (b) On définit $h(x) = \int_0^{x^3} \sin(x-t)dt$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4
TD7-Exercice4

i. Transformer $h(x)$ en utilisant les formules trigonométriques. Calculer $h'(x)$.

ii. Calculer $h'(x)$ en faisant le changement de variable $u = x - t$.

Question 1	Aide 1	Aide 2	
Question 2	Aide 1	Aide 2	
Question 3a	Aide 1	Aide 2	
Question 3b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3c	Aide 1	Aide 2	
Question 3d	Aide 1	Aide 2	
Question 3e	Aide 1	Aide 2	
Question 4a	Aide 1		
Question 4(b)i	Aide 1	Aide 2	
Question 4(b)ii	Aide 1	Aide 2	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD7-Exercice5

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que ce résultat est faux si f n'est pas continue.
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, on suppose que sa valeur moyenne sur $[0, 1]$ vaut $\frac{1}{2}$. Montrer que f a au moins un point fixe.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD7-Exercice6

Déterminer le signe de $\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD7-Exercice7

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ montrer que $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$.

On suppose maintenant que f est dérivable et que sa dérivée est continue, montrer que $(f(b) - f(a))^2 \leq (b-a)\int_a^b f'^2(t)dt$.

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.8 TD7-Exercice8

Soit f une fonction continue sur $]-1,1[$, calculer la limite quand x tend vers 0 de $x\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.9 TD7-Exercice9

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\arctan x \leq x$ et $e^x - 1 \leq xe^x$.
2. En utilisant les théorèmes de la moyenne, montrer que
$$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{1+x^2}dx\right| \leq a, \left|\int_0^a \frac{\sin x}{1+x^2}dx\right| \leq \arctan a, \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.10 TD7-Exercice10

Calculer les primitives des fonctions : $\dfrac{t}{1+t^2}$, $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $t^4(1+t^5)^5$, $\dfrac{\ln|t|}{t}$, $\dfrac{t}{1+t^4}$, $\sqrt{\sin t}\cos t$, $\dfrac{\arctan t}{t^2+1}$, $e^t(t^2-1)$, $\ln|t|$, $\arccos t$, $\sin^3 x\cos^2 x$, $\cos^3 x\sin^3 x$, $\cos^2 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\dfrac{\sin x}{3-2\sin^2 x}$.

Solution

Exercice A.2.11 TD7-Exercice11

Calculer

1. $I_1 = \int_1^e x^n \ln x dx$. $I_2 = \int_0^1 \arctan x dx$.
2. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^x dx$. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^x dx$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.12 TD7-Exercice12

1. Calculer $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{a^2+x^2}dx$, $I_2 = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{x^2+2x+4}dx$.
2. Calculer $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$, $I_4 = \int_{-1}^1 \frac{2-x}{x^2-x+1}dx$.
3. Calculer les primitives des fonctions $F_5(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$, $F_6(x) = \frac{2-x}{x^2-x+1}$ et retrouver les résultats précédents.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD7-Exercice13

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]\ f(a+b-x) = f(x)$.

1. Quelle propriété possède la courbe représentative de cette fonction ?
2. On pose $t = a+b-x$, utiliser ce changement de variable pour "transformer" $\int_a^b x f(x)dx$.
3. En déduire que $\int_a^b x f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Solution

Exercice A.2.14 TD7-Exercice14

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$, $I_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $I_3 = \int_1^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx$,
2. $I_4 = \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x + 3)\sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx$, $I_5 = \int_1^{\frac{3}{2}} x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx$.

Solution

Exercice A.2.15 TD7-Exercice15

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :
   (a) $\dfrac{1}{\cos x}, \dfrac{1}{\sin x},$
   (b) $\dfrac{1}{2+\cos x}, \dfrac{\cos^3 x}{\sin^5 x}.$
2. Même question pour :
   (a) $\tan^2 x, \dfrac{1}{\cos^2 x}, \dfrac{1}{\sin^2 x}, \dfrac{1}{1+\sin^2 x}, \dfrac{1}{a+\sin x}$ avec $a > 1$,
   (b) $\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}, \dfrac{\cos x}{2+\cos x}, \dfrac{1}{\cos^3 x}, \dfrac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}.$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Documents

B.1 Documents du chapitre VII

Document B.1.1 Résultat pour les fonctions étagées

Proposition B.1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Si x_0, x_1,..., x_n est une subdivision de I adaptée à f et si l'on pose $f(x) = m_i$, $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, alors le nombre $(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$ ne dépend pas de la subdivision.*

Démonstration - Si l'on ajoute à la subdivision x_0, x_1,..., x_n un point y, compris par exemple entre x_i et x_{i+1}, on obtient la subdivision x_0,..., x_i, y, $x_{i+1}, \ldots, x_n$ qui est aussi adaptée pour f puisque $f(x) = m_{i+1}$ si $x \in]x_i, y[$ ou $x \in]y, x_{i+1}[$. D'autre part puisque

$$(y - x_i)m_{i+1} + (x_{i+1} - y)m_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)m_i$$

les sommes correspondantes aux deux subdivisions sont égales. De cette manière, on peut montrer par récurrence, que la somme garde sa valeur si l'on rajoute un nombre fini de points à la subdivision initiale.

Supposons maintenant que y_0, y_1,...,y_m soit une autre subdivision adaptée à f et appelons S_x la somme correspondante à la subdivision initiale et S_y la somme correspondante à cette subdivision. L'union des deux subdivisions consiste à rajouter un nombre fini de points à chacune d'entre elles, ce qui ne change pas la somme correspondante et ce qui donne de manière évidente : $S_x = S_y$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.2 Somme de fonctions intégrables

Proposition B.1.2. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. La fonction $f+g$ est intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration - Soit $\varepsilon > 0$ donné, puisque les fonctions f et g sont intégrables, il existe des fonctions étagées u, v, U et V telles que

$$u \leq f \leq U,\ v \leq g \leq V,\ \int_a^b (U-u)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \int_a^b (V-v)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $w = u + v$ et $W = U + V$, ces fonctions w et W sont étagées et

$$w \leq f+g \leq W,\ \int_a^b (W-w)(x)\,dx = \int_a^b (U-u)(x)\,dx + \int_a^b (V-v)(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

La fonction $f+g$ est donc intégrable et l'on a de manière évidente

$$\int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b (f+g)(x)\,dx \leq \int_a^b W(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b U(x)\,dx + \int_a^b V(x)\,dx.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En "soustrayant" ces inégalités et en remplaçant w et W par leurs valeurs, on obtient

$$\int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx - \int_a^b W(x)\,dx \tag{B.1.1}$$

$$\leq -\int_a^b (f+g)(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{B.1.2}$$

$$\leq \int_a^b U(x)\,dx + \int_a^b V(x)\,dx - \int_a^b w(x)\,dx \tag{B.1.3}$$

Puisque l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales pour les fonctions étagées, on peut regrouper les membres de gauche et de droite, ce qui donne, par exemple pour le membre de droite :

$$\int_a^b (U-u)(x)\,dx + \int_a^b (V-v)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

et de même le membre de gauche est supérieur ou égal à $-\varepsilon$. Il vient donc que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$-\varepsilon \leq -\int_a^b (f+g)(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \varepsilon$$

ce qui donne

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 0.$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.3 Intégrabilité des fonctions continues

Théorème B.1.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration - Puisque f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, elle est uniformément continue, ce qui veut dire

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que} \\ \forall x \in [a,b],\ \forall x_0 \in [a,b], \quad (|x - x_0| \leq \eta) \ \Rightarrow\ (|f(x) - f(x_0| \leq \varepsilon) \end{array}$$

où η ne dépend pas de x_0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $h = \frac{b-a}{n} \leq 2\eta$ et considérons la subdivision $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Notons α_k le milieu de chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ et considérons les fonctions étagées u et U telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k = 0, \ldots, n-1,\ \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \\ u(x) = f(\alpha_k) - \varepsilon, \\ U(x) = f(\alpha_k) + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Alors, lorsque $x \in [x_k, x_{k+1}[$, nous avons $|x - \alpha_k| \leq \eta$ et donc

$$(u(x) =) f(\alpha_k) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(\alpha_k) + \varepsilon (= U(x))$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_a^b (U-u)(x)\,dx &= (x_1 - x_0)(f(\alpha_0) + \varepsilon - f(\alpha_0) + \varepsilon) && \textbf{(B.1.4)} \\ &+ (x_2 - x_1)(f(\alpha_1) + \varepsilon - f(\alpha_1) + \varepsilon) + \cdots && \textbf{(B.1.5)} \\ &+ (x_n - x_{n-1})(f(\alpha_{n-1}) + \varepsilon - f(\alpha_{n-1}) + \varepsilon) && \textbf{(B.1.6)} \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

soit

$$\int_a^b (U-u)(x)\,dx = nh(2\varepsilon) = (b-a)2\varepsilon$$

Ce qui démontre le résultat. (Pour être rigoureux, il faudrait partir avec $\varepsilon > 0$, poser $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et faire le raisonnement précédent avec ε' de façon à avoir exactement ε dans la dernière inégalité.)

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.4 Sommes de Riemann

Définition B.1.1. ***(Sommes de Riemann)*** *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

une subdivision de $[a, b]$. Donnons nous, pour chaque sous-intervalle

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

un point θ_i de ce sous-intervalle. On appelle alors ***somme de Riemann*** *associée à la fonction f, à la subdivision $([x_i, x_{i+1}])_{0 \leq i \leq n-1}$, la somme :*

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\theta_i).}$$

Nous avons alors la proposition :

Proposition B.1.3. *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors,*

$$\lim_{\max|x_{i+1}-x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(\theta_i) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

quel que soit le choix des points $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - La fonction f étant continue sur $[a,b]$ y est uniformément continue, soit :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que} \\ \forall x \in [a,b],\ \forall y \in [a,b], \quad (|x-y| \leq \eta) \ \Rightarrow\ (|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon). \end{cases}$$

En conséquence, pour toute subdivision (x_i), telle que :

$$\forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \quad |x_{i+1}-x_i| \leq \eta,$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\,f(\theta_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1}-x_i) f(\theta_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1}-x_i) f(\theta_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\theta_i)\,dx \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-f(\theta_i)|\,dx. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute subdivision (x_i) de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant :

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1}-x_i| \leq \eta,$$

nous aurons :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\,f(\theta_i) \right| \leq (b-a)\varepsilon$$

ce qui démontre bien le résultat annoncé.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.5 Intégrabilité des fonctions monotones

Théorème B.1.2. *Toute fonction monotone est intégrable.*

Démonstration Il suffit de montrer ce résultat pour une fonction monotone croissante. Soit donc f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [a, b],\ \forall y \in [a, b], \quad (x \leq y) \ \Rightarrow \ (f(x) \leq f(y)).$$

Subdivisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ à l'aide des points

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Nous avons alors :

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$$

Soit maintenant une subdivision (x_i), vérifiant pour un certain réel $\eta > 0$:

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |x_i - x_{i+1}| \leq \eta.$$

Il vient, pour cette subdivision :

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|(x_{i+1} - x_i) \leq \eta \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \eta(f(b) - f(a))$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Nous voyons que nous avons construit deux fonctions étagées s et S définies par :

$$\forall i = 0, \ldots, n-1,\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad s(x) = f(x_i) \quad \text{et} \quad S(x) = f(x_{i+1}),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

encadrant f et telles que, pour toute subdivision adaptée de $[a,b]$ vérifiant

$$\max_{0\le i\le n-1} |x_i - x_{i+1}| \le \eta \le \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)},$$

l'on ait :

$$\int_a^b (S(x)-s(x))\,dx = (\sum_{i=0}^{n-1}(S(x)-s(x) \le \varepsilon.$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document B.1.6 Fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique

Fonction réciproque de $\tanh x$.

La fonction $f(x) = \tanh x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et est bijective à valeurs dans $]-1,+1[$. Nous pouvons ainsi introduire la définition suivante :

Définition B.1.2. *On appelle* $\mathbf{Arg\,tanh}\,x$ *la fonction définie sur* $]-1,+1[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$y = \operatorname{Arg\,tanh} x, \quad (-1 < x < 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tanh y, \quad y \in \mathbb{R}$$

On a également la représentation suivante (exercice) pour $x \in]-1,+1[$ *:*

$$\operatorname{Arg\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Dérivée de $\operatorname{Arg\,tanh} x$.

Il suffit de reprendre le raisonnement habituel, et on vérifie (exercice) que pour $x \in]-1,+1[$:

$$(\operatorname{Arg\,tanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

Si f est une fonction constante sur $[a, b]$, alors il existe bien une subdivision de $[a, b]$, à savoir la subdivision $a = x_0 < x_1 = b$, telle que f soit constante sur chacun des sous-intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision.

Retour à l'exercice ▲

La subdivision $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2$ convient. En effet, f est constante, égale à 3 sur $]0, 1[$ et constante, égale à 2 sur $]1, 2[$.

Toute subdivision plus fine convient aussi. C'est le cas par exemple de la subdivision $0 = x_0 < 0.5 = x_1 < 1 = x_2 < 4/3 = x_3 < 2 = x_4$.

Retour à l'exercice ▲

La fonction constante et égale à m sur tout son intervalle de définition est une fonction étagée. Nous l'avons vu plus haut. Une subdivision adaptée est la subdivision $a = x_0 < x_1 = b$. Il en résulte que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(x_1 - x_0) = m(b-a).$$

Nous avons aussi vu à l'exercice précédent que la fonction f est étagée : nous avons même exhibé deux subdivisions adaptées. Il en résulte que :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3(1-0) + 2(2-1) = 3(\frac{1}{2} - 0) + 3(1 - \frac{1}{2}) + 2(\frac{4}{3} - 1) + 2(2 - \frac{4}{3}) = 5.$$

Notons que les valeurs de f aux points de subdivisions ne joue aucun rôle dans le calcul de la valeur de l'intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

Prenons comme subdivision associée à f, outre les points a et b les points, en nombre fini, où f est non nulle. Alors, sur chaque sous-intervalle $]x_{i-1}, x - i[$ de cette subdivision, f est nulle, de sorte que son intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

est nulle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Si f est constante (égale à m_i) sur un sous-intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, λf l'est aussi (elle est égale à λm_i). Toute subdivision adaptée à f l'est donc aussi à λf et l'on a :

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \sum_{i=1}^n (\lambda m_i)(x_i - x_{i-1}) = \lambda \left(\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \right) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Les fonctions f et g ne différant qu'en un nombre fini de points, leur différence $f-g$ est nulle, sauf en un nombre fini de points. Nous avons vu plus haut, que cela entraîne que son intégrale est nulle, soit :

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Une fonction étagée sur $[a, b]$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est bornée. Or une fonction f intégrable sur $[a, b]$ est encadrée, par définition, par deux fonctions étagées, donc encadrée par deux fonctions bornées sur $[a, b]$. Elle est donc bornée sur $[a, b]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

La fonction f étant intégrable, son intégrale existe et est définie par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{U\,:\,f\leq U} \int_a^b U(x)\,dx = \sup_{u\,:\,u\leq f} \int_a^b u(x)\,dx,$$

de sorte que l'on a bien

$$\int_a^b u(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b U(x)\,dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Soit $c \in]a, b[$. Soit u une fonction étagée sur $[a, b]$. Alors les fonctions u_1 et u_2 définies par :

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x), & \text{pour } a \le x \le c, \\ 0, & \text{pour } c < x \le b, \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } a \le x \le c, \\ u(x), & \text{pour } c < x \le b, \end{cases}$$

sont clairement étagées. Soient f_1 et f_2 définies à partir de f de la même manière. Donnons nous un $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, f étant intégrable, il existe deux fonctions étagées s et S telles que

$$s \le f \le S \quad \text{et} \quad \int_a^b (S - s)(x)\,dx \le \varepsilon.$$

Alors, nous voyons que

$$\begin{array}{lll} s_1 \le f_1 \le S_1 & \text{et} & \int_a^b (S_1 - s_1)(x)\,dx \le \varepsilon, \\ s_2 \le f_2 \le S_2 & \text{et} & \int_a^b (S_2 - s_2)(x)\,dx \le \varepsilon, \end{array}$$

ce qui montre que f_1 et f_2 sont intégrables. Le résultat s'en déduit aussitôt, puisque $f = f_1 + f_2$.

Retour à l'exercice ▲

On a les inégalités

$$\frac{x}{2} \leq f \leq 2x,$$

Nous avons montré dans le paragraphe (Fonction intégrable - définition) que

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}, \quad \int_0^1 2x dx = 1$$

nous déduisons que :

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 2x\, dx = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

Sur $[0, 1[$ $x/2$ est intégrable, d'intégrale $1/4$. Sur $]1, 2]$, la fonction 2 est intégrable, d'intǵrale 3. La relation de Chasle nous permet alors d'affirmer que la fonction f est intégrable sur $[0, 2]$, d'intégrale $9/4$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

Cette aire est calculée par l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

1. Non, cette fonction n'est pas nulle sur l'intervalle $[0, 2]$, puisqu'elle est égale à 1 au point $x = 1$.
2. Son intégrale se calcule par

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 0 + 0 = 0$$

3. Non, il n'y a pas de contradiction avec le théorème cité, car la fonction f de l'exercice n'est pas continue. Si nous reprenons la démonstration du théorème, nous voyons que le point clé est que $f(1) \neq 0$ et pourtant, il n'existe pas de sous-intervalle $[1 - \eta, 1 + \eta]$ où f soit non nulle en tout point.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Pour h négatif, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{1}{-h}\int_{a+h}^{a} f(x)\,dx.$$

Posons alors $\delta = -h$. Alors δ est positif et nous devons calculer la limite, lorsque $\delta > 0$ tend vers 0 de

$$\frac{1}{\delta}\int_{a-\delta}^{a} f(x)\,dx.$$

La démonstration se poursuit ensuite comme celle de la proposition 7.1.6, avec cette fois-ci les quantités

$$m(\delta) = \min_{a-\delta\leq x\leq a} f(x) \text{ et } M(\delta) = \max_{a-\delta\leq x\leq a} f(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

Le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'exprimer ces intégrales à l'aide d'une primitive de t^2. Il vient ainsi

$$\int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}.$$

De même

$$\int_1^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Retour à l'exercice ▲

1.
$$\int_0^\pi \sin x\, dx = \pi \sin(\theta\pi),\ \textbf{avec } \theta \in]0,1[.$$

2. Comme la fonction sinus garde un signe constant sur l'intervalle $[0,\pi]$, nous pouvons utiliser le deuxième théorème de la moyenne, ce qui donne
$$\int_0^\pi f(x) \sin x\, dx = f(\theta_f \pi) \int_0^\pi \sin x\, dx,\ \textbf{avec } \theta_f \in]0,1[.$$
Enfin, nous avons déjà calculé cette dernière intégrale (exercice A.1.12), ce qui donne
$$\int_0^\pi f(x) \sin x\, dx = 2 f(\theta_f \pi).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans ce cas

$$\left| \int_a^b \alpha g(x)\, dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b \alpha^2\, dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right)$$

d'où

$$\alpha^2 \left| \int_a^b g(x)\, dx \right|^2 \leq (b-a)\, \alpha^2 \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right)$$

soit, après simplification par α^2

$$\left| \int_a^b g(x)\, dx \right|^2 \leq (b-a) \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right)$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Donnons nous une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, en n sous-intervalles, à l'aide de points $x_i = a+i(b-a)/n$, $i = 0, \dots, n$. Nous construisons deux familles de fonctions étagées s_n et S_n, par

$$\begin{cases} \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad s_n(x) = f(x_i), \\ s_n(b) = f(b), \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in]x_i, x_{i+1}], \quad S_n(x) = f(x_{i+1}), \\ S_n(a) = f(a), \end{cases}$$

où i varie de 0 à $n-1$.
Les fonctions étagées s_n et S_n encadrent alors f et l'on a

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad \int_a^b S_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}),$$

l'intégrale de f est encadrée par celles de s_n et S_n.

$$\int_a^b s_n(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b S_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)),$$

On obtient une majoration de l'erreur par

$$\int_a^b (f - s_n(x))\,dx \le \int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx, \;\; \int_a^b (S_n(x) - f(x))\,dx \le \int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1, \quad \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}x \, dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln e - \ln 1 = \ln e = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

1. Posons $u' = 1$, $v = \ln x$, d'où $u = x$, $v' = 1/x$. Il vient alors

$$\int_a^b \ln x \, dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x} \, dx = b \ln b - a \ln a - (b - a).$$

2. On fait deux intégrations par parties successives, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 e^x \, dx &= [x^2 e^x]_a^b - \int_a^b 2x e^x \, dx && \text{(B.1.7)} \\
&= [x^2 e^x]_a^b - [2x e^x]_a^b + \int_a^b 2 e^x \, dx && \text{(B.1.8)} \\
&= [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]_a^b && \text{(B.1.9)} \\
&= e^b(b^2 - 2b + 2) - e^a(a^2 - 2a + 2). && \text{(B.1.10)}
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

1. La première intégrale se calcule par changement de variable. Posons

$$t = \varphi(x) = x^2,$$

$$dt = 2x dx,$$

pour $x = 0$, on a $t = 0$, pour $x = 1$, on a $t = 1$.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left[\ln|1+t|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

2. La deuxième intégrale s'obtient en intégrant par parties. Posons $u' = 1$ et $v = \operatorname{Arc}\tan x$. Il vient $u = x$ et $v' = 1/(1+x^2)$, d'où

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx = \left[x\operatorname{Arc}\tan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

3. La troisième intégrale s'obtient par changement de variable. Posons

$$t = \varphi(x) = \operatorname{Arc}\tan(x),$$

$$dt = \frac{dx}{1+x^2},$$

pour $x = 0$, on a $t = 0$, pour $x = 1$, on a $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt = \frac{\pi^2}{32}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

1. Lorsque x est positif, $\ln|x| = \ln x$. Sa dérivée est donc $1/x$.
2. Lorsque x est négatif, $\ln|x| = \ln(-x)$. Sa dérivée est donc $(-1)/(-x) = 1/x$.

Retour à l'exercice ▲

1. (i) On écrit que
$$b \times \frac{a}{b} = a, \text{ de sorte que } \ln b + \ln \frac{a}{b} = \ln a.$$
2. (ii) Par récurrence .
$$\ln(\prod_{i=1}^{1} a_i) = \ln a_1 = \sum_{i=1}^{1} \ln a_i.$$
Supposons la proposition vraie pour $q \geq 1$, alors
$$\ln(\prod_{i=1}^{q+1} a_i) = \ln((\prod_{i=1}^{q} a_i)a_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q} \ln a_i + \ln a_{q+1} = \sum_{i=1}^{q+1} \ln a_i.$$
3. (iii) On utilise ce qui précède avec $a_i = a, i = 1, ..., p$.
4. (iv) Si p est négatif, $p = -q, a^p = \frac{1}{a^q}$, donc
$$\ln a^p = -\ln a^q = -q \ln a = p \ln a$$
5. (v) Il suffit de poser $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$ donc
$$\ln a = q \ln \left(a^{\frac{1}{q}}\right).$$
6. (vi) Si $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}$, alors $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, donc
$$\ln a^x = p \ln \left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln a = x \ln a$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

1.
$$\left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right\}^q = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right\}^p = x^p = \left\{(x^p)^{\frac{1}{q}}\right\}^q,$$

d'où l'on déduit par passage à la fonction réciproque

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui permet de donner un sens à l'expression $x^{p/q}$.

2.
$$\ln \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} = \frac{p}{q}\,\ln e = \ln e^{\frac{p}{q}}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

1. On développe le second membre en remplaçant les cosinus et sinus hyperboliques par leurs expressions en fonction de e^a, e^{-a}, e^x et e^{-x}.
2. Il suffit de dériver par rapport à x la relation précécente.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

1. $$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a}e^{y\ln a} = a^x a^y$$

2. $$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{y\ln(e^{x\ln a})} = e^{yx\ln a} = a^{xy}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

1. Pour m entier positif ou nul, on pose $x^0 = 1$, puis $x^{m+1} = x^m x$.
2. Pour m entier négatif, on pose $x^m = 1/x^{-m}$.
3. Pour m entier, on définit $x^{1/m}$ comme fonction réciproque de x^m.
4. Pour $r = p/q$, rationnel, on définit x^r, comme expliqué dans l'exercice A.1.24.
5. Pour y réel, on définit x^y par $e^{x \ln y}$.

À chaque étape, on vérifie que

1. La nouvelle définition est une extension des précédentes, c'est-à-dire, par exemple, que pour $\alpha = r$, la définition de x^α, pour α réel, redonne bien x^r pour r rationnel.
2. Les règles de calcul sont bien conservées, c'est-à-dire que

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.1

Utilisez le même raisonnement que pour la fonction $f(x) = x$, exemple traité après les définitions VII.1.3 et VII.1.4.

Retour à l'exercice ▲

On construit les fonctions u et U de la même manière. Ainsi, on a, pour $k = 0, \ldots, n$ et $h = \frac{1}{n}$:

$$x_k = kh\,, \ \ u(x) = e^{x_k}\,,\ U(x) = e^{x_{k+1}} \text{ pour } x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Calculer alors $\int_0^1 (U(x) - u(x))dx$ qui est une fonction étagée.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.1

$$\int_0^1 (U(x) - u(x))dx = h(e^h - 1) + h(e^{2h} - e^h) + \ldots + h(e - e^{n-1}h) = h(e-1).$$

Cette quantité est donc inférieure à ε dès que l'on prend $h < \frac{\varepsilon}{e-1}$.

Il vous reste à calculer $\int_0^1 U(x)dx$ et $\int_0^1 u(x)dx$ qui encadre $\int_0^1 e^x dx$, à passer à la limite quand h tend vers 0 pour conclure.

Retour à l'exercice ▲

$$\int_0^1 U(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} e^{kh} = he\frac{1-e^{nh}}{1-e^h} = he\frac{1-e}{1-e^h}.$$

$$\int_0^1 u(x)dx = h\sum_{k=0}^{n-1} e^{kh} = h\frac{1-e^{nh}}{1-e^h} = h\frac{1-e}{1-e^h}.$$

Or

$$\int_0^1 u(x)dx \le \int_0^1 e^x dx \le \int_0^1 U(x)dx,$$

soit

$$he\frac{1-e}{1-e^h} \le \int_0^1 e^x dx \le h\frac{1-e}{1-e^h}.$$

Il vous reste à passer à la limite quand h tend vers 0 (au fait que vaut $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$?) pour montrer que

$$\int_0^1 e^x dx = e-1$$

ce que vous savez depuis longtemps !

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

Un calcul évident donne

$$I = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe Calcul numérique sur la méthode des rectangles.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.2

Les points x_k de la méthode des rectangles ont pour valeur $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, ..., n-1$. En ces points on a

$$f(x_k) = \frac{1}{1+x_k} = \frac{n}{n+k}.$$

De plus on a $h = \frac{1}{n}$, d'où

$$I_n = h(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + ... + \frac{n}{2n-1}\right),$$

soit

$$I_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Retour à l'exercice ▲

Le calcul d'erreur de la méthode des rectqngles est fait dans le paragraphe Calcul numérique.

Retour à l'exercice ▲

On applique le résultat sur le calcul d'erreur et il reste à calculer

$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

Montrer que l'on trouve $M = 1$. Il en résulte que

$$|I_n - I| \leq \frac{1}{2n}.$$

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini dans le résultat précédent. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

La suite $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ n'est autre que I_n. Or

$$\lim_{n\to\infty} |I_n - I| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} (= 0),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \right) = \ln 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Un calcul simple d'intégration donne

$$J_{n+1} = \ln(n+1).$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe Calcul numérique sur la méthode des rectangles. Prendre n intervalles de longueur $\frac{1}{n+1}$ car

$$\frac{1}{n+1} + n * \frac{1}{n+1} = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Les points x_k de la méthode des rectangles ont pour valeur $x_k = \frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+1} = \frac{k+1}{n+1}$, $k = 0, ..., n-1$. En ces points on a

$$f(x_k) = \frac{1}{x_k} = \frac{n+1}{k+1}.$$

De plus on a $h = \frac{1}{n+1}$, d'où un calcul approché de J_{n+1} par la méthode des rectangles donne

$$K_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1) + \frac{n+1}{2} + ... + \frac{n+1}{n}\right).$$

Comparer alors sur un graphe J_{n+1} et K_{n+1}.

Retour à l'exercice ▲

Puisque la fonction est décroissante la somme des aires des rectangles qui correspond à K_{n+1} est supérieure à l'aire située sous la courbe et correspondant à J_{n+1}. D'où le résultat demandé.

Retour à l'exercice ▲

Pensea à remplacer J_{n+1} par sa valeur dans l'inégalité de la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité de la question précédente pour obtenir le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Pensez à comparer x^2 et x sur les intervalles qui vous intéressent.

Retour à l'exercice ▲

Sur l'intervalle $[0,1]$, on a $x^2 < x$ et donc $e^{-x} < e^{-x^2}$. Il suffit alors d'intégrer "l'inégalité". Raisonnez de la même manière sur l'intervalle $[1,a]$.

Retour à l'exercice ▲

Pensez à utiliser la primitive de la fonction F qui existe puisque la fonction f est continue.

Retour à l'exercice ▲

D'après les résutats du paragraphe Intégrale et primitive, on a

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) - F(u(x)),$$

d'où

$$g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Pensez à dériver.

Retour à l'exercice ▲

En dérivant on obtient

$$f(x+a) = f(x-a).$$

Est-ce bien la définition d'une fonction périodique de période $2a$?

Retour à l'exercice ▲

L'intervalle d'étude de $g(x)$ est en réalité celui de $\sin^2 x$. Quel est-il ?

Retour à l'exercice ▲

Il est clair que $\sin^2 x$ est périodique de période π. Penser alors à $\sin(\pi - x)$.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le résultat général de la première question.

Retour à l'exercice ▲

Attention la dérivée fait intervenir la quantité

$$\arcsin \sqrt{\sin^2 x} = \arcsin |sinx|.$$

Souvenez-vous du domaine d'arrivée de $\arcsin$!

Retour à l'exercice ▲

Puisque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors vous pouvez démontrer facilement que

$$\arcsin |sinx| = x.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3c, Exercice A.2.4

Pensez à utiliser $\sin 2x$ et à faire une intégration par partie.

Retour à l'exercice ▲

On trouve que les primitives sont

$$F(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Retour à l'exercice ▲

Pensez à rapprocher les résultats des deux questions précédentes...

Retour à l'exercice ▲

On a

$$g(x) = F(x)$$

et la constante est déterminée par $g(0)$.

Retour à l'exercice ▲

Déterminer l'angle $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **tel que** $g(y) = g(x)$**.**

Retour à l'exercice ▲

On trouve $y = \frac{\pi}{3}$ **et donc**

$$g(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\cos 2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le résultat de la question 1. Le calcul ne présente pas de difficulté particulière.

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $\sin(a+b)$ **?**

Retour à l'exercice ▲

N'oubliez pas que, puisque $\sin x$ ne dépend pas de la variable d'intégration t, vous pouvez le sortir de l'intégrale. Utilisez alors les résultats de (a).

Retour à l'exercice ▲

Dans le changement de variable $u = x - t$, la variable x est constante et donc on remplace dt par ? ? ? N'oubliez pas de changer les bornes d'intégration.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$h(x) = \int_{x}^{x-x^3} \sin(u)(-1)du.$$

Utilisez alors les résultats de (a).

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe Moyenne-théorèmes.

Retour à l'exercice ▲

Ne confondez pas une fonction non continue et une fonction non définie. Il suffit de construire une fonction avec un saut en 0 et telle que les aires se "compensent".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.5

Prenez par exemple $f(x) = 1$ pour $x \geq 0$, $f(x) = -1$ pour $x < 0$ et intégrez sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.5

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$ est définie par

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Un point fixe pour une fonction f annule quelle fonction ?

Retour à l'exercice ▲

Soit la fonction $g(x) = f(x) - x$, alors un point fixe de f annule la fonction g. Calculer alors l'intégrale de g sur $[0, 1]$ et appliquer la première question.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.6

Uiliser la relation de Chasles pour découper sur deux intervalles où la fonction à intégrer a un signe constant.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.6

$$\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

et faire un changement de variable sur la deuxième intégrale pour vous ramener à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Retour à l'exercice ▲

On pose $t = x - \pi$ et on obtient

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\sin(t)}{t+\pi} dt$$

et on regroupe avec la première intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe Cauchy-Schwarz-inégalité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.7

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la fonction f (puis f') et à la fonction constante 1.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe Moyenne-théorèmes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.8

Pensez à utiliser le second théorème de la moyenne. Dans quel intervalle se trouve c?

Retour à l'exercice ▲

On trouve

$$lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt=\frac{1}{2}f(0),$$

car c tend vers 0 et f est continue.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.9

Il y a plusieurs démonstrations possibles. L'une d'entre elles utilise le premier théorème de la moyenne en considérant $\arctan x$ ou $e^x - 1$ comme une intégrale définie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.9

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x \frac{1}{1+c^2}$$

où $c \in]0, x[$. Il ne vous reste plus quà majorer avec l'hypothèse $x \geq 0$. Faites de même pour la deuxième inégalité.

Retour à l'exercice ▲

La première ingalité se démontre en utilisant le premier théorème de la moyenne et en prenant la valeur absolue pour majorer le sinus par 1. La deuxième utilise le deuxième théorème de la moyenne

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.9

$$\int_0^a \frac{\sin x}{1+x^2}dx = \sin c \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx = \sin c \arctan a,$$

avec $c \in]0, a[$. Il suffit alors de prendre la valeur absolue.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.10

(rep : $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$, $-\sqrt{1-t^2}+C$, $\frac{1}{30}(1+t^5)^6+C$, $\frac{1}{2}\ln^2|t|+C$, $\frac{1}{2}\arctan t^2+C$, $\frac{2}{3}(\sin t)^{\frac{3}{2}}+C$, $\frac{1}{2}(\arctan t)^2+C$, $e^t(t-1)^2+C$, $t(\ln|t|-1)+C$, $t\arccos t-\sqrt{1-t^2}+C$, $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$, $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$, $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$, $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$, $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin 5x+C$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\cos x)+C$.**)**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.11

1. Si $n = -1$ $I_1 = \frac{1}{2}$, sinon $I_1 = \dfrac{e^{n+1}}{n+1} - \dfrac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2}$, $I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$,
2. $I_3 = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$, $I_4 = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.12

1. $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{1}{a}$, $I_2 = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$
2. $I_3 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, $I_4 = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$,
3. $F_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$, $F_6(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.13

1. La fonction possède une propriété de symétrie puisque

$$f(\frac{a+b}{2}+x) = f(a+b-(\frac{a+b}{2}+x)) = f(\frac{a+b}{2}-x).$$

2. Le changement de variable donne

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)(-1)dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt.$$

3. Il suffit de développer le membre de droite et de regrouper les intégrales $\int_a^b xf(x)dx$ et $\int_a^b tf(t)dt$ qui sont égales pour obtenir le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.14

$I_1 = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}$, $I_2 = \frac{\pi}{4}a|a|$, $I_3 = \frac{\pi}{8}$, $I_4 = \frac{1}{12}$, $I_5 = -\frac{1}{24} + \frac{3\pi}{32}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.15

1. (a) $\ln\left|\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$, $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$,

   (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2})+C$, $-\frac{1}{4\sin^4 x}+\frac{1}{2\sin^2 x}+C$

2. $\tan x - x + C$, $\tan x + C$, $-\frac{1}{tanx}+C$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$, $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\dfrac{a\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{a^2-1}}\right)+C$, $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$, $x-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\frac{x}{2})+C$, $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$, $\sin x-\frac{2}{\sin x}-6\arctan(\sin x)+C$.

Retour à l'exercice ▲